

Construcción de portafolios en fondos de inversión considerando momentos estadísticos superiores

Construction of Portfolios Considering Higher Moments for Investment Funds

Genjis A. Ossa González*

* Economista, Universidad Popular del Cesar, Aguachica (Colombia). Grupo de investigación ECONFI, Líder del semillero de investigación SEMOFI. [gossa@unicesar.edu.co]; [ORCID ID: 0000-0002-8194-0859].

Artículo recibido: 25 de octubre de 2023

Aceptado: 12 de marzo de 2024

Para citar este artículo:

Ossa González, G. A. (2024). Construcción de portafolios en fondos de inversión considerando momentos estadísticos superiores. *Odeon*, 26, pp. 7-28.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n26.02>

Resumen

Este estudio busca crear portafolios con activos ETF, aplicando un enfoque cuantitativo que incluye momentos estadísticos de orden superior, más allá de la normalidad de la utilidad esperada. El objetivo es optimizar la utilidad y destacar los tres portafolios principales. Al evaluar portafolios con ETF como LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM, se notó una reducción en rendimientos al aplicar momentos superiores. El portafolio 2, bajo la hipótesis de normalidad, sobresalió por su alta media de rendimiento y baja volatilidad, a pesar de una curtosis elevada. Sin embargo, la inclusión de momentos superiores indicó un aumento del riesgo, lo que hizo que ningún portafolio fuera óptimo para inversión.

Palabras clave: retorno; asimetría; curtosis; optimización de portafolios.

Clasificación JEL: G11, F3, C32.

Abstract

This study aims to create portfolios with ETF assets, using a quantitative approach that extends beyond expected utility's normality to include higher-order statistical moments. The goal is to optimize the utility and highlight the top three portfolios. When analyzing portfolios featuring ETFs such as LABU, PSQ, FXI, SPY, and IWM, a decrease in returns was observed upon incorporating higher moments. Portfolio 2 stood out under the assumption of normality for its higher average return and lower volatility, despite a significantly higher kurtosis. However, factoring in higher-order moments indicated an increased risk, rendering none of the portfolios optimal for investment.

Key words: Return; asymmetry; kurtosis; portfolio optimization.

JEL classification: G11, F3, C32.

Introducción

En el contexto financiero, la gestión de riesgos y la toma de decisiones fundamentadas desempeñan un papel esencial en la preservación de la solvencia y la estabilidad financiera a largo plazo. Este imperativo se hace aún más evidente cuando se trata de la inversión en fondos de inversión, particularmente en aquellos que exhiben una marcada heterogeneidad y propiedades estadísticas poco convencionales, como han señalado Bergh y Rensburg (2008). Sin embargo, las estrategias tradicionales que se basan exclusivamente en indicadores como la media y la varianza pueden resultar insuficientes en el contexto de un enfoque estadístico completo.

Históricamente, la teoría financiera ha confiado en la modelación de media varianza para medir el rendimiento y el riesgo de activos financieros y carteras de inversión (Markowitz, 1952). El Capital Asset Pricing Model (CAPM) y la teoría de la cartera de Media-Varianza, por ejemplo, se basan en estas dos medidas, que tienen limitaciones notables. En primer lugar, es importante señalar que la suposición de una distribución normal de los rendimientos, adoptada al calcular la media y la varianza, podría representar una simplificación poco realista de la compleja dinámica financiera (Molina, 2022). En la práctica, los mercados financieros a menudo exhiben asimetrías y colas gruesas en sus distribuciones, lo cual indica que los eventos extremos, tanto positivos como negativos, son más probables de lo que se prevería utilizando una distribución normal.

En segundo lugar, la varianza, al no diferenciar entre los riesgos positivos (más ganancias de las esperadas) y negativos (pérdidas más grandes de lo esperado), puede llevar a decisiones no óptimas. Los inversores y gestores de fondos pueden estar dispuestos a asumir ciertos riesgos positivos mientras buscan minimizar los riesgos negativos.

Los momentos superiores, como el sesgo y la curtosis, abordan estas limitaciones al proporcionar una representación más completa de la distribución de rendimientos. El sesgo informa sobre la asimetría de la distribución, lo que permite a los inversores evaluar la probabilidad de eventos extremos (Dahlquist. *et al.*, 2017). La curtosis, por otro lado, destaca la concentración de los rendimientos, lo que es crucial para la gestión del riesgo de cola (Arditti, 1967; Xu *et al.*, 2019).

