EL MODELO DE SKAPERDAS Y SYROPOULOS

*Leonardo Raffo López**

Los orígenes de la teoría económica del conflicto y de la formación de Estados se atribuyen al brillante descubrimiento del "lado oscuro de la fuerza" por parte de Jack Hirshleifer, así como a algunos de sus trabajos pioneros en los que expuso las bases conceptuales y heurísticas de lo que sería su famoso modelo de emergencia de Estados a partir de una situación de anarquía[1]: un modelo que se convertiría en la referencia analítica fundamental en la materia. Sin embargo, un estudio detallado del modelo de Skaperdas y Syropoulos[2] revela que éste es el modelo canónico en la teoría económica del conflicto y de la formación de Estados, no sólo por sus enormes posibilidades analíticas sino porque es más general que el de Hirshleifer.

El objetivo de este artículo es demostrar la existencia de simetría entre los modelos de Skaperdas y Syropoulos, Hirshleifer, y Rosen, y probar que el primero de ellos es el esquema analítico más general. Para ello, se expone en forma minuciosa el modelo de equilibrio general de formación de Estados de Skaperdas y Syropoulos, y se muestran los efectos de estática comparativa que le son consustanciales,

* Magíster en Economía Aplicada, profesor de las universidades ICESI y del Valle. Miembro del Grupo de Conflicto, Aprendizaje y Teoría de Juegos y del Grupo de Crecimiento y Desarrollo Económico de la Universidad del Valle, Cali, Colombia, leoraff@yahoo.es Agradezco los valiosos comentarios de Boris Salazar, Pilar Castillo y demás miembros del Grupo de Conflicto. Así como los valiosos comentarios del árbitro anónimo de la *Revista de Economía Institucional*. Fecha de recepción: 16 de enero de 2007, fecha de modificación: 4 de mayo de 2007, fecha de aceptación: 13 de agosto de 2007.

[1] Ver Hirshleifer (1988, 1989, 1991a, 1991b, 1994 y 1995).

[2] Ver Skaperdas (1991, 1992a y 1992b) y Skaperdas y Syropoulos (1995 y 1997).

incluido el efecto de los cambios en la valoración relativa de los bienes útiles sobre la producción de armas y bienes, y sobre la probabilidad de éxito en la contienda. También se reinterpreta el equilibrio y se evalúan los alcances de este modelo frente a los de Hirshleifer (1995 y 2000) y Rosen (1986). La primera sección presenta los supuestos del modelo; la segunda, su desarrollo y análisis; la tercera analiza las simetrías con los otros modelos, especialmente con el de Hirshleifer, y muestra que éste último puede concebirse como un caso especial del modelo de Skaperdas y Syropoulos con bienes útiles sustitutos perfectos. Por último, se presentan las conclusiones.

SUPUESTOS

Skaperdas y Syropoulos suponen que la relación entre grupos ilegales y autoridades estatales es simbiótica, porque el Estado rara vez logra un control total del territorio. Por ello, se establecen arreglos tácitos sobre el control de ciertas zonas geográficas. Esos arreglos, resultado de interacciones constantes entre los actores sociales, consolidan en la praxis el funcionamiento de los Estados, a veces incluso al margen de las consignas constitucionales vigentes. Por tanto, puede tener gran valor explicativo concebir el proceso de formación y consolidación de los Estados como una secuencia de interacciones violentas de los grupos ilegales, entendidos como organismos de larga vida que ejercen actividades económicas primarias ilegales. El carácter estable y organizado de los grupos delictivos es vital para entender la emergencia de nuevos Estados a partir de una situación de anarquía. Una organización delictiva tiene reglas escritas y no escritas, normas de conducta y sanciones para quienes las incumplen. De ahí que el crimen organizado no se pueda considerar como una aberración o un fenómeno individual aleatorio, pues representa una transformación de la estructura legal existente y, quizá, del Estado y el sistema político (Skaperdas y Syropoulos, 1995, 61). La cohesión interna de los grupos ilegales y, en general, de los grupos políticos se puede entender como una condición necesaria para la emergencia y consolidación de los Estados. Esto no es nuevo en la literatura sobre formación de Estados: en su *Leviatán*, Hobbes aclara que para la consolidación de un Estado no es suficiente la superioridad numérica frente al enemigo; también es indispensable la cohesión mutua de los individuos.

> Y aunque haya una gran multitud, si sus acuerdos están dirigidos contra sus juicios y apetitos particulares, no se puede esperar de ello defensa ni protección contra un enemigo común ni contra las ofensas mutuas. Porque

discrepando las opiniones concernientes al mejor uso y aplicación de su fuerza, los individuos que componen esa multitud no se ayudan, sino que se obstaculizan mutuamente, y por esa oposición mutua reducen su fuerza a la nada (Hobbes, 1651, 138).

Este antecedente es clave para entender la trascendencia de la resolución ex ante de los problemas internos de acción colectiva en el surgimiento de un Estado.

En la investigación de Skaperdas y Syropoulos son fundamentales las siguientes preguntas: ¿qué agente tiene más probabilidad de prevalecer en una situación de anarquía e imponer sus reglas? ¿Qué garantiza la existencia de una determinada repartición del "botín" en conflictos e interacciones armadas? ¿Cómo inciden los parámetros tecnológicos, las preferencias y las dotaciones de recursos en los resultados?

La hipótesis que se prueba en el modelo estático de anarquía es que prevalecen los grupos que tienen ventajas comparativas en el uso de la fuerza y que son, por ello, menos productivos en actividades útiles. Además de los recursos gastados en la violencia, la redistribución del ingreso desalienta la innovación productiva y restringe el crecimiento económico (Skaperdas y Syropuolos, 1995, 63). El modelo, que se inspira en los trabajos de Hirshleifer (1988, 1991a y 1991b), supone dos tipos de agentes (1 y 2) que representan individuos o grupos ilegales que han resuelto su problema de acción colectiva. Cada agente está dotado de una cantidad fija de recursos R_i ($i = 1, 2$) que se puede asignar en dos tipos de actividades: actividades productivas que generan producción útil para el consumo –alimentos (B_i)–, que son expropiables, y actividades improductivas, que determinan la distribución de los primeros mediante la violencia –producción de armas (G_i)–. La restricción de recursos de cada uno es:

$$R_i = \beta_i B_i + \gamma_i G_i; \qquad i = 1, 2 \tag{1}$$

Se supone que el bien productivo de 1 es pan, B_1, y el de 2 es mantequilla, B_2; $1/\beta_i$ y $1/\gamma_i$ son los coeficientes de insumo de alimentos y armas de i respectivamente[3]. Los agentes tienen preferencias idénticas sobre la mantequilla y el pan, las cuales son homogéneas de grado 1 y homotéticas, y se representan mediante funciones de utilidad del tipo

[3] Las funciones de producción de ambos bienes son lineales en R_i para ambos agentes.

$U = U(B_1, B_2)$[4]. Dependiendo de sus ventajas comparativas en la producción y de la producción de armas prevista de sus contrincantes, los agentes convierten sus recursos en armas o bienes de consumo, estos últimos sujetos a la captura o al intercambio pacífico. Ambos agentes pueden usar sus armas en el conflicto –cuyo resultado es incierto– o comerciar sus bienes de consumo bajo la amenaza de conflicto (Skaperdas y Syropoulos, 1995, 65). Los autores se preguntan cuánto se produce de alimentos y cuánto de armas. Los resultados dependen de los parámetros de las preferencias y de la tecnología –de producción y del conflicto– y de las dotaciones de recursos[5]. Procediendo con los supuestos del modelo básico, las funciones de éxito en la contienda de cada agente son:

$$p \equiv p(G_1, G_2) \in (0, 1);\ p(G_1, G_2) = 1 - p(G_1, G_2),\ \forall (G_1, G_2) \in S_1 \times S_2$$
$$p_1 \equiv \partial p/\partial G_1 > 0,\ y\ p_2 \equiv \partial p/\partial G_2 < 0 \qquad (2)$$

donde $S_1 = [0, R_1]$ y $S_2 = [0, R_2]$ son los espacios de estrategias puras de 1 y 2 respectivamente (las posibles cantidades de armas producidas).

Definición 1

En general, las funciones de éxito se definen mediante funciones:

[4] Como se verá más adelante, la familia de índices de utilidad relevante en este caso es la función CES. Como es usual, las funciones de utilidad deben ser cóncavas en cada uno de sus argumentos. Cabe aclarar que en las versiones del modelo de Skaperdas (1991, 1992a y 1992b) y Skaperdas y Syropoulos (1997), éste no se desarrolla con funciones de utilidad; en cambio, se supone que los bienes se producen con tecnologías lineales –a través de (1)– y que las cantidades de bienes finales constituyen insumos –o bienes intermedios–, que no se consumen sino que se usan para producir un único bien final. Por tanto, en estas versiones las funciones de utilidad se sustituyen por funciones de producción, que cumplen el mismo papel y presentan las mismas propiedades que las funciones de utilidad. En este artículo se utiliza la versión con funciones de utilidad (Skaperdas y Syropoulos, 1995). Esto implica reescribir algunas de las proposiciones de Skaperdas (1991, 1992a y 1992b) y Skaperdas y Syropoulos (1997) en términos de funciones de utilidad.

