

---

# EL RESIDUO DE SOLOW REVISADO

---

*José Reyes Bernal B.\**

Slow publicó su artículo sobre el cambio tecnológico y la función de producción agregada en 1957. Desde entonces, el procedimiento para distinguir entre las variaciones de la producción debidas al progreso técnico y a los cambios en la disponibilidad de capital ha tenido sustento teórico en su trabajo seminal. Su contribución consiste en cuantificar el progreso técnico en forma residual. Por esta razón, al progreso técnico se lo conoce también como residuo de Solow o productividad total de los factores (PTF).

En la literatura reciente sobre crecimiento endógeno se incluye la PTF como un factor que depende de factores institucionales, aspectos macroeconómicos, conflictos sociales, organización del mercado, etc. Hoy existe consenso sobre la importancia de la productividad como fuente de crecimiento. Los estudios de Prescott (1997 y 1998) apoyan esta posición y argumentan que el estudio de esta variable es aún muy precario a pesar de su importancia, pues explica más del 80% del crecimiento económico en los países desarrollados y cerca del 40% en los del Tercer Mundo.

En la práctica, todo el mundo calcula el progreso técnico siguiendo el método que Solow planteó hace más de 50 años para establecer las fuentes del crecimiento económico, y muchos autores citan su propuesta en los trabajos que se han escrito sobre cambio técnico<sup>1</sup>.

\* Doctor en Ciencias Económicas, director de la Maestría en Ciencias Económicas de la Universidad Santo Tomás y profesor asociado de la Universidad de la Salle, Bogotá, Colombia, [josereyes@usantotomas.edu.co y josebernal@unisalle.edu.co]. Fecha de recepción: 17 de noviembre de 2009, fecha de modificación: 17 de marzo de 2010, fecha de aprobación: 21 de octubre de 2010.

<sup>1</sup> Ver, por ejemplo, Gay (2009), Hulten (2009), Khan (2009), Crafts (2008), Greenwood y Krusell (2007), Fuentes et al. (2004), Felipe y McCombie (2004), y Maia y Nicholson (2001). La Comisión Europea (2005) calcula la PTF para 30 países.

Este cálculo tiene el problema de que el valor de ese progreso técnico es muy alto y su contribución al crecimiento de la economía muchas veces supera el 100% e incluso el 200%. Solow calculó este residuo y su contribución al crecimiento fue del 87% en promedio entre 1909 y 1949. ¿No es exagerada esta cifra?, o como él dice, ¿no refleja nuestra gran ignorancia acerca de lo que realmente explica el crecimiento?, o mejor, ¿la función de producción utilizada es apropiada para representar el comportamiento de las economías?

En términos más precisos, si utilizáramos una función de producción Cobb-Douglas ( $Y = K^\alpha L^\beta$ ), tendría que explicar más del 80% del crecimiento sin tener que incluir un factor residual ( $Y = AK^\alpha L^\beta$ ) que contribuiría al crecimiento en más del 80%. El ejercicio de Solow muestra que en 1910 su contribución fue del 156%, en 1926 del 304% y en 1927 y 1928 del -191% y el -180%, respectivamente. ¿Es posible que existan cambios tan bruscos o que algo que no se conoce contribuya tanto al crecimiento o decrecimiento de la economía? Conforme a la teoría evolucionista esto no sería posible, pues los agentes no olvidan, no desaprenden; por el contrario, existe una mejora continua. Desde el punto de vista del sentido común, nadie creería que este residuo contribuya al crecimiento en magnitudes tan desproporcionadas.

En el trabajo del grupo de investigaciones sobre crecimiento económico del Banco de la República (GRECO) se observan también enormes oscilaciones de la PTF entre 1950 y 1996. La contribución al crecimiento de la economía colombiana en 1950 fue del -249%, en 1957 pasó al 0,65%, en 1958 al -71% y en 1959 al 107%. En 1982 se calcula el dato menos creíble desde el punto de vista de la economía: una contribución de la PTF del -617%. ¿Dónde queda la contribución al crecimiento de la adición de factores productivos? Parece entonces necesario repensar si el cálculo de la PTF, tal y como lo planteó Solow, refleja un progreso técnico continuo.

Cualquiera que sea la respuesta a las preguntas anteriores, el progreso técnico se sigue calculando por residuo para establecer las fuentes de crecimiento a partir de la función de producción neoclásica tradicional. Este trabajo muestra que así se siga utilizando esta función el progreso técnico contribuye al crecimiento, pero no en la forma exagerada que indican las estimaciones realizadas en diferentes países. En este sentido, no pretende establecer los determinantes de la productividad total de los factores o progreso técnico, ni usar la teoría del crecimiento endógeno para explicar el residuo. Sólo pretende, con base en el trabajo de Solow, mostrar que es posible un nuevo

cálculo del progreso técnico. La primera sección expone su propuesta y la segunda un enfoque alternativo para calcular la productividad multifactorial. En la tercera se presentan estimaciones para Estados Unidos, Colombia y 15 países de la Unión Europea. En la última se presentan las conclusiones.