Este artículo tiene como objetivo introducir la aplicabilidad de los momentos superiores en la construcción de portafolios para fondos de inversión. En

la literatura financiera, se ha documentado que los momentos superiores, que incluyen el sesgo (*skewness*) y la curtosis (*kurtosis*), aportan una comprensión más completa de la naturaleza de los rendimientos financieros y son fundamentales para tomar decisiones de inversión informadas (Harvey *et al.*, 2010; Steyn y Theart, 2021).

Investigadores como Konno *et al.* (1993) han evidenciado que los rendimientos de los valores y las carteras no siguen una distribución normal, resaltando la relevancia de la asimetría en los rendimientos de los activos para la selección de una cartera óptima. Este descubrimiento desafía la concepción tradicional del modelo de media-varianza, que se basa principalmente en el promedio y la variabilidad de los rendimientos, sugiriendo que una comprensión más profunda de cómo los rendimientos se desvían de lo esperado (asimetría) puede potenciar la gestión del riesgo y la captura de oportunidades de rendimiento. Por tanto, una evolución natural de este modelo incorporaría la asimetría y otros momentos superiores en el análisis de selección de cartera, ofreciendo a los inversores una herramienta más robusta para equilibrar riesgo y recompensa de manera efectiva.

En este contexto, el artículo se sumerge en la aplicación práctica de los momentos superiores en la construcción de portafolios de fondos de inversión, proporcionando una perspectiva más sólida y efectiva para la toma de decisiones financieras. El contenido de este documento se organiza de la siguiente manera: en la sección 1, se presenta una revisión de la literatura relevante; en la sección 2, se exponen la metodología y los datos utilizados, proporcionando una descripción concisa de cómo se obtuvieron los parámetros; en la sección 3, se presentan los principales resultados obtenidos. Finalmente, en la sección 4, se presentan las conclusiones del estudio.

1. Revisión de la literatura

El modelo de cartera de varianza media propuesto por Markowitz en 1952 ha sido un pilar en la construcción de carteras eficientes. Aunque este enfoque asume que los rendimientos de los activos financieros se distribuyen normalmente y considera los parámetros de entrada de manera determinista, investigaciones han puesto en duda estas suposiciones, demostrando que los rendimientos a menudo presentan distribuciones de cola gruesa y asimétricas, en lugar de la distribución normal anticipada. Esta crítica es respaldada por

varios estudios que exploran la relación entre volatilidad y asimetría en los mercados financieros, reforzando la noción de que los rendimientos desafían la normalidad. Pionero en este ámbito, Mandelbrot (1963) introdujo un método basado en momentos superiores de las distribuciones de probabilidad para analizar datos económicos, revelando que los rendimientos de las acciones no se conforman con una distribución normal. Fama (1965), conocido por su trabajo en la teoría de portafolios, utilizó un enfoque gráfico para demostrar que los rendimientos de las acciones presentan curtosis positiva y asimetría negativa. De manera similar, Peiro (1999) encontró, mediante análisis estadístico, que los rendimientos financieros tienden a ser asimétricos, es decir, muestran una mayor propensión a rendimientos negativos sobre los positivos.

Investigaciones más recientes, como la de Brito *et al.* (2019), proponen modelos bi-objetivo que permiten a los inversores analizar la utilidad esperada frente a la diversidad de activos en sus carteras, aplicando estos modelos a datos del índice PSI20 y observando variaciones en la certidumbre equivalente y la ratio de Sharpe con el incremento de activos, aunque sin mejoras significativas al considerar momentos superiores dentro de la muestra. Fuera de la muestra, se notó un aumento en el volumen de operaciones hasta un cierto punto, seguido de una disminución, y mejoras en ciertos niveles de diversidad de activos, especialmente al incorporar la asimetría y la curtosis.

Gong *et al.* (2021) introducen un modelo de selección de carteras que integra la racionalidad limitada, momentos superiores y la eficiencia cruzada DEA (Data Envelopment Analysis), destacando un enfoque de evaluación basado en el arrepentimiento (RCE) que aprovecha varias métricas financieras esenciales. Este enfoque se incorpora en un modelo de selección de carteras multiobjetivo que busca maximizar la utilidad del inversor considerando media, varianza, asimetría y eficiencia, teniendo en cuenta además la incertidumbre de los datos y tratando las variables relacionadas con la eficiencia cruzada y con rendimientos como *fuzzy*.