[5] Con preferencias estrictamente convexas no existen soluciones de esquina en el consumo de bienes, y el equilibrio competitivo implica la existencia de comercio. En este sentido, el hecho de que cada agente controla su propia "economía", es decir, su propio proceso productivo, amplía el horizonte explicativo del modelo, de modo que se puede interpretar como una variante del modelo ricardiano de comercio internacional en condiciones de conflicto político entre los dos socios comerciales en potencia, en el que cada país se especializa en la producción de uno de los dos bienes útiles.

$$p^i(G) \equiv p^i(G_i, G_{-i}): \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i \to [0, 1]$$

donde $i, -i \in N = \{1, 2, \ldots, n\}$, y

$$G = \left\{(G_1, G_2, \ldots, G_n) \in \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i : \underset{i=1}{\overset{n}{\times}} S_i \subseteq \Re^n_{+0}\right\}$$

Estas funciones deben cumplir las siguientes condiciones formales[6]:

(C1) $\Sigma_{i\in N} p^i(G) = 1, \forall i \in N$ [condición logit][7]

(C2) $\forall i \in N, \dfrac{\partial(p^i(G))}{\partial G_i} > 0$ y $\forall i \neq i, \dfrac{\partial(p^i(G))}{\partial G_i} < 0$ [condición de fuerzas relativas opuestas]

(C3) Para cualquier permutación ρ de N,

$p_{\rho(i)}(G) = p(G_{\rho(1)}, G_{\rho(2)}, \ldots, G_{\rho(N)}), \forall i \in N$ [condición de anonimato]

En esta definición $n = 2$ para el caso de dos jugadores. Suponiendo que el ganador recibe toda la producción de ambos bienes de consumo, y haciendo $U(0,0) = 0$, los problemas de los agentes en el caso de conflicto son, respectivamente:

$$\max \pi^1 \equiv p(G_1, G_2)\, U(B_1, B_2) \tag{3a}$$
$$\max \pi^2 \equiv [1 - p(G_1, G_2)]\, U(B_1, B_2) \tag{3b}$$

Aquí es crucial entender que los argumentos de la función de utilidad esperada (von Neumann-Morgenstern) de cada agente son los niveles de producción total de ambos bienes, puesto que la decisión relevante es determinar cuántas armas se deben producir en caso de guerra inminente, de manera que se apropie la mayor porción del "botín" disponible (dadas las dotaciones de recursos)[8].

[6] Ver Salazar (2005) y Skaperdas (1996).

[7] Ver Hirshleifer (2000).

[8] La homogeneidad lineal de $U = U(B_1, B_2)$ implica que $pU(B_1, B_2) = U(pB_1, pB_2)$, donde p es la probabilidad de éxito en la contienda. Los argumentos de U son las cantidades totales de B_1 y B_2, de modo que los niveles de consumo esperado de los bienes 1 y 2 son $E(B_1) = pB_1 = c_1$, y $E(B_2) = pB_2 = c_2$, respectivamente. Con estas definiciones, se tiene entonces que $E[U(B_1, B_2)] = pU(B_1, B_2) = U(E(B_1), E(B_2)) = U(c_1, c_2)$.

DESARROLLO DEL MODELO

EQUILIBRIO: EXISTENCIA, UNICIDAD Y ESTABILIDAD

Despejando B_1 y B_2 de (1) y sustituyendo en (3) se pueden maximizar π^1 y π^2 en función de G_1 y G_2, respectivamente, para valores constantes de la producción de armas de los contrincantes. En el equilibrio de Nash se obtienen las siguientes expresiones. Para 1:

$$\partial\pi^1 (G_1^*, G_2^*)/\partial G_1 \equiv \pi_1^{1*} = p_1^* U^* - p^* U_1^* \bullet \gamma_1/\beta_1 \leq 0 \tag{4}$$

donde p^*_1 es el impacto marginal sobre la probabilidad de ganar con un cambio infinitesimal en la producción de armas en el equilibrio de Nash, y $-U^*_1$ es la variación de la utilidad marginal derivada de un cambio infinitesimal en la producción de armas en el equilibrio de Nash. Este resultado indica que, en el equilibrio, el beneficio marginal de un incremento de las armas producidas en unidades de utilidad, $p^*_1U^*$ –*ceteris paribus*–, debe ser igual a su costo marginal en términos de la pérdida de utilidad derivada de la producción de pan sacrificada, $p^*U^*_1 \cdot \gamma_1/\beta_1$. Con una interpretación similar, para el agente 2 se tiene:

$$\partial\pi^2 (G_1^*, G_2^*)/\partial G_2 \equiv \pi_2^{2*} = -p_2^* U^* - (1 - p^*) U_2^* \bullet \gamma_2/\beta_2 \leq 0 \text{ [9]} \tag{5}$$

El siguiente teorema, desarrollado por Skaperdas y Syropoulos (1997), garantiza la existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras.

Teorema 1 (existencia)

La existencia del equilibrio de Nash en estrategias puras se garantiza por el cumplimiento de las dos condiciones siguientes:

(C4) $\forall(G_1, G_2), p(G_1, G_2) \in (0,1)$,
$\forall(G_1, G_2), p(G_1, G_2) = 1 - p(G_1, G_2)$[10] [condición de anonimato]

(C5) $p_{11} \cdot p \leq p_1^{\,2}$ (y equivalentemente para el agente 2 dada (C1) $-p_{22} \cdot (1 - p) \geq p_2^{\,2}$)

[9] Condiciones de Kuhn-Tucker; así que la condición de primer orden se debería escribir incluyendo las restricciones de las variables de elección, $G_1 \geq 0$, $G_2 \geq 0$ (restricciones de no negatividad) y las condiciones de holgura complementaria, en este caso $\pi^{1*}_1 \bullet G_1 = 0$ y $\pi^{2*}_2 \bullet G_2 = 0$.

[10] Esta parte corresponde a la condición de anonimato (C3) cuando n = 2.

Formalmente,

$$(C4) \wedge (C5) \Rightarrow (\exists (G^*_1, G^*_2) \in S_1 \times S_2)((\forall G_i \in S_i)(\pi^i(G^*_i, G^*_{-i}) \geq \pi^i(G_i, G^*_{-i}))); i, -i = 1, 2$$

Prueba

Las funciones de pago son continuas porque $p(\cdot,\cdot)$ y $U(\cdot,\cdot)$ son también continuas y diferenciables. El objetivo es mostrar que la función de pagos de cada jugador es cuasicóncava en sus propias estrategias. Entonces se sabe (teorema 1 de Dasgupta y Maskin, 1986) que existe un equilibrio en estrategias puras. De hecho, una condición suficiente para la existencia del equilibrio es verificar la concavidad de las funciones de ganancias de los agentes[11]. Aunque se debe advertir que la existencia se satisface para cualquier función p que sea cóncava en su primer argumento y para otras que no son demasiado convexas (Skaperdas, 1991, 117). Por otra parte, la unicidad del equilibrio se garantiza cuando las funciones de éxito en la contienda tienen la forma aditiva $p(G_1, G_2) = f(G_i)/(f(G_1) + f(G_2))$; $i = 1, 2$.

Teorema 2 (unicidad y estabilidad)[12]

Supongamos que se cumplen (C4-C5) (lo que implica la existencia del equilibrio). Entonces, si existe al menos un equilibrio de estrategias puras en el interior del espacio de estrategias $S_1 \times S_2$, ese equilibrio es único y localmente estable si se cumple la siguiente condición:

(C6) $p(G_1, G_2) = f(G_i)/(f(G_1) + f(G_2))$ [condición de función f aditiva]

donde f es una función no negativa creciente.

Formalmente,

$$(C4) \wedge (C5) \wedge (C6) \Rightarrow (E!(G^*_1, G^*_2) \in S_1 \times S_2)((\forall G_i \in S_i)(\pi^i(G^*_i, G^*_{-i}) \geq \pi^i(G_i, G^*_{-i}))); i, -i = 1, 2$$

[11] Se obvia esta prueba por limitaciones de espacio.
[12] Ver la prueba en Skaperdas y Syropoulos (1997).

Teorema 3 (Skaperdas, 1992a y 1992b)

Una condición suficiente para la unicidad del equilibrio es que además de (C4)-(C5) se cumpla:

(C6') $p_{12}p(1-p) + (2p-1)p_1p_2 = 0$

Prueba

Se puede probar que (C6) $\Rightarrow$ (C6'). La condición (C7) es útil en las pruebas analíticas de estática comparativa del modelo que se presenta a continuación:

(C7) $f''(G_i)f(G_i)/f'(G_i)^2 = c, \forall i \in N, \forall G_i \in S_i$

donde c es una constante menor o igual que 1.

ESTÁTICA COMPARATIVA

Las ecuaciones (4) y (5) muestran que entre más grande sea la utilidad marginal del pan, menor es la eficiencia en la producción de armas, y entre más grande sea la eficiencia en la producción de pan, mayor es el costo de oportunidad de producir armas. Se confirma la hipótesis de que el agente que menos contribuye a la producción y al bienestar total pero es más eficiente en la producción de armas, tiene mayor probabilidad de ganar. Porque *ceteris paribus* G^*_j es de esperarse que entre más pequeño sea γ_i/β_i (el costo de oportunidad de producir armas en términos de alimentos) mayor es el nivel de producción de armas de equilibrio de i y, en consecuencia, mayor su probabilidad de ganar, o lo que es lo mismo, mayor su participación en la utilidad total[13]. Con la función de utilidad CES se pueden expresar los resultados de estática comparativa:

$$U(B_1, B_2) = \left[\alpha B_1^{(\sigma-1)/\sigma} + (1-\alpha)B_2^{(\sigma-1)/\sigma}\right]^{\sigma/\sigma-1} \tag{6}$$

[13] Esto se percibe de inmediato para 1 si (4) se escribe como $\gamma_1/\beta_1 = p^*_1U^*/p^*U^*_1$. Puesto que una disminución en el lado izquierdo de esta igualdad implica una disminución en el lado derecho, lo que con los supuestos del análisis tiende a ser consistente con un incremento de G_1, ya que en tal caso U^* disminuye, la utilidad marginal aumenta (al consumirse una menor cantidad total de alimentos), la probabilidad de ganar aumenta y la derivada de la probabilidad de ganar disminuye si esta última función es estrictamente cóncava.

donde α mide la valoración relativa de los bienes y $\sigma \geq 0$, la elasticidad de sustitución en el consumo. En lo que sigue, interesa analizar los efectos de modificaciones en β_i, γ_i, R_i y α. Como hay simetría entre los dos grupos armados, basta hacer el examen para las modificaciones en los parámetros de 1.