## BASES TEÓRICAS DEL MODELO DE SOLOW

Los fundamentos teóricos del progreso técnico se pueden representar en forma matemática y gráfica. Matemáticamente, la función de producción agregada de la economía se puede escribir así:

$$Y = f(K, L, t) \quad [1]$$

donde  $Y$  es el producto de la economía,  $K$  el capital utilizado resultante de los aumentos sucesivos de la inversión y  $t$  el progreso tecnológico que experimenta la economía a través del tiempo, y que refleja cualquier desplazamiento de la función. Por comodidad, Solow supone que el cambio técnico es neutral, es decir, que un desplazamiento de la función de producción no altera la distribución del ingreso para una relación capital-trabajo dada. En consecuencia, la función de producción toma la siguiente forma:

$$Y = A(t)f(K, L) \quad [1A]$$

En este caso, el factor multiplicativo  $A(t)$  mide el efecto acumulado de las modificaciones del producto a lo largo del tiempo. Derivando [1A] con respecto al tiempo y dividiendo por  $Y$  se obtiene:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + A \frac{\partial f}{\partial K} \frac{\dot{K}}{Y} + A \frac{\partial f}{\partial L} \frac{\dot{L}}{Y} \quad [2]$$

Los puntos indican las derivadas con respecto al tiempo. Además, si se definen  $\alpha$  y  $\beta$  como las participaciones relativas de cada factor dentro del producto, es decir,  $\alpha = \partial Y / \partial K * K / Y$ , y  $\beta = \partial Y / \partial L * L / Y$ , y sustituyendo en [2], se obtiene:

$$\frac{\dot{Y}}{Y} = \frac{\dot{A}}{A} + \alpha \frac{\dot{K}}{K} + \beta \frac{\dot{L}}{L} \quad [2A]$$

o

$$gy = ga + \alpha gk + \beta gl \quad [3]$$

donde  $gy$  es la tasa de crecimiento del producto,  $ga$  la tasa de crecimiento del progreso técnico,  $gk$  y  $gl$  las tasas de crecimiento del stock de capital y trabajo, y  $\alpha$  y  $\beta$  la participación de las remuneraciones del capital y trabajo dentro del producto. Esta función, expresada en

términos de producto por trabajador suponiendo homogeneidad, da lugar a la siguiente ecuación:

$$gy_p = ga + \alpha gk_p \quad [4]$$

donde  $gy_p$  es el producto por trabajador,  $gk_p$  el capital por trabajador y  $\alpha$  la participación de la remuneración del capital dentro del producto.

Se puede plantear, así mismo, una función de producción explícita como la Cobb-Douglas, que tiene la propiedad de ser homogénea de grado uno. Formalmente se tiene:

$$Y = AK^\alpha L^\beta \quad [5]$$

Expresando esta función como el producto por trabajador en función del capital por trabajador se llega a la siguiente ecuación:

$$y_p = Ak_p^\alpha \quad [6]$$

donde  $y_p$  es el producto por trabajador,  $A$  el progreso técnico,  $k_p$  la relación capital trabajo y  $\alpha$  sigue siendo la participación de la remuneración del capital dentro del producto. Así mismo, podemos llegar a la siguiente expresión después de linealizar la ecuación [6]:

$$Gy_p = ga + \alpha gk_p \quad [7]$$

Con base en la ecuación [4] o en la ecuación [7] se puede calcular  $ga$  por residuo, tal y como hizo Solow. Esto quiere decir que la tasa de crecimiento del producto por trabajador es observada, igual que la tasa de crecimiento del capital por trabajador y la participación de la remuneración al capital en el producto. La ecuación resultante es:

$$ga = gy_p - \alpha gk_p \quad [8]$$

El crecimiento del progreso técnico es entonces igual a la tasa de crecimiento del producto menos la tasa de crecimiento del capital ponderada por la participación de la remuneración del capital dentro del producto.

Con base en el crecimiento del progreso técnico se puede hallar el índice de progreso técnico  $A(t)$  de la manera que propone Solow en su artículo:  $A(t) = (1 + ga)^t$ , donde  $ga$  es la tasa de crecimiento. También se puede calcular  $A(t)$  en tiempo continuo, en cuyo caso  $A(t) = e^{gat}$ .

## NUEVO CÁLCULO DEL RESIDUO DE SOLOW

Solow (1957) dice que para “aislar los desplazamientos de la función de producción de los movimientos a lo largo de dicha función” es necesario tener “tres series temporales: la producción por unidad de

trabajo, el capital por unidad de trabajo y la participación del capital". Con base en la ecuación [8] se puede hacer un análisis diferente y llegar a un cálculo de la productividad multifactorial alternativo al que propuso Solow.