Otros investigadores como Harvey y Siddique (1999), Premaratne y Bera (2000), Lai (1991), Aksaraylı y Pala (2018), Levy y Arditti (1975), Jean (1971) y Saranya y Prasanna (2014) también han contribuido significativamente a este campo, destacando la importancia de considerar distribuciones de rendimientos no normales y la presencia de asimetría para modelar carteras eficientes y abordar los movimientos extremos en los precios de los activos.

2. Selección de datos y metodología

Para la sección sobre la construcción de portafolios que incorpora momentos superiores para fondos de inversión, la metodología inicia con la creación de bases de datos longitudinales para las muestras seleccionadas. Estas bases contienen los precios de cierre de los cinco ETF (Exchange Traded Funds) con los rendimientos más destacados al momento de la recolección de datos (el 16 de febrero de 2023), obtenidos de Yahoo Finance. Cada ETF en la muestra tiene 1259 registros de datos que cubren el periodo del 23 de abril de 2018 al 20 de abril de 2023.

Tabla 1. Fondos cotizados de inversión

| Exchange Traded Funds | Nemo |
|---|------|
| Direxion Daily S&P Biotech Bull 3X Shares | LABU |
| ProShares Short QQQ | PSQ |
| iShares China Large-Cap ETF | FXI |
| SPDR S&P 500 ETF Trust | SPY |
| iShares Russell 2000 ETF | IWM |

Fuente: elaboración propia.

2.1. Descripción ETF

- Direxion Daily S&P Biotech Bull 3X Shares (LABU): este ETF apalancado busca triplicar los rendimientos diarios del índice S&P Biotech Select Industry Index, que incluye a las principales compañías de biotecnología de Estados Unidos. A través del uso de derivados financieros, LABU intenta amplificar sus ganancias, lo que también implica un riesgo elevado de pérdidas significativas (Vilella, 2020).
- ProShares Short QQQ (PSQ): diseñado para entregar rendimientos inversos al índice Nasdaq 100, PSQ es un ETF inverso que se beneficia de las caídas en los precios de las acciones de las 100 mayores empresas no financieras del Nasdaq. Esto lo hace útil tanto para la cobertura de riesgos como para estrategias especulativas durante los periodos de declive del mercado (Charupat y Miu, 2013).

- iShares China Large-Cap ETF (FXI): se concentra en las principales compañías chinas listadas en Hong Kong y Estados Unidos, ofreciendo a los inversores exposición a empresas de gran capitalización y establecidas del mercado chino, que ha mostrado un crecimiento robusto (Zhu *et al.*, 2019).
- SPDR S&P 500 ETF Trust (SPY): este ETF replica el desempeño del índice S&P 500, incluyendo 500 de las mayores empresas estadounidenses. Conocido por su amplia aceptación global, SPY ofrece una exposición diversificada a la economía de Estados Unidos, siendo una opción primordial para inversores que desean acceder al mercado bursátil de ese país (TYVA, 2023).
- iShares Russell 2000 ETF (IWM): sigue al índice Russell 2000, que consta de 2000 empresas estadounidenses de menor tamaño. IWM se enfoca en compañías emergentes y de pequeña capitalización, presentando una opción atractiva para aquellos interesados en un segmento del mercado estadounidense con un potencial de crecimiento históricamente superior al de las grandes capitalizaciones (Sweta, 2023).

Este detallado enfoque en la selección y análisis de ETF proporciona una base sólida para la construcción de portafolios considerando momentos superiores, dirigido a capturar dinámicas de mercado complejas y diversificar estrategias de inversión.

2.2. Descripción matemática

En primer lugar, se calcula el rendimiento diario del activo. Se utiliza $n = 1258$ para indicar que se están considerando 1258 días de datos históricos del activo para la realización del cálculo propuesto.

$$R_{tn} = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad n = 1258 \quad (1)$$

En segundo lugar, se calcula el rendimiento promedio del activo \bar{R} sumando todos los rendimientos diarios $\sum_{t=2}^{n=1258} R_{tn}$ desde la primera variación hasta el día n , y luego dividiendo esta suma por el número total de días.

$$\bar{R} = \frac{\sum_{t=2}^{n=1258} R_{tn}}{1258} \quad (2)$$

Una vez se tenga el rendimiento promedio \bar{R} , se puede proceder a anualizar el retorno $\bar{R}_t = (1 + \bar{R})^{252} - 1$ donde \bar{R}_t es el rendimiento promedio anualizado y el 252 es el número de días de negociación en un año.