Consideremos primero lo que sucede cuando se presentan disminuciones en β_1: esto significa que una mayor eficiencia en la producción de pan aumenta el costo de oportunidad de producir armas y, por tanto, tiende a disminuir la cantidad de armas que produce el jugador 1, siempre que la elasticidad de sustitución en el consumo sea mayor que 1. El papel de la elasticidad de sustitución es esencial. Una disminución de β_1 tiene dos efectos. El primero es similar al de un incremento de R_1, que aumenta la capacidad productiva de armas y bienes útiles. De hecho, una disminución de β_1 incrementa la cantidad producida de B_1 por lo que aumenta la utilidad total disponible. Este se puede considerar como un efecto renta (o un efecto dotación) y permite liberar recursos para la producción adicional de armas y bienes, además aumenta el beneficio marginal de la producción de armas. El segundo está relacionado con la reducción de la utilidad marginal derivada del mayor consumo de bienes útiles, que representa un contrapeso al incremento del costo de oportunidad de producir armas[14]. Este se puede entender como un efecto sustitución, porque cuanto más alta sea la elasticidad de sustitución en el consumo, menos disminuirá la utilidad marginal de B_1 ante incrementos del consumo de ese bien, o lo que es lo mismo, porque reducciones muy pequeñas de la utilidad marginal de B_1 están relacionadas con incrementos relativamente grandes de la cantidad consumida. El efecto neto depende, entonces, de qué tan fuerte sea el efecto renta frente al efecto sustitución. Si este último es relativamente bajo (elasticidad de sustitución menor que 1), la cantidad de armas de equilibrio de 1 se incrementa y, en consecuencia, la de 2 disminuye. Porque en ese caso los incrementos inducidos en la cantidad producida de B_1 provocan bajas tan fuertes en la utilidad marginal de ese bien como para que la cantidad producida de bienes no crezca tanto y, al mismo tiempo, la cantidad producida de armas crezca. En cambio, si el efecto sustitución es relativamente alto (elasticidad de sustitución mayor que 1), la cantidad de armas de equilibrio de 1 se reduce y la de 2 se incrementa. Porque en ese caso

[14] Es importante tener presente la condición de primer orden, tal como viene dada por (4) pero como una igualdad, ya que se obvia la posibilidad de que existan soluciones de esquina: $\partial\pi^1(G^*_1, G^*_2)/\partial G_1 \equiv \pi^{1*}_1 = p^*_1 U^* - p^* U^*_1 \cdot \gamma_1/\beta_1 = 0$.

el incremento inducido en B_1 provoca bajas tan leves de la utilidad marginal de ese bien que impiden que crezca la cantidad de armas (y más bien hacen que disminuya) en equilibrio[15]. En el caso especial en el que la elasticidad de sustitución es unitaria –el caso de función de utilidad Cobb-Douglas– los dos efectos se cancelan, de modo que las modificaciones en β_1 son inocuas.

Proposición 1 (Skaperdas y Syropoulos, 1997)

Supongamos las condiciones (C4)-(C6). Entonces un incremento de la productividad del bien útil que produce el jugador 1 –una disminución de β_1– reduce (aumenta) la cantidad de armas de equilibrio de ese jugador y aumenta (disminuye) la cantidad de armas de equilibrio del jugador 2 si $\sigma > 1$ $(\sigma < 1)$. En el caso en que $\sigma = 1$, las modificaciones en $1/\beta_1$ no tienen ningún efecto sobre las cantidades de armas producidas.

Prueba

Diferenciando totalmente (4) y (5) se tiene:

$$\pi^1_{11} dG^*_1 + \pi^1_{12} dG^*_2 + \pi^1_{1\beta_1} d\beta_1 + \pi^1_{1\gamma_1} d\gamma_1 + \pi^1_{1R_1} dR_1 + \pi^1_{1\alpha} d\alpha = 0 \tag{7}$$

$$\pi^2_{12} dG^*_1 + \pi^2_{22} dG^*_2 + \pi^2_{2\beta_1} d\beta_1 + \pi^2_{2\gamma_1} d\gamma_1 + \pi^1_{2R_1} dR_1 + \pi^2_{2\alpha} d\alpha = 0 \tag{8}$$

En matrices y pasando lo exógeno al lado derecho, se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \pi^1_{11} & \pi^1_{12} \\ \pi^2_{12} & \pi^2_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dG^*_1 \\ dG^*_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\pi^1_{1\beta_1} d\beta_1 - \pi^1_{1\gamma_1} d\gamma_1 - \pi^1_{1R_1} dR_1 - \pi^1_{1\alpha} d\alpha \\ -\pi^2_{2\beta_1} d\beta_1 - \pi^2_{2\gamma_1} d\gamma_1 - \pi^1_{2R_1} dR_1 - \pi^2_{2\alpha} d\alpha \end{bmatrix} \tag{9}$$ [16]

Como es usual, por el teorema de la función implícita, se debe probar que el determinante jacobiano del sistema es distinto de cero para verificar la existencia de funciones implícitas alrededor del punto de equilibrio y, así, garantizar la estática comparativa. El determinante jacobiano es $|J| = \pi^1_{11} \cdot \pi^2_{22} - \pi^1_{12} \cdot \pi^2_{12}$, el cual es mayor que 0. Por la regla de Cramer, suponiendo que $d\gamma_1 = dR_1 = d\alpha = 0$ y que $d\beta_1 > 0$, se obtiene:

$$\partial G^*_1/\partial\beta_1 = (\pi^1_{12} \bullet \pi^2_{2\beta_1} - \pi^2_{22} \bullet \pi^1_{1\beta_1})/|J| \tag{10}$$

$$\partial G^*_2/\partial\beta_1 = (\pi^2_{12} \bullet \pi^1_{1\beta_1} - \pi^1_{11} \bullet \pi^1_{2\beta_1})/|J| \tag{11}$$

[15] Ver la condición de primer orden.
[16] Cabe advertir que $\pi^2_{12} = \pi^2_{21}$.

Por otra parte:

$$\pi_{11}^{1} = \pi^{1}\psi_{1}\left(\frac{\gamma_{1}}{\beta_{1}B_{1}}\right)^{2}\frac{\sigma\xi_{1} + \psi_{2} + \sigma\psi_{1}}{\sigma},\ \pi_{12}^{1} = \frac{\pi^{1}\psi_{1}\ \psi_{2}\ \gamma_{1}\ \gamma_{2}}{\sigma B_{1}B_{2}\beta_{1}\beta_{2}} \quad (12)$$

$$\pi_{22}^{2} = -\pi^{2}\psi_{2}\left(\frac{\gamma_{2}}{\beta_{2}B_{2}}\right)^{2}\frac{\sigma\xi_{2} + \psi_{1} + \sigma\psi_{2}}{\sigma},\ \pi_{12}^{2} = \frac{\pi^{2}\psi_{1}\ \psi_{2}\ \gamma_{1}\ \gamma_{2}}{\sigma B_{1}B_{2}\beta_{1}\beta_{2}}$$

donde, ψ_1 y ψ_2 son las participaciones de B_1 y B_2 en el gasto total, respectivamente[17], $\xi_1 = (\beta_1 B_1/\gamma_1)(p_1/p - p_{11}/p_1)$, y $\xi_2 = (\beta_2 B_2/\gamma_2)(-p_2/(1-p) - p_{22}/p_1)$. Además,

$$\pi_{1\beta_1}^{1} = \frac{\pi^{1}\psi_{1}\ \psi_{2}\ \gamma_{1}}{\sigma B_{1}\beta_{1}^{2}}(\sigma - 1) \text{ y } \pi_{2\beta_1}^{1} = \frac{\pi^{2}\psi_{1}\ \psi_{2}\ \gamma_{2}}{\sigma B_{2}\beta_{1}\beta_{2}}(\sigma - 1) \quad (13)$$

De (12) y (13), en (10) y (11) se obtienen:

$$\partial G_{1}^{*}/\partial\beta_{1} = \left[\frac{\pi^{1}\pi^{2}\psi_{1}\psi_{2}^{3}\gamma_{1}\gamma_{2}^{2}(1 + r_{2})}{|j|\beta_{1}^{2}B_{1}(\beta_{2}B_{2})^{2}\sigma p}\right](\sigma-1) \text{ y} \quad (14)$$

$$\partial G_{2}^{*}/\partial\beta_{1} = \left[\frac{\pi^{1}\pi^{2}\psi_{1}^{3}\psi_{2}\gamma_{1}^{2}\gamma_{2}(1 + r_{1})}{|j|\beta_{1}^{3}B_{1}^{2}(\beta_{2}B_{2})\sigma(1-p)}\right](1-\sigma) \quad (15)$$

donde $r_i = 1 - (f''(G_i)f(G_i)/f'(G_i)^2)$. Con (C2) se puede probar que $1 + r_i \geq 0$ y que los términos entre corchetes son positivos, de modo que:

$$\partial G_{1}^{*}/\partial\beta_{1} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma \gtreqless 1 \text{ y } \partial G_{2}^{*}/\partial\beta_{1} \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma \gtreqless 1$$

Se deduce que un incremento en la productividad del bien útil que produce 1 (una disminución de β_1) reduce su probabilidad de ganar en el conflicto si $\sigma > 1$. La derivada total de la función de éxito en la contienda en equilibrio con respecto a β_1 es:

$$\frac{dp^{*}}{d\beta_{1}} = p_{1}^{*}\frac{\partial G_{1}^{*}}{\partial\beta_{1}} + p_{2}^{*}\frac{\partial G_{2}^{*}}{\partial\beta_{1}}$$

[17] Como este modelo no analiza los resultados de mercado sino la distribución de la utilidad total en presencia de conflicto, y no se definen los niveles de renta de los dos agentes en términos monetarios, las participaciones del gasto se pueden definir como $\psi_1 = B_1U_1/U$ y $\psi_2 = B_2U_2/U$. Hay que tener en cuenta que en el caso Cobb-Douglas ψ_1 y ψ_2 corresponden a los parámetros de valoración relativa de los bienes, α y $1-\alpha$. Sin embargo, esto no se tiene que cumplir para otras funciones de utilidad CES con elasticidad de sustitución distinta de 1. En general, para la CES se tiene $\psi_1 = \alpha B_1^{\rho}/(\alpha B_1^{\rho} + (1-\alpha)B_2^{\rho})$, y $\psi_2 = (1-\alpha)B_2^{\rho}/(\alpha B_1^{\rho} + (1-\alpha)B_2^{\rho})$.

que claramente es positiva cuando $\sigma > 1$, ya que p^*_2 siempre es menor que 0 y en este caso $\partial G^*_1/\partial\beta_1 > 0$ y $\partial G^*_2/\partial\beta_1 < 0$.