En la ecuación [8] se supone que  $\alpha$  es la participación de las ganancias en el producto o la participación de la remuneración del, es decir  $rK/Y$ , donde  $r$  es la remuneración por unidad de capital que debe ser igual al producto marginal del capital  $\Delta Y/\Delta K$ . En consecuencia,  $\alpha g_k$  debe ser igual a:

$$\alpha g_k = r * \frac{K}{Y} * \frac{\Delta K}{K} = r * \frac{\Delta K}{Y} \quad [9]$$

Además, si se supone que las variaciones del capital  $\Delta K$  son iguales a la inversión  $I$ , se puede plantear que:

$$\alpha g_k = r * \frac{\Delta K}{Y} = r * \frac{I}{Y} = r * \frac{S}{Y} \quad [10]$$

De donde  $I/Y$  es la tasa de inversión, que debe ser igual a la tasa de ahorro de la economía  $S/Y$ , igual a  $s$ , la propensión marginal o media a ahorrar. Si además se supone que  $r = 1/C$ , donde  $C$  es la *relación incremental capital producto* (ICOR), se llega a la ecuación de Harrod de la siguiente manera:

$$\alpha g_k = \frac{s}{C} = \frac{i}{C} \quad [11]$$

Y combinando [12] y [9], llegamos a:

$$g_a = g_y - \frac{i}{C} \quad [12]$$

O bien:

$$g_a = g_y - \frac{s}{C} \quad [13]$$

Se observará que se partió de la función de producción que propuso Solow, en cuyo caso la tasa de crecimiento de la economía es:

$$g_y = g_a + \frac{s}{C} \quad [14]$$

O bien:

$$g_y = g_a + \frac{i}{C} \quad [15]$$

Con las ecuaciones [12] y [13] se puede calcular el progreso técnico por residuo, pero se considera que la ecuación [12], es decir, donde se incluye la tasa de inversión productiva, se acerca más a los resultados reales que cuando se incluye la tasa de ahorro, porque parte del aho-

ro se dedica a la especulación mientras que la inversión se realiza en actividades productivas. Además, cualquiera de las ecuaciones [14] o [15] explica la tasa de crecimiento de la economía y esta tasa, a su vez, está explicada en más del 95% por los cambios en la relación marginal capital-producto (Bernal, 2008).

En este contexto sigue existiendo un residuo que refleja el progreso técnico, y la pregunta que surge inmediatamente es: ¿el residuo de la ecuación [12] o [13] es del mismo tamaño que el residuo de la ecuación [8]? Para responderla es preciso hacer los cálculos correspondientes. Pero antes de pasar a las estimaciones se debe señalar que Kalecki propuso un enfoque similar para determinar la tasa de crecimiento de la economía.

Kalecki (1976) argumentó que la variación del ingreso  $\Delta Y$  de un año a otro dependía en primer lugar del efecto productivo de la inversión  $I$ . Si se denota por  $C$  a la relación marginal capital-producto, el efecto de la inversión será el resultado de multiplicar  $(1/C)$  por la inversión, es decir,  $(1/C)I$ .

También argumentó que en el crecimiento del ingreso nacional intervienen las mejoras en el uso del equipo productivo o en la organización del trabajo, o en el uso más racional de las materias primas, etc.; en suma, que el crecimiento del ingreso depende del progreso técnico. Los efectos de estas mejoras elevan el ingreso nacional en la fracción  $aY$ .

Con base en las consideraciones anteriores se llega a la siguiente fórmula del crecimiento del ingreso nacional:

$$\Delta y = \frac{1}{C}I + aY \quad [16]$$

que al dividirla por  $Y$  da como resultado:

$$G_y = \frac{1}{C} \frac{I}{Y} + a \frac{Y}{Y} \quad [17]$$

donde  $G_y$  a la tasa de crecimiento del ingreso  $\Delta Y/Y$ . Ahora, como en equilibrio macroeconómico el ahorro es igual a la inversión,  $S = I$ , y como porcentaje del ingreso  $S/Y = I/Y$ . Denotando a  $S/Y$  por  $s$  se llega a la ecuación modificada de Harrod:

$$G_y = \frac{s}{C} + a \quad [18]$$

La ecuación [18] implica que la tasa de crecimiento del ingreso es igual a la tasa de ahorro dividida por la relación marginal capital-producto más el efecto de las innovaciones tecnológicas o progreso tecnológico.

Kalecki muestra que el coeficiente  $\alpha$  permanece constante si todos los adelantos o progresos se dan a una tasa uniforme, siempre y cuando la capacidad productiva esté plenamente ocupada. De no ser así, podrá cambiar a través del tiempo y dependerá de la relación entre la demanda y la capacidad productiva.

Además, supone que la productividad en las fábricas que entran en operación crece a una tasa constante, es decir, que de un año a otro este crecimiento de la productividad del trabajo se puede expresar como  $(1 + \alpha)$ . Así mismo, el crecimiento de la nueva producción deberá estar dado por  $(1 + G_y)$  porque la tasa de inversión se incrementa a una tasa anual constante si la relación capital-producto se mantiene constante. En este sentido, la productividad y el crecimiento de la producción aumentan a tasas constantes en las nuevas fábricas que entran en funcionamiento; por ello, el crecimiento de la ocupación también debe crecer a la misma tasa. Formalmente se puede escribir el crecimiento de la ocupación como  $(1 + \epsilon)$ , que debe ser igual a la relación entre el crecimiento de la producción y el crecimiento de la productividad, es decir,  $(1 + \epsilon) = (1 + G_y)/(1 + \alpha)$ . Se observa entonces que el crecimiento de la economía queda determinado por la suma de la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo y la tasa de crecimiento de la ocupación, pero la tasa de crecimiento de la productividad del trabajo,  $\alpha$ , está determinada por el progreso técnico. En consecuencia, según la ecuación [18], el progreso técnico  $\alpha$  que crece a una tasa constante queda representado por la relación constante entre el crecimiento de la productividad del trabajo y el crecimiento de la producción, es decir,  $(1 + \alpha)/(1 + G_y)$ .