De forma posterior, se comprueba el log normal de los retornos con la prueba de Kolmogorov-Smirnov, que utiliza el estadístico D para comparar la función de distribución acumulativa empírica $f_1(x)$ que representa los datos observados, con la función de distribución acumulativa teórica o de referencia $f_2(x)$.

$$D = \max_x |f_1(x) - f_2(x)| \quad (3)$$

Esta prueba calcula la máxima diferencia absoluta entre ambas funciones, lo que permite evaluar la similitud o discrepancia entre las distribuciones y determinar si los datos siguen una distribución específica.

Enseguida se suman las diferencias al cuadrado entre los retornos del activo R_t y el rendimiento promedio \bar{R}_t para cada día desde la primera variación hasta el día n . Luego, esta suma se divide por el número de grados de libertad $(n - 1)$ y se toma la raíz cuadrada para obtener la volatilidad en el tiempo. La volatilidad σ debe ser anualizada multiplicándola por la raíz cuadrada del número de días de negociación en un año ($\sqrt{252}$).

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{t=2}^{n=1258} (R_t - \bar{R}_t)^2}{n - 1}} \quad (4)$$

Luego, se procedió al cálculo del coeficiente de asimetría de la siguiente manera: en primer lugar, se restó el valor promedio de cada observación a sus respectivos valores individuales para obtener las desviaciones individuales. Posteriormente, estas desviaciones se estandarizaron dividiéndolas por la desviación estándar. A continuación, estas desviaciones estandarizadas se elevaron al cubo. Luego, se sumaron todos los resultados obtenidos para todas las observaciones. Finalmente, esta suma se dividió entre el número total de observaciones para obtener el coeficiente de asimetría.

$$A_s = \frac{n}{(n - 1)(n - 2)} \sum_{t=2}^{n=1258} \left[\frac{R_t - \bar{R}}{s} \right]^3 \quad (5)$$

Si el coeficiente A_s es positivo indica una asimetría positiva o una cola larga en el lado derecho de la distribución. Si, por el contrario, A_s es negativo, indica una asimetría negativa o una cola larga en el lado izquierdo de la distribución.

$$K = \left\{ \frac{n(n+1)}{(n+1)(n-2)(n-3)} \sum_{t=2}^{n=1258} \left(\frac{R_{tn} - \bar{R}}{s} \right)^4 \right\} - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)} \quad (6)$$

La curtosis de una distribución describe la concentración de los valores alrededor de la media, y puede ser positiva o negativa. Donde \bar{R} es la media de los retornos, s es la desviación estándar y n es el número de puntos de datos en la muestra, el valor de la curtosis de una distribución normal es tres. Cuando la curtosis es negativa, la cola de la distribución es más corta que la de una distribución normal, lo que indica una menor probabilidad de valores atípicos, tanto positivos como negativos. En términos de inversiones, una curtosis positiva sugiere que un activo tiene un mayor potencial de rendimiento, pero también un mayor riesgo de pérdidas. Por otro lado, una curtosis negativa indica que un activo tiene un menor potencial de rendimiento, pero también un menor riesgo de pérdidas (Salinas *et al.*, 2010).

2.3. Momentos de la función de utilidad

A partir de los momentos, inicialmente se halla la fórmula de utilidad esperada para un primer momento siguiendo a Pierro y Mosevich (2011). Esta fórmula permite cuantificar la preferencia de un inversor por asumir riesgos y ajustar el rendimiento esperado en función de su nivel de aversión al riesgo y la volatilidad del activo.

$$U_1 = \bar{R}_t - \frac{\theta \sigma_t^2}{2} \quad (7)$$

Sin embargo, la suposición anterior, que se basa únicamente en la normalidad y la media-varianza, simplifica la función de utilidad a la media anualizada menos θ por la varianza σ^2 dividida por 2.

$$U_2 = \bar{R}_t - \frac{\theta\sigma^2}{2} + \frac{\theta^2\sigma^3S}{6} - \frac{\theta^3\sigma^4(K-3)}{720} \quad (8)$$

De acuerdo con Pierro y Mosevich (2011), el valor de U es la utilidad para el inversionista de la cartera. La primera parte \bar{R}_t representa el rendimiento promedio anual de la cartera. La segunda parte del término $\theta\sigma^2/2$ ajusta el rendimiento promedio anual en función de la varianza anualizada de la cartera, donde θ es el parámetro de aversión al riesgo subjetivo y σ^2 es la varianza anualizada de la cartera. La tercera parte del término $\theta^2\sigma^3S/6$ introduce la asimetría en la función de utilidad, donde S es el coeficiente de asimetría de la distribución de rendimientos. Esto implica que la asimetría puede afectar el rendimiento esperado de la cartera. La última parte del término $\theta^3\sigma^4(K-3)/720$ incorpora la curtosis en la función de utilidad, donde K es el coeficiente de curtosis de la distribución de rendimientos. Para profundizar más sobre las ecuaciones de orden superior remitimos a Levy y Markowitz (1979), Pierro y Mosevich (2011).