Ahora bien, según los supuestos, una reducción de γ_1 siempre incrementa la cantidad de armas de equilibrio del agente 1 para valores suficientemente altos de la elasticidad de sustitución, σ, aun para valores menores que 1 no muy pequeños. En ese caso disminuye el costo unitario de producir armas para 1 y, por tanto, su costo de oportunidad en unidades de utilidad ($p^*U^*_1(\gamma_1/\beta_1)$). El efecto total también se puede descomponer en dos: un efecto dotación similar a un incremento de R_1 que tiende a elevar la cantidad consumida de armas y de bienes útiles, y un efecto (que altera la tasa marginal de transformación) análogo al de un incremento de β_1 que tiende a elevar la cantidad de armas de equilibrio si $\sigma > 1$. La confluencia de estos dos efectos explica por qué para valores de σ menores que 1 y muy pequeños, una disminución de γ_1 puede reducir la cantidad de armas de equilibrio de 1; en tal caso, el segundo efecto es negativo, puesto que $\sigma < 1$, y como σ es muy pequeña –y en consecuencia cercana a 0– es mayor que el efecto dotación, de modo que el efecto neto sobre la cantidad producida de armas es negativo. No obstante, como valores menores que 1 y muy pequeños de σ son poco probables en equilibrio general, se espera que disminuciones (incrementos) de γ_1 lleven a incrementos (disminuciones) de la cantidad de armas producida por 1. La siguiente proposición formaliza este resultado.

Proposición 2 (Skaperdas y Syropoulos, 1997)

Supongamos las condiciones (C4)-(C6). Si la productividad de la producción de armas de 1 crece (disminuye), es decir, si γ_1 disminuye (crece), la cantidad de armas de equilibrio de 1 crece (disminuye) y la cantidad de armas de 2 disminuye (crece) cuando $\sigma > s$, para algún $s \in (0, 1)$.

Prueba

A partir del sistema matricial dado por (9), por la regla de Cramer, suponiendo que $d\beta_1 = dR_1 = d\alpha = 0$ y que $d\gamma_1 > 0$, se obtienen:

$$\partial G^*_1/\partial\gamma_1 = (\pi^1_{12} \cdot \pi^2_{2\gamma_1} - \pi^2_{22} \cdot \pi^1_{1\gamma_1})/|J| \quad (16)$$

$$\partial G^*_2/\partial\gamma_1 = (\pi^2_{12} \cdot \pi^1_{1\gamma_1} - \pi^1_{11} \cdot \pi^1_{2\gamma_1})/|J| \quad (17)$$

Teniendo en cuenta que:

$$\pi^1_{1\gamma_1} = -\frac{\pi^1\psi_1}{\beta_1{}^2B_1{}^2\sigma}\left[\beta_1B_1\sigma + \gamma_1G_1(\psi_1\sigma + \psi_2\right] \text{ y } \pi^2_{2\gamma_1} = -\frac{\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_2G_1}{\beta_1B_1\beta_1B_2\sigma}(\sigma - 1) \tag{18}$$

sustituyendo en (16) y (17) con (12) se llega a:

$$\partial G_1^* / \partial\gamma_1 = -\left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_2{}^2}{|j|(\beta_1\beta_2B_1B_2)^2\sigma\cdot p}\right]\left\{\begin{matrix}\gamma_1G_1\left[\psi_1\psi_2(\sigma-1)p + (\psi_2+\psi_1\sigma)(\psi_1p+\psi_2\sigma(1+r_2))\right] \\ +\beta_1B_1\sigma\left[\psi_1p+\psi_2\sigma(1+r_2)\right]\end{matrix}\right\} \tag{19}$$

$$\partial G_2^* / \partial\gamma_1 = -\left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1{}^2\psi_2\gamma_1\gamma_2}{|j|(\beta_1{}^3B_1{}^2(\beta_2B_2)\sigma(1-p)}\right]\left\{\gamma_1G_1\left[(1-p)+(\sigma-1)\psi_1(1-r_1)\right]+\beta_1B_1(1-p)\right\} \tag{20}$$

Como

$$\left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_2{}^2}{|j|(\beta_1\beta_2B_1B_2)^2\sigma\cdot p}\right] \text{ y } [(\psi_2+\psi_1\sigma)(\psi_1p+\psi_2\sigma(1+r_2))] + \beta_1B_1\sigma[(\psi_1p+\psi_2\sigma(1+r_2)]$$

son siempre expresiones positivas, es claro que $\partial G^*_1/\partial\gamma_1 < 0$ si $\sigma > 1$, y que $\partial G^*_1/\partial\gamma_1$ sólo puede llegar a ser positivo para σ muy pequeños. Es decir, $\partial G^*_1/\partial\gamma_1 < 0$ cuando $\sigma > s$, para algún $s \in (0,1)$.

Así mismo, como

$$\left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1{}^2\psi_2\gamma_1\gamma_2}{|j|(\beta_1{}^3B_1{}^2(\beta_2B_2)\sigma(1-p)}\right]$$

y $\beta_1B_1(1-p)$ son siempre positivos, $\partial G^*_2/\partial\gamma_1 > 0$ cuando $\sigma > 1$, y puede llegar a ser negativo únicamente para σ muy pequeños. Entonces, $\partial G^*_2/\partial\gamma_1 > 0$ cuando $\sigma > s$, para algún $s \in (0,1)$[18].

Para un σ no muy pequeño, un incremento de la productividad marginal en la producción de armas (un disminución de γ) tiende a incrementar la probabilidad de que 1 tenga éxito en la contienda. La derivada total de la probabilidad de que 1 gane con respecto a γ es negativa,

$$\frac{dp^*}{d\gamma_1} = p_1^*\frac{\partial G_1^*}{\partial\gamma_1} + p_2^*\frac{\partial G_2^*}{\partial\gamma_1}$$

[18] Si $\sigma \to 0$, $\partial G^*_1/\partial\gamma_1 = -\infty$.

ya que $p^*_2 < 0$ y cuando $\sigma > s$ para algún $s \in (0,1)$ $\partial G^*_1/\partial\gamma_1 < 0$ y $\partial G^*_2/\partial\gamma_1 > 0$, por la proposición anterior.

Por otra parte, un incremento de la dotación de recursos de 1 aumenta la cantidad de armas que produce en equilibrio, porque dicho incremento tiende a elevar su beneficio marginal de producir armas en unidades de utilidad y reduce su costo de oportunidad, pues incrementa la producción útil y reduce su utilidad marginal de B_1, debido a que ésta es decreciente. Así 1 produce mayor cantidad de armas, tal que su producción de bienes útiles y de armas aumenta. En cambio, ese mismo hecho induce a 2 a producir menor cantidad de armas para valores de σ suficientemente bajos porque, a pesar de que el incremento de R_1 también eleva su beneficio marginal, cuanto más pequeña (grande) sea la elasticidad de sustitución, más grande (pequeña) es la complementariedad entre los dos bienes de consumo, de modo que mayor (menor) es el costo de oportunidad en términos del producto sacrificado –en tanto que U^*_2 asciende–, y por ello 2 tiende a producir menos (más) armas. En principio, la cantidad que produce de B^*_2 no tiene por qué alterarse.

Proposición 3 (Skaperdas y Syropoulos, 1997)

Supongamos (C4)-(C6). Un incremento (descenso) de la dotación de recursos de 1 siempre aumenta (disminuye) su producción de armas, mientras que la cantidad de armas que produce 2 disminuye (aumenta) para valores no muy grandes de la elasticidad de sustitución en el consumo.

Prueba

A partir del sistema matricial de (2,10), utilizando la regla de Cramer y suponiendo que $d\beta_1 = d\gamma_1 = d\alpha = 0$ y que $dR_1 > 0$, se obtienen:

$$\partial G^*_1/\partial R_1 = (\pi^1_{12} \cdot \pi^2_{2R_1} - \pi^2_{22} \cdot \pi^1_{1R_1}) / |J| \quad (21)$$

$$\partial G^*_2/\partial R_1 = (\pi^2_{12} \cdot \pi^1_{1R_1} - \pi^1_{11} \cdot \pi^1_{2R_1}) / |J| \quad (22)$$

Luego de algunas operaciones algebraicas se tiene que:

$$\pi^1_{1R_1} = \frac{\pi^1 \psi_1 \gamma_1}{(\beta_1 B_1)^2 \sigma}(\psi_1 \sigma + \psi_2) > 0 \text{ y que } \pi^2_{2R_1} = \frac{\pi^2 \psi_1 \psi_2 \gamma_2}{\beta_1 B_1 \beta_2 B_2 \sigma}(\sigma - 1) \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma \gtreqless 1 \quad (23)$$

Sustituyendo (23) en (21) y (22) se llega a:

$$\partial G_1^*/\partial R_1 = \left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_1\gamma_2^{\,2}}{|j|(\beta_1\beta_2B_1B_2)^2\sigma}\right]\left[\xi_2(\psi_2+\sigma\psi_1)+(1-\psi_1\psi_2+\sigma\psi_1\psi_2)\right] \tag{24}$$

$$\partial G_2^*/\partial R_1 = \left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_1^{\,2}\gamma_2}{|j|(\beta_1B_1)^3(\beta_2B_2)\sigma}\right]\left[\xi_1\psi_1(\sigma-1)+\psi_1(\psi_2+\sigma\psi_1)\right] \tag{25}$$