Así, Kalecki hace explícita la introducción del cambio técnico o progreso tecnológico y demuestra que éste debe aumentar la productividad del trabajo, de tal manera que el crecimiento de la economía es igual a la suma de la tasa de crecimiento de esa productividad y la tasa de crecimiento de la población, como había planteado Harrod.

En consecuencia, la ecuación [18] es igual a la ecuación [15], es decir, la tasa de crecimiento de la economía es igual a la suma de la tasa del progreso técnico más la ecuación fundamental de Harrod. Ahora podemos proceder a hacer los cálculos del progreso técnico utilizando esta ecuación y comparar su contribución en Estados Unidos, Colombia y 15 países de la Unión Europea.

## ESTIMACIONES

Para cuantificar el progreso técnico con base en la ecuación de Harrod se utiliza la base de datos Penn World Table desde 1980 hasta 2003, y luego se compara con la PTF tradicional. En otras palabras, se utiliza la ecuación [12] para los cálculos y estos resultados se comparan con el residuo tradicional de Solow para cuantificar la magnitud de la contribución al crecimiento económico. En cada caso, es decir, para Estados Unidos, Colombia y los 15 países de la Unión Europea, el residuo tradicional de Solow se toma de las fuentes que aparecen al final de cada cuadro.

El cuadro 1 muestra que el progreso técnico calculado con la ecuación [12] es siempre positivo (columna 5) mientras que el progreso técnico calculado con la ecuación [9] por Timmer et al. (2003) es positivo y negativo, por ejemplo en 1980 es del -2,24%, en 1982 es del -2,49% y en 2001 es del -0,04%. Así mismo, se observa que en 1980 la tasa de crecimiento fue del -0,7% y el progreso técnico fue del -2,24%, lo que quiere decir que la caída de la tasa de crecimiento de la economía fue explicada en un 320% por la disminución del progreso técnico. ¿Tiene sentido este resultado? Desde el punto de vista económico no es posible pensar que esto haya sucedido. ¿Cómo entender que no hubo progreso técnico y que más bien disminuyó? Si se observan los datos de 1982, se encuentra que la tasa de crecimiento de la economía fue del -1,51% y la de progreso técnico fue del -2,49%, lo que indica que la caída de la tasa de crecimiento fue explicada en un 164% por el descenso del progreso técnico, y ello implica que el capital por trabajador contribuyó en el 64%. El sentido común de los economistas diría que este resultado no es coherente.

La tasa de crecimiento en 2003 fue del 2,7% y la del progreso técnico fue del 2,66%, lo que implica que la contribución al crecimiento es del 98,45%, es decir, que el capital por trabajador sólo contribuyó al crecimiento en un 1,55%.

En síntesis, para este periodo el residuo de Solow o PTF contribuyó al crecimiento, en promedio, en un 53%, lo que significaría que el capital por trabajador contribuyó en el 47%. Estos resultados deben ser evaluados con más rigor y no dar un peso trascendental a la contribución del progreso técnico al crecimiento de las economías.



Cuadro 1  
Cálculos del progreso técnico para Estados Unidos

0	1	2	3	4	5	6	7	8
Año	I/Y=i	C	gy	i/C	gaH	ptf	gaH/gy	ptf/gy
1979	19,84	6,95	2,94	2,85	0,08		2,85	
1980	18,13	-25,67	-0,70	-0,71	0,00	-2,24	-0,71	319,29
1981	19,04	7,97	2,45	2,39	0,06	0,81	2,39	32,93
1982	16,80	-10,92	-1,51	-1,54	0,02	-2,49	-1,54	164,58
1983	17,39	3,69	4,95	4,71	0,23	2,16	4,71	43,77
1984	20,43	2,94	7,47	6,95	0,52	1,99	6,95	26,62
1985	19,78	4,93	4,18	4,02	0,17	0,49	4,02	11,75
1986	19,22	5,80	3,43	3,31	0,11	1,04	3,31	30,22
1987	19,08	5,96	3,31	3,20	0,11	0,24	3,20	7,18
1988	18,65	4,84	4,01	3,86	0,15	0,98	3,86	24,52
1989	18,91	5,65	3,46	3,35	0,12	0,47	3,35	13,62
1990	18,23	10,61	1,75	1,72	0,03	0,45	1,72	25,53
1991	17,13	-45,40	-0,38	-0,38	0,00	-0,47	-0,38	126,10
1992	17,75	5,26	3,49	3,38	0,12	2,53	3,38	72,49
1993	18,51	6,42	2,97	2,88	0,09	0,16	2,88	5,40
1994	19,79	4,73	4,36	4,18	0,18	0,89	4,18	20,39
1995	19,94	7,76	2,64	2,57	0,07	-0,36	2,57	-13,70
1996	20,78	5,46	3,96	3,81	0,15	1,54	3,81	38,95
1997	22,12	4,79	4,84	4,62	0,22	0,95	4,62	19,67
1998	23,09	5,40	4,46	4,27	0,19	0,86	4,27	19,20
1999	23,80	5,38	4,63	4,42	0,20	1,21	4,42	26,07
2000	24,16	6,59	3,80	3,67	0,14	1,14	3,67	30,06
2001	22,59	55,25	0,41	0,41	0,00	-0,04	0,41	-8,78
2002	21,94	16,50	1,35	1,33	0,02	1,84	1,33	136,32
2003	22,09	8,41	2,70	2,63	0,07	2,66	2,63	98,45