Con una función de utilidad ampliada como la anterior, el siguiente paso es calcular los rendimientos de cada portafolio, para ello realizamos la suma ponderada de los retornos de acuerdo con los pesos asignados en cada vector. Cada vector representa un conjunto de 5 datos que indican la ponderación de cada activo en el portafolio. Inicialmente, estos vectores de pesos se distribuyen de manera equitativa, asignando un 20 % a cada activo. Luego, multiplicamos cada vector de pesos por los retornos diarios de los ETF correspondientes para estimar los rendimientos diarios esperados de cada portafolio propuesto compuesto por una combinación de pesos i .

$$Portf = \sum_{t=2}^{n=1258} \prod_{t=2}^{n=1258} R_t * Peso_i \quad (9)$$

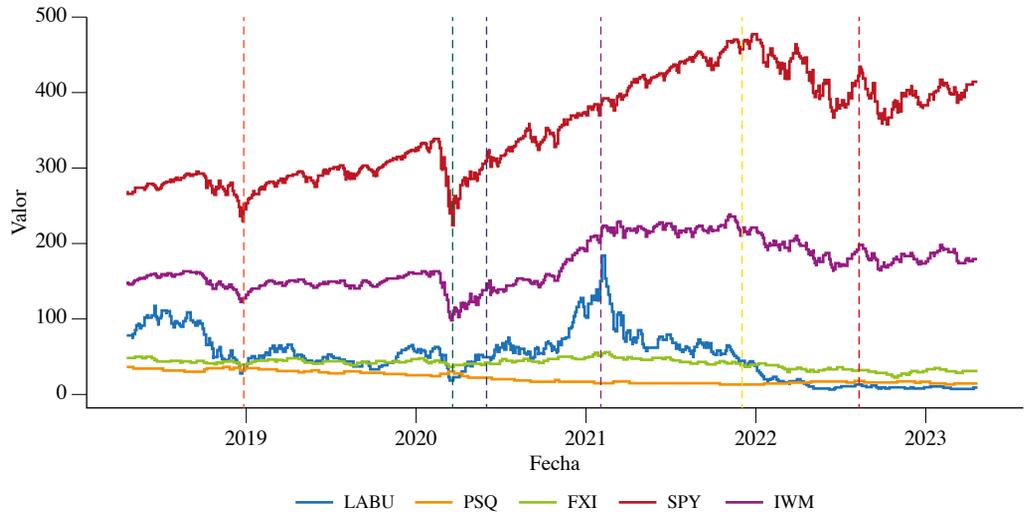
Sin embargo, es importante destacar las diferencias entre los tres portafolios propuestos. El primero estará conformado por un portafolio igualitario; el segundo, denominado “Portafolio 2” según la tabla 9, ajusta los pesos de acuerdo con una función de utilidad que considera únicamente la media varianza, es decir, el promedio aritmético y la volatilidad. Esto proporciona una perspectiva diferente de los rendimientos esperados. Por otro lado, el tercer portafolio,

“Portafolio 3” según la tabla 9, difiere al ajustar sus pesos en función de momentos superiores, como la curtosis y la asimetría. El objetivo aquí es maximizar el valor de manera que se obtengan rendimientos esperados bajo esta modalidad. Esto se logra mediante la optimización de los pesos asignados a los 5 activos.

Para garantizar que los cálculos sean coherentes y útiles, establecemos restricciones de la maximización. Estas condiciones aseguran que los valores de los pesos de los activos sean mayores o iguales a cero, y que la suma de los pesos totales sea igual al 100 %. Este proceso permite una creación de portafolios consistentes sin posiciones en corto.

3. Resultados

Figura 1. Precios históricos de los ETF



Fuente: elaboración propia con Python en Google Colab.