Por (C5), ξ_1 y ξ_2 son positivos y $\partial G^*_1/\partial R_1 > 0$ tal que:

$$\partial G_2^*/\partial R_1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma \gtreqless (\xi_1-\psi_2)/(\psi_1+\xi_1)$$ [19]

Así, la probabilidad de éxito de 1 aumenta cuando aumenta su dotación de recursos para valores suficientemente bajos de σ, esto es, cuando $\sigma < (\xi_1 - \psi_2)/(\psi_1 + \xi_1)$, lo que implica que $\sigma < 1$. En este caso, la derivada total de la probabilidad de que 1 tenga éxito en la contienda es:

$$\frac{dp^*}{dR_1} = p_1^*\frac{\partial G_1^*}{\partial R_1} + p_2^*\frac{\partial G_2^*}{\partial R_1}$$

que para valores negativos de $\partial G^*_2/\partial R_1$ es siempre positiva. Pero si σ es relativamente alta ($\sigma > (\xi_1-\psi_2)/(\psi_1+\xi_1)$), de modo que $\partial G^*_2/\partial R_1 > 0$, puede no serlo. En el caso de bienes sustitutos perfectos, por ejemplo, la probabilidad de éxito de 1 no se modifica cuando se incrementa su dotación de recursos. Esto se debe a que la utilidad marginal de B_1 y la de B_2 son constantes, de modo que aunque la cantidad de armas que produce 1 crece debido al incremento de su beneficio marginal, no compensa el incremento de la que produce su rival; que produce más armas porque su beneficio marginal también crece, mientras que su costo de oportunidad se mantiene constante porque $(1-p^*)U^*_2(\gamma_2/\beta_{21})$ es constante e igual a $(1-p^*)(1-\alpha)(\gamma_2/\beta_{21})$[20]. Si bien la cantidad de armas de 1 crece, no crece tanto como en otros casos, porque su costo de oportunidad de producir armas ($p^*U^*_1(\gamma_1/\beta_1)$) no disminuye cuando se incrementa R_1 sino que es constante e igual a $p^*\alpha(\gamma_1/\beta_1)$.

[19] En Skaperdas y Syropoulos (1997) aparece, por error, una expresión análoga a $\partial G^*_2/\partial R_1 \gtreqless 0 \Leftrightarrow \sigma \gtreqless (\psi_2-\xi_1)/(\psi_1+\xi_1)$ y no la que figura arriba.

[20] En ambos casos, el incremento de R_1 aumenta el beneficio marginal de producir armas porque se incrementa la producción de bienes útiles y su utilidad total.

A pesar de lo anterior, se puede probar que si además de (C4)-(C6) se cumple (C7), la probabilidad de que 1 tenga éxito es siempre estrictamente creciente en su propia dotación.

Por último, se puede probar que un incremento de α disminuye la cantidad de armas que produce 1 y aumenta la cantidad de armas que produce 2, de modo que disminuye la probabilidad de que 1 gane en equilibrio para cualquier valor de σ. Éste es el efecto de mayores niveles de utilidad marginal referido al comienzo de esta sección, ya que una mayor valoración relativa de B_1 implica *ceteris paribus* una mayor utilidad marginal de este bien para cualquier nivel de consumo, lo que induce a producir menos armas en equilibrio porque se incrementa el costo de oportunidad de producirlas. Así mismo, una menor valoración relativa de B_2 implica *ceteris paribus* una menor utilidad marginal de este bien, lo que induce a que 2 produzca más armas en equilibrio porque el costo de oportunidad de producirlas disminuye. Esto es indiscutible puesto que a pesar de la modificación de α la utilidad total se mantiene inalterada, porque la función CES es lineal homogénea. La siguiente proposición y su prueba formalizan este último resultado que no se expone formalmente en ninguno de los artículos publicados por Skaperdas y Syropoulos.

Proposición 4 (cambios en la valoración relativa de los bienes útiles)

Supongamos una función de utilidad lineal homogénea como la CES. Para cualquier valor de σ, un incremento (descenso) de la valoración relativa del bien útil que produce un jugador siempre lleva a un descenso (incremento) de su producción de armas, mientras que la cantidad de armas que produce su rival se incrementa (disminuye).

Prueba

Consideremos el sistema matricial de (9). Utilizando la regla de Cramer y suponiendo que $d\beta_1 = d\gamma_1 = dR_1 = 0$ y que $d\alpha > 0$, se obtienen:

$$\partial G_1^* / \partial\alpha = (\pi_{12}^1 \cdot \pi_{2\alpha}^2 - \pi_{22}^2 \cdot \pi_{1\alpha}^1) / |J| \tag{26}$$

$$\partial G_2^* / \partial\alpha = (\pi_{12}^2 \cdot \pi_{1\alpha}^1 - \pi_{11}^1 \cdot \pi_{2\alpha}^1) / |J| \tag{27}$$

Luego de varias operaciones algebraicas, utilizando la función de utilidad dada por (6) en las condiciones de primer orden y derivándolas con respecto a α, se llega a:

$$\pi^1_{1\alpha} = -\frac{\pi^1\psi_1\psi_2\gamma_1}{\alpha(1-\alpha)B_1\beta_1} \text{ y } \pi^1_{2\alpha_1} = \frac{\pi^2\psi_1\psi_2\gamma_2}{\alpha(1-\alpha)B_2\beta_2} \qquad (28)$$

Sustituyendo estos resultados y (12) en (26) y (27) se llega a:

$$\partial G_1^*/\partial\alpha = -\left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1\psi_2{}^2\gamma_1\gamma_2{}^2}{\alpha(1-\alpha)|j|\beta_1\beta_2{}^2B_1B_2{}^2}\right](\xi_2+\psi_2) < 0 \qquad (29)$$

$$\partial G_2^*/\partial\alpha = \left[\frac{\pi^1\pi^2\psi_1{}^2\psi_2\gamma_1{}^2\gamma_2}{\alpha(1-\alpha)|j|\beta_1{}^2\beta_2B_1{}^2B_2}\right](\xi_1+\psi_1) > 0 \qquad (30)$$

Se deduce que un incremento en la valoración relativa de α disminuye la probabilidad de éxito de 1. La derivada total de p con respecto a α es:

$$\frac{dp^*}{d\alpha} = p_1^* \frac{\partial G_1^*}{\partial\alpha} + p_2^* \frac{\partial G_2^*}{\partial\alpha}$$

que sin lugar a dudas es negativa, ya que $\frac{\partial G_1^*}{\partial\alpha} < 0, \frac{\partial G_2^*}{\partial\alpha} > 0, p_1^* > 0$ y $p_2^* < 0$.

REINTERPRETACIÓN DEL EQUILIBRIO Y ALCANCES DEL MODELO BÁSICO

Este modelo propone un caso especial[21], con $p(G_1, G_2) = f(G_i)/(f(G_1) + f(G_2))$, en el que luego de algunas operaciones algebraicas las condiciones de primer orden se pueden expresar así:

$$\eta_i(G^*_i)f(G^*_j)/(f(G^*_1) + f(G^*_2)) \leq \varepsilon_i(G^*_1, G^*_2);\ i, j = 1, 2 \qquad (31)$$

donde $\eta_i(G_i)$ es la elasticidad de f con respecto a la producción de armas de i; $\eta_i(G_i) = f'(G_i)(G_i/f(G_i))$, un indicador del impacto del esfuerzo bélico sobre la probabilidad de ganar y del tipo de economías de escala de la macrotecnología del conflicto, en función de G_i. $\varepsilon_i(G_1, G_2)$ es la elasticidad de los costos imputados (en unidades de utilidad) de la producción de armas[22]. Esta presentación general de las condiciones

[21] Se trata de un caso muy general en el que la elasticidad puede no ser constante.

[22] Más exactamente, $\varepsilon_i(G_1, G_2) = U_i \cdot (\gamma_i/\beta_i)G_i/U$, donde $U_i \cdot (\gamma_i/\beta_i)$ es el costo de producir una unidad adicional de armas en unidades de utilidad. Esta elasticidad es la inversa de la elasticidad de escala imputada (en unidades de utilidad) de la producción de armas de i, y depende de G_1 y G_2, ya que U y U_i también dependen de G_1 y G_2.

de primer orden se inspira en el modelo de incentivos en torneos de Rosen (1986). La utilización de estas elasticidades en su modelo es lo que permite obtener una condición paramétrica compacta para la existencia y caracterización de un equilibrio en estrategias puras. Pero la importancia de su trabajo no sólo radica en que se trata de un modelo dinámico de conflicto –de hecho, es quizá el primer modelo dinámico de conflicto, incluso anterior al de Hirshleifer (1988)–, sino en que ambas elasticidades, $\eta_i(G_i)$ y $\varepsilon_i(G_1, G_2)$, son los parámetros clave para hallar los perfiles de equilibrio de cualquier modelo de conflicto en equilibrio general (dinámico o estático), en términos del beneficio marginal de la producción de armas y de su costo de oportunidad con respecto a otros bienes. La primera elasticidad es el famoso parámetro m al que se refiere Hirshleifer (2000, 776), un parámetro de firmeza (*decisiveness*) que muestra el grado en que un mayor esfuerzo contribuye al éxito de la batalla. Si las funciones de impacto del esfuerzo en la contienda, f, tienen elasticidad constante con respecto a G^*_i las condiciones son:

$$m f(G^*_j)/(f(G^*_1) + f(G^*_2)) \leq \varepsilon_i(G^*_1, G^*_2);\ i, j = 1, 2 \qquad (32)$$

donde m es el parámetro de las funciones de éxito en la contienda, en el caso de *la forma de razón*[23]. En las confrontaciones militares, un m bajo corresponde a combates donde la defensa es prioritaria. En el frente occidental de la Primera Guerra Mundial, el atrincheramiento y las ametralladoras dieron lugar a un bajo parámetro de firmeza m. Durante el período 1914-1918, incluso ataques con una gran superioridad de fuerzas, escasamente hicieron retroceder las líneas del frente enemigo con un altísimo costo en hombres y material. Pero durante la Segunda Guerra Mundial, la aviación, los tanques y la infantería mecanizada permitieron concentrar el poder bélico ofensivo más rápidamente que el defensivo, lo que acentuó el efecto de la superioridad de fuerzas (Hirshleifer, 1995, 32) y configuró una macroteconología del conflicto con un m alto. Pero, ¿qué valores de m son bajos o altos? Hirshleifer (1995 y 2000) precisa que en el caso de funciones de éxito con la *forma de razón* existen rendimientos marginales decrecientes en G_i (*ceteris paribus*), si $m \leq 1$. En ese mismo caso, si $m > 1$ hay un rango inicial de rendimientos marginales decrecientes en G_i (*ceteris paribus*)

[23] Las funciones de éxito en la forma de razón son funciones aditivas del tipo $p(G_1, G_2) = p(G_1/G_2) = ((b_1G_1)^m/(b_1G_1)^m + (b_2G_2)^m)$, donde $b_i \geq 0$; $i = 1, 2$, es un parámetro que muestra la efectividad concreta del gasto en armas de i.

y luego un punto de inflexión en $p = (m-1)/2m$, o lo que es lo mismo, en $G_i = ((m-1)(b_jG_j)^m/(1+m))^{1/m}$, a partir del cual hay rendimientos marginales crecientes. De modo que en este caso un m relativamente alto (o bajo) es aquel mayor que 1 (o menor o igual que 1).