Col. 1. Participación de la inversión en el producto. Fuente: WPT 6.1, Heston, Summers y Aten. Col. 2. Relación incremental capital-producto, cálculos propios: Fuente: *ibíd.* Col. 3. Tasa de crecimiento de la Economía. Fuente: *ibíd.* Col. 4. Ecuación de Harrod, columna 1/ columna 2. Col. 5. Residuo o progreso técnico aplicando la ecuación [13]. Col. 6. Productividad Total Factorial. Fuente: Timmer et al. (2003), actualizada en junio de 2005, o Bureau of Labor Statistics and Office of Productivity and Technology, May 6, 2009. Col. 7 y 8. Contribución porcentual al crecimiento según Harrod y Solow, respectivamente.

Pasa todo lo contrario si se calcula el progreso técnico con base en la ecuación [12]. En este contexto, la gran contribución al crecimiento está determinada por la ecuación de Harrod, expresada como la tasa de inversión dividida por la relación marginal capital-producto, mientras que el progreso técnico juega un papel marginal en la contribución al crecimiento, como se observa en el cuadro 1.

Los resultados muestran en primer lugar que el progreso técnico es siempre positivo al menos para el periodo de estudio en referencia, como lo muestra la columna 5.

En segundo lugar, se observa que cuando el progreso técnico tiende a ser cero en algunos años, la tasa de crecimiento de la economía es negativa, como en 1980, 1982, 1991 y 2001. Así mismo, en estos años cae la tasa de inversión (columna 1). Parece ser que, según estos resultados, los efectos de mayores tasas de inversión jalonan el cambio técnico y éste contribuye al crecimiento de la economía, mientras

que si se disminuye la inversión no hay cambio técnico y la tasa de crecimiento de la economía experimenta caídas importantes. Ésta es una hipótesis que merece ser estudiada con más profundidad pues supera los alcances de este documento.

Los resultados muestran, con base en la ecuación [12], que el progreso técnico equivale a menos del 1% en todos los años y que su contribución al crecimiento es en promedio del 2,9%. Este es un resultado más lógico que el 53% calculado con base en la ecuación [8].

De igual manera, la tasa de crecimiento más alta fue en 1984 y la contribución del progreso técnico fue del 6,95%, en contraste con el 26% resultante de la ecuación [8]. Según estos datos, ¿cuando Estados Unidos crece a tasas elevadas el progreso técnico es menor? Esto no tiene sentido, como tampoco lo tiene que con bajas tasas de crecimiento, como en 2002 (1,3%), la contribución con la ecuación [9] sea del 136% mientras que con la ecuación [12] sólo sea del 1,33% para un crecimiento del progreso técnico del 0,02% frente al 1,84% estimado con base en la ecuación [8].

En el cuadro 2 podemos observar los datos de la productividad total de los factores calculada para Colombia con la ecuación [8] (GRECO) y los calculados con la ecuación de Harrod. Este cálculo se hizo con las series originales del grupo de estudios del Banco de la República para el periodo 1950-1996.

El cuadro muestra que en 1950 la tasa de crecimiento de la economía colombiana fue del 1,1% y según los cálculos del GRECO el crecimiento de la productividad total de los factores fue del -2,72%, lo que significa que la contribución de la PTF es del -246,9% mientras que el capital por trabajador contribuyó en un 346,9%. La magnitud de estos resultados merece una urgente discusión.

Así mismo, en 1959 la tasa de crecimiento de la economía fue del 7,17% mientras que la del progreso técnico fue del 7,65%, es decir, hubo una contribución al crecimiento de más del 100%, lo que indicaría que el capital por trabajador contribuyó negativamente al crecimiento en un 6,69%. En otras palabras, todo el crecimiento obedeció al progreso técnico o productividad total de los factores, y el capital no jugó ningún papel a pesar de que hubo incrementos del capital, como muestran las cifras.