Tabla 2. Estadísticas sobre los retornos

| | LABU | PSQ | FXI | SPY | IWM |
|------------------|---------|---------|--------|--------|--------|
| Media | 0,02% | -0,07% | -0,02% | 0,04% | 0,03% |
| Desviación | 6,74% | 1,64% | 1,89% | 1,35% | 1,67% |
| Media anual | 5,66% | -15,71% | -4,95% | 11,66% | 7,79% |
| Desviación anual | 107,06% | 26,08% | 30,05% | 21,44% | 26,53% |

| | LABU | PSQ | FXI | SPY | IWM |
|-----------|---------|--------|---------|---------|---------|
| Asimetría | -0,0821 | 0,3914 | 1,0873 | -0,5049 | -0,6893 |
| Curtosis | 1,3527 | 5,1125 | 14,7374 | 10,6887 | 7,5184 |

Fuente: elaboración propia.

En el análisis de los ETF LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM se identifican métricas clave. SPY encabeza el grupo con un rendimiento anual promedio de 11,66 %, seguido por un rendimiento más modesto de LABU del 5,66 %. PSQ, FXI e IWM, por otro lado, registran rendimientos anuales negativos, señalando un desempeño inferior en general.

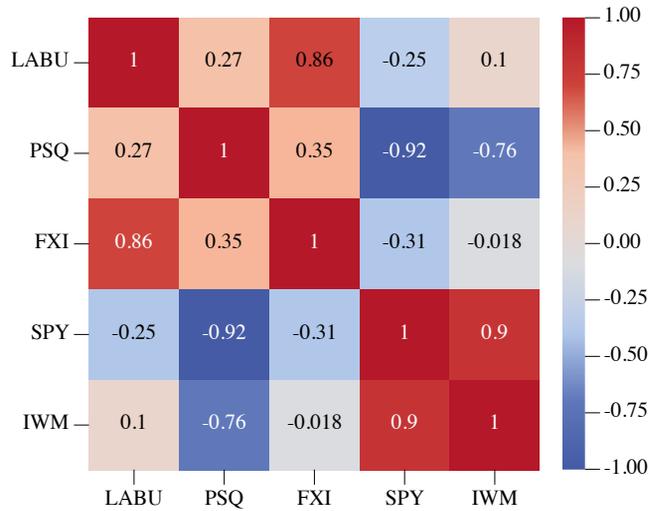
En términos de volatilidad anual, medida por la desviación estándar, LABU sobresale como el ETF más volátil con un 107,06 %, lo que indica una alta variabilidad en sus rendimientos. PSQ e IWM presentan menor volatilidad, con cifras alrededor del 26-27 %. FXI y SPY muestran volatilidades moderadas, entre 21-30 %, reflejando un riesgo más controlado.

Respecto a la asimetría, FXI se destaca por una asimetría positiva significativa, sugiriendo la posibilidad de eventos extremos positivos en su distribución de rendimientos. PSQ e IWM muestran una ligera asimetría positiva, mientras que LABU y SPY exhiben asimetrías negativas, siendo SPY el más pronunciado en este aspecto.

Finalmente, en relación con la curtosis, FXI presenta una alta curtosis, lo que indica una distribución de rendimientos con una concentración extrema alrededor de la media. SPY también muestra alta curtosis, pero en menor medida. PSQ e IWM tienen curtosis moderadamente alta, señalando una concentración razonable de rendimientos cerca de la media. LABU, por su parte, exhibe una curtosis moderada, sugiriendo una distribución de rendimientos más equilibrada (figura 2).