En general, el parámetro m[24] –es decir, la elasticidad $\eta_i(G_i)$– no es exclusivo de uno o varios jugadores, sino que es correlativo a todo el sistema. Esto asegura que $\forall i \in N, \forall G_i = \overline{G}, \eta_i(G_i) = \eta\,\overline{G}$, donde $\overline{G}$ es un nivel idéntico para todos los jugadores que puede corresponder al perfil de equilibrio de Nash (G^*_1, G^*_1) y, en el caso de elasticidad constante, que por razones obvias es muy recurrente en la literatura[25], $\forall i \in N, \eta_i(G_i) = m$. Cuando el equilibrio de Nash es simétrico, de modo que $\forall i \in N$, $\forall G_i = G^*$, $\eta_i(G_i) = \eta(G^*)$ y $p = 1 - p = 0{,}5$, la ecuación (32) queda así:

$$\eta_i(G^*_1) \leq 2\varepsilon_i(G^*_1, G^*_2);\ i = 1, 2 \tag{33}$$

Este resultado muestra que siempre que se obtenga un equilibrio simétrico, la elasticidad de firmeza, $\eta_i(G_i)$ (correspondiente a m), es el doble de la elasticidad de los costos imputados (en unidades de utilidad) de la producción de armas, $\varepsilon_i(G_1, G_2)$. La ecuación (33) corresponde a la condición de no falla en el modelo dinámico de incentivos en torneos de Rosen (1986) –en el caso de rivales con iguales niveles de talento–, que garantiza que los competidores tengan incentivos suficientes para seguir en los torneos al terminar una ronda. De hecho, en ese modelo no existe equilibrio simétrico en estrategias puras si no se cumple la condición (33), pero en desigualdad estricta. De ser así, los jugadores tendrían incentivos para retirarse y, en consecuencia, no existiría un máximo global.

En este sentido existe una simetría entre el modelo de Rosen y el de Skaperdas y Syropoulos, que confirma que los dos análisis corresponden a la misma familia de modelos, o a la misma sucesión de modelos para usar los términos de Koopmans. Propongo entonces una hipótesis metodológica: es posible pensar que la teoría económica está constituida por varias sucesiones de modelos, como expresiones heurísticas de los desarrollos teóricos de los diferentes programas de investigación. Estas sucesiones de modelos son ramificaciones de una sucesión fundamental a la que hace referencia el propio Koopmans:

[24] También se podría suponer que hay asimetrías en m, pero no es frecuente hacerlo. Por ejemplo, Hirshleifer (1995) considera esta posibilidad.

[25] Es análogo al caso CES en el análisis tradicional de la tecnología de producción.

los modelos básicos de elección racional y de posibilidades de producción, y los que resultan de su conjugación en el análisis de equilibrio general[26]. Los modelos de Skaperdas y Syropoulos, Hirshleifer, Rosen, y Dixit serían una de estas sucesiones[27].

Ahora bien, si se define $\phi_1(G_1,G_2)=p_1G_1/p$ como la elasticidad de la probabilidad de que 1 tenga éxito en la contienda con respecto a su producción de armas (y $\phi_2(G_1,G_2)=p_2G_2/(1-p)$) como la de 2), entonces, como $p_1G_1/p=\eta(G_1)(1-p)$ en el caso de 1 (y $-p_2G_2/(1-p))=\eta(G_2)p$ en el caso de 2), la ecuación de equilibrio de Nash (31) también se puede escribir así:

$$\phi_i(G_1,G_2) \leq \varepsilon_i(G_1,G_2),\ i = 1, 2 \qquad (31')$$

donde la solución del juego estático del modelo básico de conflicto y formación de Estados exige, para todos los agentes, que la elasticidad de la probabilidad de ganar en la contienda con respecto a la producción de armas sea menor o igual que la elasticidad de costos imputados (en la producción de armas), dadas las mejores respuestas de sus contrincantes. Naturalmente, en el caso de soluciones interiores, la desigualdad se convierte en una igualdad. Ahora bien, lo importante es que se trata de una forma general –más general que la de Rosen (1986)[28]– porque no tiene que ser un equilibrio simétrico y, además, no se limita al caso de funciones con elasticidad de firmeza constante, como el modelo de Hirshleifer (1995 y 2000). Por esto, se puede considerar que el modelo de Skaperdas y Syropoulos es el más general de la teoría económica del conflicto y de la formación de Estados. Para sustentar esta hipótesis hay que responder las siguientes preguntas: ¿pertenece el modelo de Hirshleifer a la misma familia de modelos?, ¿si existiera simetría entre éste y el de Skaperdas y Syropoulos, cuál sería más general?, ¿qué valores de m garantizan la existencia, estabilidad y unicidad del equilibrio en el último?, y ¿cuál es la relación, si existe, entre las condiciones de existencia, unicidad y estabilidad del

[26] Según el famoso ensayo sobre la construcción del conocimiento económico de Koopmans, los primeros modelos de esta sucesión fundamental son el de elección bajo certidumbre, el elección bajo riesgo de von Neumann-Morgenstern, el de elección bajo incertidumbre de Leonard Savage, el modelo básico de posibilidades de producción, el modelo de análisis de actividades y el modelo básico de equilibrio general competitivo.

[27] Dixit (1987) presenta una versión de equilibrio parcial del modelo de Skaperdas y Syropoulos.

[28] Ver la ecuación (33).

equilibrio en el modelo básico de Skaperdas y Syropoulos y las del modelo básico de Hirshleifer (1995 y 2000)?

Para responder la primera pregunta es necesario precisar los conceptos, pues para Hirshleifer el objeto de disputa en la guerra es la cantidad total de recursos, mientras que para Skaperdas y Syropoulos las cantidades de cada grupo están dadas y son inalienables; lo que es expropiable en este caso es la utilidad derivada de la cantidad total de bienes consumidos o el volumen de producción de bienes finales. Por otra parte, en el modelo de Hirshleifer el proceso distributivo es de naturaleza dinámica, lo que no es del todo evidente, pues las variables no incluyen ningún subíndice temporal, en especial la ecuación de partición de recursos, que debería ser $R_{it+1} = p_{it}R_t$[29]; pero Hirshleifer obvia los subíndices temporales, lo cual hace pensar que su modelo está incompleto. Las precisiones anteriores garantizan la existencia del equilibrio distributivo en el reparto de los recursos totales: la condición de estabilidad dinámica ($m < 1$) y la existencia de una tasa de éxito de equilibrio (de estado estacionario), $(p_1/p_2) = (f_1/f_2)^{m/(1-m)}$ (Hirshleifer, 1995, 33)[30]. Obviar este componente dinámico implicaría aceptar que la condición de estacionariedad de la ecuación de reparto de recursos sobra, si el modelo fuera realmente estático[31]. Además, Hirshleifer propone otra condición cuya relevancia se manifiesta en un contexto dinámico: la condición de viabilidad, que establece que los ingresos o productos finales obtenidos por cada competidor, Y_i, deben ser al menos iguales a un mínimo, y_i, esto es, $Y_i \geq y_i$. El cumplimiento de esta condición implica que los competidores pueden obtener un ingreso mínimo que garantiza la supervivencia y la integridad institucional de los grupos. Con estas dos condiciones se configura un algoritmo de solución en el que no sólo cuenta la optimización –la elección del balance óptimo entre esfuerzo productivo y esfuerzo destructivo de

[29] En la notación de Hirshleifer, p_i no es la primera derivada de la función de éxito en la contienda de i con respecto a su producción de armas, sino la función de éxito en la contienda de i. Es decir, en Hirshleifer, $p(G_1, G_2) = p_1$, y $1 - p(G_1, G_2) = p_2$. En lo que sigue, cada vez que me refiera a Hirshleifer, manejaré su propia notación de la función de éxito en la contienda, excepto que se indique lo contrario.

[30] Aquí, $f_i = G_i/R_i$, $i = 1, 2$. Ver las ecuaciones (7b) y (8) de Hirshleifer (1995), y las ecuaciones de (7)-(9) de Hirshleifer (2000).

[31] Por eso propongo que esta condición y los subíndices temporales implícitos en la ecuación de partición de recursos se pueden obviar para que los modelos sean "isomórficos", al menos en un escenario estático. Un modelo verdaderamente dinámico sí podría considerar esta condición y dar un carácter intertemporal a la ecuación de reparto de recursos, bien sea en tiempo discreto –como se propone arriba– o en tiempo continuo, dependiendo de cómo se defina el tiempo.

cada agente–, como en el modelo de Skaperdas y Syropoulos, sino también el dominio público de la probabilidad de éxito de estado estacionario por parte de los agentes, que de acuerdo con la tasa de éxito de equilibrio corresponde a $p_i = f_i^m/(f_1^m + f_2^m)$, además del cumplimiento de la condición de viabilidad.