Cuadro 2  
Cálculos del progreso técnico para Colombia

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Año	y	gy	ktal	inv	I/y	C	gyH	gaH	ptf	gaH/gy	ptf/gy
1950	117.454	1,10	358.871	13.946	11,87	9,67	1,23	-0,12	-2,72	-11,22	-246,19
1951	120.742	2,80	373.007	14.137	11,71	4,30	2,72	0,08	0,55	2,72	19,76
1952	128.408	6,35	388.016	15.009	11,69	1,96	5,97	0,38	6,03	5,97	95,03
1953	134.953	5,10	404.217	16.202	12,01	2,48	4,85	0,25	3,76	4,84	73,86
1954	144.625	7,17	427.346	23.131	15,99	2,39	6,69	0,48	6,21	6,68	86,69
1955	150.362	3,97	451.755	24.409	16,23	4,25	3,82	0,15	0,81	3,82	20,38
1956	157.507	4,75	476.516	24.760	15,72	3,47	4,54	0,22	2,06	4,54	43,38
1957	162.823	3,38	500.438	23.922	14,69	4,50	3,26	0,11	0,02	3,27	0,65
1958	165.916	1,90	517.428	16.990	10,24	5,49	1,86	0,04	-1,35	1,86	-70,84
1959	177.806	7,17	535.635	18.206	10,24	1,53	6,69	0,48	7,65	6,69	106,69
1960	184.932	4,01	559.135	23.554	12,74	3,30	3,86	0,15	1,64	3,63	40,85
1961	194.432	5,14	586.773	27.585	14,19	2,91	4,88	0,26	2,68	5,07	52,10
1962	204.613	5,24	608.064	21.291	10,41	2,09	4,98	0,26	3,79	4,98	72,41
1963	211.178	3,21	629.314	21.250	10,06	3,24	3,11	0,10	0,39	3,11	12,24
1964	223.915	6,03	655.458	26144	11,68	2,05	5,69	0,34	4,78	5,69	79,28
1965	232.906	4,02	680.582	25123	10,79	2,79	3,86	0,16	1,68	3,86	41,94
1966	245.865	5,56	716.407	35825	14,57	2,76	5,27	0,29	2,69	5,27	48,33
1967	254.985	3,71	740.000	23591	9,25	2,59	3,58	0,13	0,92	3,58	24,75
1968	270.928	6,25	774.007	34009	12,55	2,13	5,89	0,37	4,36	5,88	69,74
1969	288.102	6,34	807.632	33625	11,67	1,96	5,96	0,38	4,69	5,96	74,00
1970	307.496	6,73	849.354	41722	13,57	2,15	6,31	0,42	4,78	6,31	70,96
1971	325.825	5,96	892.810	43455	13,34	2,37	5,63	0,34	2,46	5,63	41,34
1972	350.813	7,67	933.609	40799	11,63	1,63	7,12	0,55	5,81	7,12	75,70
1973	374.398	6,72	979.254	45645	12,19	1,94	6,30	0,42	3,94	6,30	58,64
1974	395.910	5,75	1.037.758	58503	14,78	2,72	5,43	0,31	2,02	5,43	35,07
1975	405.108	2,32	1.079.950	42193	10,42	4,59	2,27	0,05	-2,37	2,27	-101,87
1976	424.263	4,73	1.127.464	47514	11,20	2,48	4,51	0,21	1,53	4,51	32,28
1977	441.906	4,16	1.185.911	58447	13,23	3,31	3,99	0,17	-0,02	3,99	-0,58
1978	479.335	8,47	1.249.193	63282	13,20	1,69	7,81	0,66	7,30	7,81	86,18
1979	505.119	5,38	1.310.717	61524	12,18	2,39	5,10	0,27	2,27	5,10	42,16
1980	525.765	4,09	1.380.804	70087	13,33	3,39	3,93	0,16	-0,15	3,93	-3,78
1981	537.736	2,28	1.462.710	81906	15,23	6,84	2,23	0,05	-3,59	2,23	-157,65
1982	542.836	0,95	1.548.898	86188	15,88	16,90	0,94	0,01	-5,85	0,94	-616,97
1983	551.380	1,57	1.630.469	81571	14,79	9,55	1,55	0,02	-4,32	1,55	-274,45
1984	569.855	3,35	1.703.054	72585	12,74	3,93	3,24	0,11	-0,67	3,24	-19,89
1985	587.561	3,11	1.762.893	59839	10,18	3,38	3,01	0,09	-0,34	3,01	-10,83
1986	621.781	5,82	1.825.814	62921	10,12	1,84	5,50	0,32	3,93	5,50	67,46
1987	655.164	5,37	1.896.996	71182	10,86	2,13	5,10	0,27	2,91	5,10	54,12
1988	681.791	4,06	1.975.761	78765	11,55	2,96	3,91	0,16	0,47	3,91	11,62
1989	705.068	3,41	2.043.215	67455	9,57	2,90	3,30	0,11	-0,11	3,30	-3,34
1990	735.259	4,28	2.108.178	64240	8,74	2,15	4,06	0,22	1,76	5,17	41,09
1991	749.976	2,00	2.160.541	52392	6,99	3,56	1,96	0,04	-1,73	1,91	-86,34
1992	780.312	4,04	2.256.898	96402	12,35	3,18	3,89	0,16	0,36	3,84	8,97
1993	822.335	5,39	2.409.150	152277	18,52	3,62	5,12	0,27	1,02	5,02	18,92
1994	870.151	5,81	2.601.455	204572	23,51	4,02	5,84	-0,03	0,67	-0,46	11,48
1995	919.534	5,68	2.851.891	171561	18,63	4,94	3,77	1,90	1,15	33,50	20,32
1996	938.321	2,04	3.086.051	138560	14,74	12,40	1,19	0,85	0,00	41,82	0,00

Col. 1 = PIB, pesos de 1975. Col. 2 = Tasa de crecimiento del PIB. Col. 3 = Capital, pesos de 1975. Col. 4 = Inversión, pesos de 1975. Col. 5 = Tasa de inversión. Col. 6 = Relación marginal capital producto. Col. 7 = Ecuación de Harrod. Col. 8 = Progreso técnico con la ecuación [13]. Col. 9 = PTF, cálculos GRECO. Col. 10 y 11 = contribución al crecimiento a partir de 8 y 9.

Fuente: estadísticas GRECO.