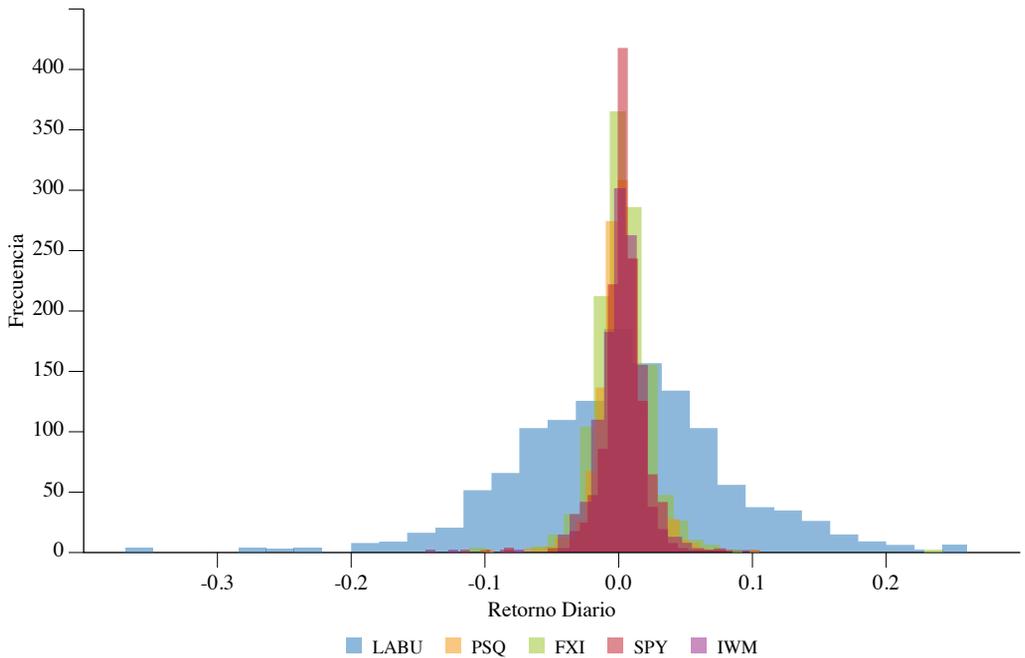
Hay una correlación positiva significativa del 86 % entre LABU y FXI, lo que indica que estos activos generalmente se mueven en la misma dirección. En contraste, existe una correlación negativa intensa del -92 % entre PSQ y SPY, lo que revela una relación inversa marcada entre estos dos activos. Además, la correlación positiva elevada del 90 % entre SPY e IWM destaca una conexión cercana y directa entre ambos, sugiriendo que tienden a comportarse de manera similar (figura 3).

Figura 2. Matriz de correlación



Fuente: elaboración propia con Python en Google Colab.

Figura 3. Histograma de los retornos históricos de los ETF



Fuente: elaboración propia con Python en Google Colab.

Tabla 3. Prueba Kolmogorov-Smirnov

| | LABU | PSQ | FXI | SPY | IWM |
|--------------------|--------|--------|--------|--------|--------|
| Supremum | 3,69% | 8,47% | 6,09% | 9,39% | 6,77% |
| Kolmogorov-Smirnov | 1,307 | 3,00 | 2,160 | 3,328 | 2,399 |
| Valor p (5%) | 18,11% | 0,012% | 0,942% | 0,001% | 0,316% |

Fuente: elaboración propia.

Para el instrumento LABU, un valor p alto sugiere insuficiente evidencia para descartar la hipótesis nula de que sus retornos siguen una distribución específica, en este caso, normal. En contraste, para los instrumentos PSQ, FXI e IWM, valores p bajos indican evidencia suficiente para rechazar la hipótesis de normalidad en sus retornos. Para SPY, un valor p muy bajo proporciona fuerte evidencia contra la hipótesis nula de distribución normal. En resumen, esto implica que los retornos de PSQ, FXI, SPY e IWM muestran desviaciones significativas de una distribución normal, mientras que para LABU, no se hallan diferencias significativas.

Tabla 4. Momentos de orden superior

| | \bar{R}_t (%) | $\theta\sigma^2/2$ (%) | $\theta^2\sigma^3S/6$ (%) | $\theta^3\sigma^4(K-3)/720$ (%) |
|------|-----------------|------------------------|---------------------------|---------------------------------|
| LABU | 5,6 | -280,87 | -41,99 | 30,85 |
| PSQ | -15,71 | -32,72 | 2,89 | 0,41 |
| FXI | -4,9 | -27,52 | 12,29 | 2,09 |
| SPY | 11,66% | 0,17 | -2,07 | 0,3 |
| IWM | 7,79 | -9,8 | -5,36% | 0,65% |

Fuente: elaboración propia.