Pero, ¿por qué estas condiciones no cumplen ningún papel en el modelo de Skaperdas y Syropoulos? En primer lugar, en todos sus trabajos sobre el modelo básico siempre se hace énfasis en su carácter estático y por ello no se puede aplicar una ecuación como $R_{it+1} = p_{it}R_t$. Por eso mismo, la condición de viabilidad es innecesaria, porque en un juego de una sola etapa no importa si uno de los jugadores no sobrevive, acabando con la anarquía imperante. En segundo lugar, como la utilidad derivada del consumo de bienes finales es el objeto del reparto, la condición de distribución se especifica implícitamente con la definición de una función de utilidad esperada linealmente homogénea, $E(U) = U(B_1, B_2)$, la cual implica que $U(pB_1, pB_2) = pU(B_1, B_2)$. Utilizando la restricción de recursos, se tiene:

$$U(p(R_1/\beta_1 - \gamma_1/\beta_1 \cdot G_1), p(R_2/\beta_2 - \gamma_2/\beta_2 \cdot G_2)) = pU((R_1/\beta_1 - \gamma_1/\beta_1 \cdot G_1), (R_2/\beta_2 - \gamma_2/\beta_2 \cdot G_2))$$

Así, si se empleara una versión normalizada de la restricción de recursos, como se hace en el modelo de Hirshleifer, definiendo:

$$1 = \beta_i e_i + \gamma_i f_i;\ i = 1, 2^{32} \tag{1'}$$

en vez de:

$$R_i = \beta_i B_i + \gamma_i G_i;\ i = 1, 2 \tag{1}$$

se tendría:

$$U(pR_1(1/\beta_1 - \gamma_1/\beta_1 \cdot f_1), pR_2(1/\beta_2 - \gamma_2/\beta_2 \cdot f_2)) = pU(R_1(1/\beta_1 - \gamma_1/\beta_1 \cdot f_1), R_2(1/\beta_2 - \gamma_2/\beta_2 \cdot f_2))$$
$$\Leftrightarrow U(pR_1e_1, pR_2e_2) = pU(R_1e_1, R_2e_2))$$

Pero aquí no cabe ninguna ecuación de partición de recursos, porque en Skaperdas y Syropoulos las dotaciones de recursos de cada agente están dadas y son inalienables. A esto se suma una complicación adi-

[32] La única diferencia con la notación de Hirshleifer (1995 y 2000) es que en vez de definir $e_i = B_i/R$ y $f_i = G_i/R_i$, él define $e_i = E_i/R$ y $f_i = F_i/R_i$, y en vez de escribir los costos unitarios como β_i y γ_i, los denota como a_i y b_i, respectivamente.

cional para buscar una simetría entre los dos modelos: las funciones de producción definidas en el modelo de Hirshleifer para cada uno de los agentes, que corresponderían a las funciones de utilidad del modelo de Skaperdas y Syropoulos, tienen como único argumento al recurso utilizado por cada grupo para producir bienes finales, $e_i p_i R = e_i R_i$, y, además, no son linealmente homogéneas como las funciones del primer modelo si su parámetro h (de productividad) está entre 0 y 1, o si es mayor que 1[33]. En estas circunstancias, y considerando estas funciones de producción como funciones de utilidad, se tendría $U(e_i p_i R) < p_i U(e_i R)$ o $U(e_i p_i R) > p_i U(e_i R)$, respectivamente, pero no $U(e_i p_i R) = p_i U(e_i R)$. Entonces, para comparar los dos modelos se debe usar el modelo de Hirshleifer para el caso en que $h = 1$, el caso de homogeneidad lineal (análogo al del modelo de Skaperdas y Syropoulos), aunque con un sólo bien de consumo. El único tipo de función de utilidad (en principio, en función de un único bien) que satisface este requisito (en el modelo de Hirshleifer) sería del tipo $E(U) = U(p_i B_i) = B_i = e_i p_i R$, de modo que se cumpla que:

$$U(e_i p_i R) = p_i U(e_i R) \Leftrightarrow E(U) = e_i pR$$

Así mismo, se debe obviar el carácter dinámico del modelo de Hirshleifer, y, en consecuencia, las condiciones de tasa de éxito de estado estacionario y de viabilidad. La ecuación de reparto de recursos sería $R_i = p_i R$, sin considerar ningún subíndice temporal. No obstante, ¿qué tan astringente es esta consideración para el modelo de Hirshleifer? Eso no me parece problemático sino aclaratorio, pues en un escenario estático estas condiciones se deben obviar. Por último, para poder comparar los dos modelos conviene concentrarse (para ambos) en el caso simétrico en el que los coeficientes de *input* de los dos grupos son iguales $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, y $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, las dotaciones de recursos son iguales $R_1 = R_2 = R/2$ (esto únicamente para el modelo de Skaperdas y Syropoulos, ya que en el de Hirshleifer éstas se determinan endógenamente y resultan idénticas para ambos), y también los parámetros de valoración relativa de los bienes consumidos, de modo que $\alpha = 1 - \alpha = 0{,}5$. En el equilibrio de Nash se tiene que $e_1 = e_2 = e$ y que $f_1 = f_2 = f$ en ambos modelos.

Estas consideraciones permiten presentar el modelo de Hirshleifer en forma simétrica al de Skaperdas y Syropoulos, y se puede afirmar

33 Me refiero a la ecuación (4) de Hirshleifer (1995) o a la ecuación (6) de Hirshleifer (2000), $Y_i = E^h_i = (e_i R_i)^h$; $h > 0$; $i = 1, 2$.

que ambos pertenecen a la misma familia o sucesión de modelos. Así, el primer modelo se puede concebir como un caso particular del segundo, en el que el consumidor representativo es indiferente frente a consumir el bien final que produce por su propia cuenta o el que produce el grupo competidor. Los agentes (en conflicto) se apropian primero de una parte de los recursos y luego producen, de modo que no son propensos al intercambio y, por ello, en principio no es posible, al menos sin consideraciones adicionales, extender el análisis para considerar el comercio entre los dos agentes, como se hace en Raffo (2006)[34]. En el modelo de Skaperdas y Syropoulos, los agentes primero producen cierta cantidad de armas o bienes mediante su tecnología y sus dotaciones de recursos y luego comercian o se apropian de una porción de la cantidad total de bienes producidos (o de la utilidad total). Esto facilita el desarrollo del análisis del comercio y, por ende, de una teoría económica del conflicto[35], por cuanto se sigue, en realidad, el esquema básico de cualquier modelo de teoría pura del comercio internacional: los recursos son inmóviles y por ello inalienables, mientras que los bienes finales son móviles, y por ello transables, y en este caso expropiables. Pero, como predice el teorema de igualación de precios de los factores, no es necesario que los recursos (factores) sean móviles para que sus precios se puedan igualar, porque es como si se transaran contenidos en los bienes finales[36]. En este caso no es necesario que los recursos sean expropiados directamente, porque cuando se expropian los bienes es como si se expropiaran los recursos indirectamente.

Esto proporciona otros elementos para pensar que los dos esquemas analíticos hacen parte de la misma familia o sucesión de modelos. En efecto, se puede mostrar que hay un caso especial del modelo de Skaperdas y Syropoulos en el que los resultados de ambos modelos son totalmente coincidentes: el caso en que se suponen preferencias de bienes sustitutos perfectos. Consideremos la CES genérica en el caso de grupos simétricos:

$$U(B_1, B_2) = [0{,}5B_1^{(\sigma-1)/\sigma} + 0{,}5B_2^{(\sigma-1)/\sigma}]^{\sigma/\sigma-1} \qquad (6')$$

[34] Además, en el modelo de Hirshleifer sólo se emplean funciones de éxito en la contienda con elasticidad de firmeza constante (en la forma de razón).

[35] Ver Raffo (2006).

[36] Según Samuelson (1948): "no interesa si la montaña no va a Mahoma siempre y cuando Mahoma pueda ir a la montaña".

que, si se supone que σ tiende a infinito, se reduce a:

$$U(B_1, B_2) = B_1 + B_2 \tag{6”}$$

Precisamente la función de utilidad del modelo de Hirshleifer con las consideraciones mencionadas, de modo que $E(U) = p_i B_i = p_i e_i R = p_i R_i$, $i = 1, 2$. Para probarlo, observemos que en el modelo de Skaperdas y Syropoulos (con la notación en términos intensivos) (6”) es $U(B_1, B_2) = eR_1 + eR_2$.

Puesto que en ambos modelos los recursos totales son $R = R_1 + R_2$, la expresión anterior queda $U(B_1, B_2) = eR_1 + e(R - R_1) = eR$; lo que implica que la función de utilidad esperada es equivalente a la del modelo de Hirshleifer en equilibrio: $E(U) = p_i e_i R = e_i R_i$[37].

Cabe reiterar que en el modelo de Skaperdas y Syropoulos no se aplica la condición de estabilidad dinámica, $m < 1$, de modo que no hay una relación directa entre la condición de estabilidad del modelo de Hirshleifer y las condiciones de existencia, unicidad y estabilidad de aquél. Sin embargo, la condición suficiente de existencia del teorema 1 sí restringe los posibles valores que puede tomar el parámetro m o, en general, la elasticidad de firmeza $\eta_i(G^*_i)$, que se puede concebir como la primera proposición de la teoría económica del conflicto, pues retoma elementos analíticos de la existencia del equilibrio para la familia de modelos examinada.

Lema 1

Si se trabaja con funciones de éxito en la contienda en la forma de razón, la constante c de (C7) corresponde a $(\eta_i(G^*_i) - 1)/\eta_i(G^*_i)$, es decir, $f''(G_i)f(G_i)/f'(G_i)^2 = (m-1)/m$, $\forall_i \in N$, $\forall G_i \in S_i$.

Prueba

Calculando las derivadas respectivas a partir de $f(G_i) = (b_i G_i)^m$.