En 1975 la tasa de crecimiento de la economía fue del 2,32% y la del progreso técnico del -2,37%, es decir, su contribución al crecimiento fue negativa: -101%. ¿Cómo explicar estos hechos? Tal vez la teoría en que se basa la función de producción esté errada, y eso es justamente lo que se demuestra interpretando la función de producción como la ecuación de Harrod en el cálculo del progreso técnico.

En la revisión de la PTF para Colombia, el dato menos creíble, si se cree en los otros, es el de 1982, año en que la tasa de crecimiento de la economía fue del 0,95% y la del progreso técnico fue del -5,85%. ¿Cómo explicar que el progreso técnico cayó en un 5,85%? Y aún más, ¿cómo explicar que su contribución al crecimiento de la economía fue del -616,9% si se asume que el progreso técnico es siempre positivo?

Según estas consideraciones es necesario replantear el cálculo del progreso técnico tal y como se muestra en la ecuación [12]. Los datos de la columna 10 del cuadro 2 son más coherentes con el crecimiento de la economía que los calculados por el GRECO con base en el residuo de Solow tradicional.

Los datos obtenidos con la ecuación [12] (columna 10) muestran que excepto en 1950 todas las contribuciones al crecimiento de la economía son positivas y su magnitud no supera el 7,5%, excepto en 1995 y 1996. Si se toma como ejemplo el año 1959, la contribución al crecimiento es apenas del 6,69% mientras que según el GRECO la contribución es de más del 100%. Así mismo sucede en 1982, cuando la tasa de crecimiento fue del 0,95 y la contribución al crecimiento fue del 0,94%, mientras que según el GRECO fue del -616,9%. En general, los datos de progreso técnico resultantes de la función de producción tradicional interpretada con base en la ecuación de Harrod son mucho más consistentes. De nuevo, no es posible pensar que el crecimiento o descenso de la economía fue explicado en más del 100% o del -616,9% o del -254,7, etc., por el progreso técnico.

Los cálculos de la PTF para 15 países de la Unión Europea sugieren que su contribución al crecimiento fue del 54% en promedio para el periodo 1980-2004. El cuadro 3 muestra estos datos.

En 1981 la tasa de crecimiento de estos 15 países fue del 0,07% mientras que el progreso técnico o PTF creció el 0,33%; este valor corresponde a una contribución al crecimiento de las economías del 457,8%, mientras que el progreso técnico calculado con la ecuación de Harrod contribuye con el 0,07%. De nuevo no es posible que el cambio tecnológico haya jalonado el crecimiento de las economías europeas en más del 450% en un año.

De igual manera, el crecimiento de estas economías en 1993 fue negativo (-0,34%) mientras que el de la PTF fue positivo, de un 0,5%; su contribución al crecimiento superó el 100%. En cambio, los cálculos con la ecuación de Harrod dan una contribución al crecimiento de apenas el 0,34%.

Cuadro 3  
Cálculos del progreso técnico para 15 países de la Unión Europea

Año	gy	i/y	C	gaH	ptf	gaH/gy	ptf/gy
1980		15,81			0,47		
1981	0,07	15,02	211,78	0,00	0,33	0,07	457,85
1982	0,92	14,61	15,95	0,01	1,07	0,92	116,24
1983	1,80	14,24	8,07	0,03	1,27	1,76	70,61
1984	2,45	13,93	5,82	0,06	2,12	2,39	86,39
1985	2,49	14,13	5,81	0,06	1,11	2,43	44,72
1986	2,78	14,32	5,30	0,07	1,25	2,70	44,93
1987	2,81	14,85	5,44	0,08	1,07	2,73	37,96
1988	4,21	15,58	3,86	0,17	1,47	4,04	34,89
1989	3,53	16,24	4,76	0,12	1,17	3,41	33,22
1990	3,05	16,45	5,56	0,09	0,62	2,96	20,22
1991	1,84	16,01	8,86	0,03	1,05	1,81	57,02
1992	1,17	15,61	13,46	0,01	0,97	1,16	82,38
1993	-0,34	14,38	-41,85	0,00	0,50	-0,34	-145,68
1994	2,82	14,13	5,15	0,08	2,15	2,74	76,03
1995	2,44	14,12	5,92	0,06	1,26	2,38	51,60
1996	1,71	14,14	8,40	0,03	0,45	1,68	26,17
1997	2,55	14,21	5,71	0,06	0,94	2,49	37,00
1998	2,93	14,97	5,26	0,08	0,31	2,84	10,63
1999	2,90	15,33	5,45	0,08	1,05	2,81	36,40
2000	3,59	15,66	4,51	0,12	1,52	3,47	42,37
2001	1,74	15,48	9,05	0,03	-0,11	1,71	-6,51
2002	1,08	15,08	14,13	0,01	0,29	1,07	27,19
2003	0,86	14,90	17,37	0,01	0,21	0,86	24,68
2004	2,18	15,14	7,09	0,05	1,06	2,14	48,50

Los 15 países son Austria, Bélgica, Dinamarca, Finlandia, Francia, Alemania, Grecia, Irlanda, Italia, Luxemburgo, Holanda, Portugal, España, Suecia y Reino Unido.

Fuente: Timmer et al. (2003).