[37] Como se trata del caso de equilibrio simétrico, $R_1 = R_2 = R/2$, se puede ver que $U(B_1, B_2) = eR/2 + eR/2 = eR$.

Proposición 5

Si se trabaja con funciones de éxito en la forma de razón, una condición suficiente para la existencia del equilibrio de Nash es que la elasticidad de firmeza $\eta_i(G^*_i)$ sea constante e igual para las funciones de éxito en la contienda de los dos agentes, y que satisfaga:

$$m \geq -\frac{1}{p}\frac{\partial\varepsilon_1(G_1^*,G_2^*)}{\partial G_1}\cdot\frac{G_1^*}{\varepsilon_1(G_1^*,G_2^*)} \text{ y que } m \geq -\frac{1}{(1-p)}\frac{\partial\varepsilon_2(G_1^*,G_2^*)}{\partial G_2}\cdot\frac{G_2^*}{\varepsilon_2(G_1^*,G_2^*)} \qquad (34)$$

Prueba

La constancia e igualdad de m para los dos agentes se deduce de (C7) teniendo en cuenta el lema 1. Por otra parte, con un poco de álgebra se puede probar, utilizando las condiciones de primer orden tal como se expresan en (32), que las funciones de pagos de 1 y 2 son cóncavas si y sólo si:

$$m \geq -\frac{1}{p}\frac{\partial\varepsilon_1(G_1^*,G_2^*)}{\partial G_1}\cdot\frac{G_1^*}{\varepsilon_1(G_1^*,G_2^*)} \text{ y } m \geq -\frac{1}{(1-p)}\frac{\partial\varepsilon_2(G_1^*,G_2^*)}{\partial G_2}\cdot\frac{G_2^*}{\varepsilon_2(G_1^*,G_2^*)}$$

En consecuencia, como la concavidad de las funciones de pagos de los agentes es suficiente para la existencia del equilibrio –según el teorema 1–, se infiere que las dos desigualdades anteriores (para m constante) son condiciones suficientes para la existencia del equilibrio.

Las expresiones $\partial\varepsilon_1/\partial G_1 \cdot G^*_1/\varepsilon_1$ y $\partial\varepsilon_2/\partial G_2 \cdot G^*_2/\varepsilon_2$ de las desigualdades de (34) corresponden a las elasticidades de las elasticidades de los costos imputados de 1 y 2 con respecto a G^*_1 y G^*_2. Por tanto, las dos desigualdades de la última ecuación no son triviales: implican que una condición suficiente para la concavidad de la función de pago de i es que $m > 0$ y que la elasticidad de sus costos imputados (de producción de armas en unidades de utilidad), $\varepsilon_i(G_1,G_2) = U_i \cdot (\gamma_i/\beta_i)G_i/U$, crezca o sea constante a medida que su producción de armas se incrementa. Esto exige que los costos marginales imputados de producir armas sean crecientes o constantes y que los costos totales imputados de producir armas sean cuasiconvexos. Pero si se cumple (34), la concavidad de la función de pagos de i también se puede satisfacer cuando la elasticidad de sus costos imputados decrece con la cantidad de armas. No obstante, lo normal es que la elasticidad de costos imputados de un agente crezca cuando aumenta la cantidad de armas que produce, debido a la existencia de una utilidad cuasicóncava o cóncava. Como $\varepsilon_i(G_1,G_2) = (U_i \cdot (\gamma_i/\beta_i)G_i)/U$, un incremento en G_i hace crecer $\varepsilon_i(G_1,G_2)$ si la utilidad es cóncava, ya que *ceteris paribus* disminuye la cantidad producida de B_i y por ello U_i aumenta y U se reduce. De modo que una condición suficiente para la existencia del equilibrio es que la elasticidad de firmeza sea positiva y que las funciones de utilidad sean cuasicóncavas.

Corolario 1

Una condición suficiente para la existencia del equilibrio es que $m > 0$ y que $\varepsilon_i(G_1, G_2)$ sea creciente en la cantidad de armas producida por i.

Por último, como el modelo de Hirshleifer es un caso particular del modelo de Skaperdas y Syropoulos, los teoremas 1 y 2 también garantizan la existencia, la unicidad y la estabilidad del equilibrio del primer modelo. Hirshleifer (1995, 35) confirma que para él también era claro que la estabilidad del equilibrio y, en consecuencia, su existencia se satisfacen cuando las funciones de reacción de los dos competidores son cóncavas en una vecindad del equilibrio.

CONCLUSIÓN

El análisis de las condiciones de equilibrio de los modelos de Skaperdas y Syropoulos, Hirshleifer, y Rosen revela simetrías que permiten considerarlos como miembros de una misma familia o de una misma sucesión de modelos –si se acoge la hipótesis de Koopmans de considerar a la teoría económica como una sucesión de modelos, *mutatis mutandis*. Sin embargo, en un análisis estático, el modelo de Skaperdas y Syropoulos es la estructura analítica más general, por lo que se puede considerar –al menos hasta ahora– como el modelo canónico de la teoría económica del conflicto y de la formación de Estados, a partir del cual se pueden desarrollar nuevas extensiones de la teoría, intentando alcanzar un mayor nivel de realismo a medida que se avanza en la investigación.

Debido a lo anterior, es conveniente expresar las condiciones de primer orden del modelo y las condiciones suficientes para la existencia de equilibrio (condiciones de segundo orden) en términos de las elasticidades fundamentales: la elasticidad de firmeza y la elasticidad de los costos imputados de la producción de armas. De hecho, la utilización de estas elasticidades permite inferir que, para que exista equilibrio en el modelo, es suficiente que la elasticidad de firmeza (el parámetro m) sea positiva y constante, y que las funciones de utilidad de los agentes sean cuasicóncavas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. Collier, P. "Economic Causes of Civil Conflict and their Implications for Policy", *The World Bank Working Paper*, 2000.
2. Dasgupta, P. y E. Maskin. "The Existence of Equilibrium in Discontinuos Games, I: Theory", *The Review of Economic Studies* 53, 1, 1986, pp. 1-26.
3. Dixit, A. "Strategic Behavior in Contests", *The American Economic Review* 77, 5, 1987, pp. 891-898.
4. Doyle, M. y N. Sambanis. "Internartional Peace Building: A Theoretical and Quantitative Analysis", *American Political Science Review* 94, 4, 2000.
5. Grossman, H. I. "Choosing Between Peace and War", *NBER Working Paper* 10180, 2003.
6. Grossman, H. I. "Peace and War in Territorial Disputes", Brown University, mimeo, 2004.
7. Haaparanta, P. y K. Kuisma. "Trade, War, and Peace", Helsinski School of Economics, mimeo, 2004.
8. Hirshleifer, J. "The Analitics of Continuing Conflict", *Synthese* 76, 1988, pp. 201-233.
9. Hirshleifer, J. "Conflict and Rent-seeking Success Functions: Ratio vs. Difference Models of Relative Succes", *Public Choice* 63, 1989, pp. 101-112.
10. Hirshleifer, J. "The Paradox of Power", *Economics and Politics* 3, 1991a, pp. 177-200.
11. Hirshleifer, J. "The Technology of Conflict as an Ecnomic Activity", *American Economic Review* 81, 2, 1991b, pp. 130-134.
12. Hirshleifer, J. "The Dark Side of the Force. Western Economic Association International, 1993 Presidential Adress", *Economic Inquiry* 32, 1994, pp. 1-10.
13. Hirshleifer, J. "Anarchy and it's Breakdown", *The Journal of Political Economy* 103, 1, 1995, pp. 26-52.
14. Hirshleifer, J. "The Macrotechnology of Conflict", *Journal of Conflict Resolution* 44, 6, 2000, pp. 773-792.
15. Hobbes, T. *Leviathan*, Baltimore, Penguin Classics, 1651.
16. Koopmans, T. C. "La construcción del conocimiento económico", *Tres ensayos sobre el estado de la ciencia económica*, Barcelona, Antoni Bosch, 1980.
17. Kreps, D. *Notes on the Theory of Choice*, caps. 4 y 9, Boulder, Westview Press, 1988.
18. Luce, D. y H. Raiffa. *Games and Decisions*, New York, John Willey & Sons, 1958.
19. Martin, P.; T. Mayer y M. Thoenig. "Make Trade Not War?", University of Paris 1 Pantheon-Sorbonne, Univerity of Paris-Sud, University of Geneva, PSE y CEPR, mimeo, 2006.
20. Raffo, L. "¿Cuánto en bienes y cuánto en armas? Un tratado de libre comercio entre dos socios enemigos", Universidad del Valle, mimeo, 2006.

21. Rosen, S. "Prizes and Incentives in Elimination Tournaments", *American Economic Review* 76, 4, 1986.
22. Salazar, B. "Funciones de éxito en el conflicto", Universidad del Valle, mimeo, 2005.
23. Samuelson, P. A. "International Trade and the Equalisation of Factor Prices", *Economic Journal* 58, 1948, pp. 161-84.
24. Skaperdas, S. "Conflict and Attitudes Toward Risk", *American Economic Review* 81, 2, 1991.
25. Skaperdas, S. "Cooperation, and Power in the Absence of Porperty Rights", *American Economic Review* 82, 4, 1992a.
26. Skaperdas, S. "Coalition Formation in Contests", University of California, mimeo, 1992b.
27. Skaperdas, S. "Contest Succes Functions", *Economic Theory* 7, 1996, pp. 283-290.
28. Skaperdas, S. "Guns Butter and Openess: On the Relationship Between Security and Trade", *American Economic Review* 91, 2, 2001.
29. Skaperdas, S. y C. Syropoulos. "Gangs as Primitive States", G. Fiorentini y S. Peltzman, eds., *The Economics of Organized Crime*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995.
30. Skaperdas, S. y C. Syropoulos. "The Distribution of Income in the Presence of Appropriative Activities", *Economica* 64, 1997, pp. 101-117.
31. Tilly, C. *Coercion, Capital, and European States: AD 990-1992*, Cambridge, Blackwell, 1990.
32. Von Neumann, J. y O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton, Princeton University Press, 1944.