Los cuadros anteriores muestran que los cálculos tradicionales producen una contribución del progreso técnico de magnitud incomprensible, puesto que unos resultados del 100% o más no son consistentes con la realidad. ¿O es que en el período de análisis hubo algún cambio técnico que jalonó el crecimiento de la economía en más del 200%?, ¿en alguno de estos años, se introdujo una innovación que duplicó la producción y a pesar de ello la economía decreció? Es claro que estos datos nos invitan a pensar en la pertinencia del método de Solow para calcular el progreso técnico.

## CONCLUSIONES

Dadas las desproporcionadas magnitudes de la contribución del progreso técnico o PTF al crecimiento económico, es indispensable repensar la manera de calcular este residuo con el método que Solow utilizó en 1957. En Estados Unidos, Colombia y los 15 países de la Unión Europea el residuo de Solow explicaría en algunos años más del 100% o del 200% del crecimiento positivo o negativo de la economía.

Aquí se presenta una reinterpretación de la función de producción Cobb-Douglas y se obtiene el residuo o progreso técnico con base en la ecuación de Harrod. Esta manera de calcular el progreso técnico da resultados mucho más razonables y su contribución al crecimiento es moderada, a lo sumo del 7%. Así mismo, cuando se calcula la contribución promedio al crecimiento en un periodo largo, tiende a ser igual a la tasa promedio de crecimiento de la economía. En Estados Unidos, por ejemplo, el residuo calculado con la ecuación de Harrod contribuye al crecimiento en el 2,87% mientras que la tasa de crecimiento promedio de la economía fue del 2,99% en el periodo 1980-2004. En Colombia, la tasa de crecimiento promedio entre 1950 y 1996 fue del 4,56% y la contribución al crecimiento del progreso técnico fue del 5,1%; esto implica que su contribución al crecimiento fue del 95%.

Por último, se muestra que existe una magnitud del progreso técnico incomprensible, pues datos del 100% o más no son consistentes con la realidad. Los resultados con el nuevo método de cálculo invitan a reflexionar sobre la pertinencia del método de Solow para calcular el progreso técnico. El debate queda abierto.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Bernal, J. "La tasa de crecimiento garantizada de Harrod como ley del crecimiento: Una comprobación empírica", *Cuadernos de Economía* 49, 2008, pp. 57-88.
2. Crafts, N. "What creates multi-factor productivity?", presentado en la Conferencia The creation of economic and corporate wealth in a dynamic economy, Frankfurt, 2008.
3. Comisión Europea. "Growth accounting to 2005", 2005, [[http://ec.europa.eu/economy\\_finance/db\\_indicators/eu\\_klems/2005/index\\_en.htm](http://ec.europa.eu/economy_finance/db_indicators/eu_klems/2005/index_en.htm)].
4. Felipe, J. y J. S. L. McCombie. "To measure or not to measure TPF growth? A reply to Mahadevan", *Oxford Development Studies* 32, 2, 2004, pp. 321-327.

5. Fuentes, R., M. Larrain y K. Schmidt-Hebbel. "Fuentes del crecimiento y comportamiento de la productividad total de los factores en Chile", *Documentos de Trabajo del Banco Central de Chile* 287, 2004.
6. Gay, A. "Productividad total de los factores y producto potencial en Argentina 1900-2008", Universidad Nacional de Córdoba y UNICET, 2009.
7. GRECO. *El crecimiento económico colombiano en el siglo XX: aspectos globales*, Bogotá, Banco de la República, 2002.
8. Greenwood, J. y P. Krusell. "Growth accounting with investment-specific technological progress: A discussion of two approaches", *Journal of Monetary Economics* 54, 4, 2007, pp. 1300-1310.
9. Harrod, R. F. "An essay in dynamic theory", *The Economic Journal* 49, 193, 1939, pp. 14-33.
10. Heston, A., R. Summers y B. Aten. "Penn world table version 6.2", Center for International Comparisons of Production, Income, and Prices at the University of Pennsylvania, 2006, [<http://pwt.econ.upenn.edu>].
11. Hulten, C. "Growth accounting", *NBER Working Papers Series* 15341, 2009.
12. Kalecki, M. *Economía socialista y mixta*, México, Fondo de Cultura Económica, 1976.
13. Khan, A. "Accounting for cross-country differences in income per capita", *Business Review Q1*, 2009, pp. 11-18.
14. Maia, J. y P. Nicholson. "El stock de capital y la productividad total de los factores en Argentina", Dirección Nacional de Coordinación de Políticas Macroeconómicas, 2001.
15. Prescott, C. E. "Needed: A theory of total factor productivity", Federal Reserve Bank of Minneapolis, 1997.
16. Prescott, C. E. "Needed: A theory of total factor productivity", *International Economic Review* 39, 1998, pp. 529-549.
17. Solow, R. "Technical change and the aggregate production function", *The Review of Economics and Statistics* 39, 3, 1957, pp. 312-320.
18. Solow, R. "What have learned from a decade of empirical research on growth? Applying growth theory across countries", *The World Bank Economic Review* 15, 2, 2001.
19. Timmer, M., G. Ypma y B. van Ark. "It in European union: Driving productivity divergence?", *Research Memorandum* GD-67, 2003, [[http://www.ggdc.net/pub/online/gd67\(online\).pdf](http://www.ggdc.net/pub/online/gd67(online).pdf)].