Tabla 5. Utilidad por ETF a partir de suposición de normalidad y momentos

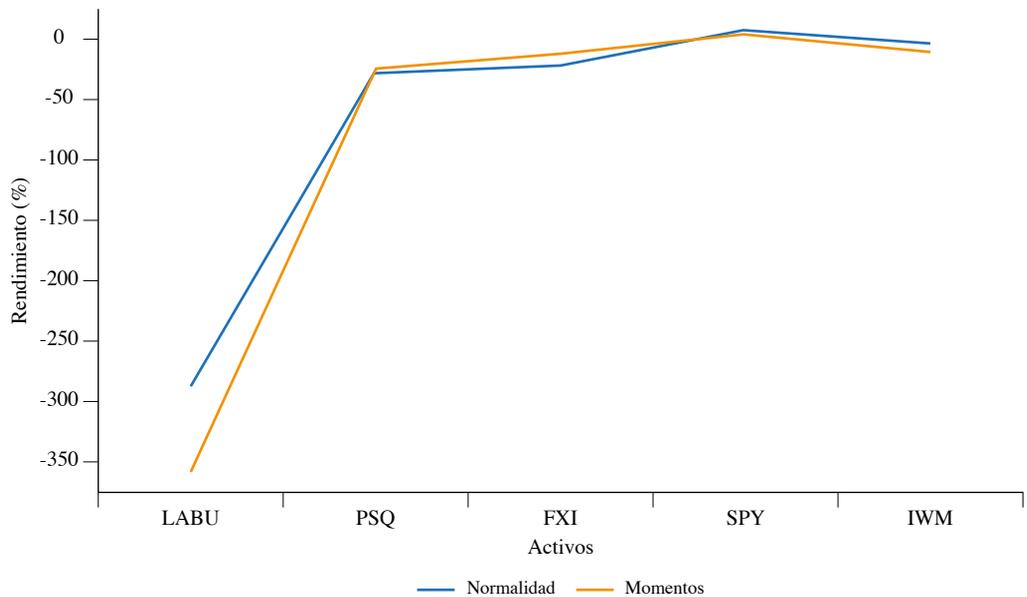
| | LABU (%) | PSQ (%) | FXI (%) | SPY (%) | IWM (%) |
|------------|----------|---------|---------|---------|---------|
| Normalidad | -280,87 | -32,72 | -27,52 | 0,17 | -9,81 |
| Momentos | -353,71 | -30,24 | -17,32% | -2,3 | -15,82 |

Fuente: elaboración propia.

Los resultados de ambas fórmulas ofrecen estimaciones sobre el valor esperado de los retornos de distintos activos financieros. La primera fórmula, detallada en la ecuación 7, brinda estimaciones más básicas al incluir únicamente la media y la varianza de los retornos, es decir, presupone normalidad. Por otro lado, la segunda fórmula, referida en la ecuación 8, es más elaborada e incluye datos adicionales sobre la asimetría y la curtosis de la distribución de los retornos.

Al comparar ambas fórmulas, se nota que el valor esperado estimado puede diferir notablemente. La incorporación de asimetría y curtosis en la segunda fórmula resulta en estimaciones más precisas y detalladas, reconociendo las características más complejas de la distribución de retornos. No obstante, se anticipa que, en promedio, la utilidad anual esperada para estos activos sea negativa.

Figura 4. Utilidad por ETF a partir de suposición de normalidad y momentos



Fuente: elaboración propia en Google Colab.

Tabla 6. Pesos originados tras optimización

| | LABU (%) | PSQ (%) | FXI (%) | SPY (%) | IWM (%) | Total (%) |
|--------|----------|---------|---------|---------|---------|-----------|
| Peso 1 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 20,00 | 100 |
| Peso 2 | 0,00 | 11,14 | 0,00 | 88,86 | 0,00 | 100 |
| Peso 3 | 0,00 | 18,26 | 0,00 | 81,74 | 0,00 | 10 |

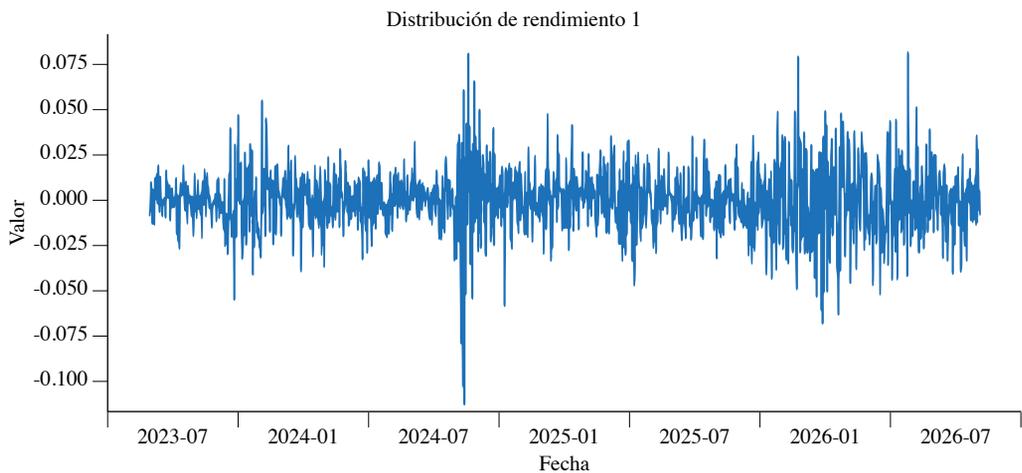
Fuente: elaboración propia.

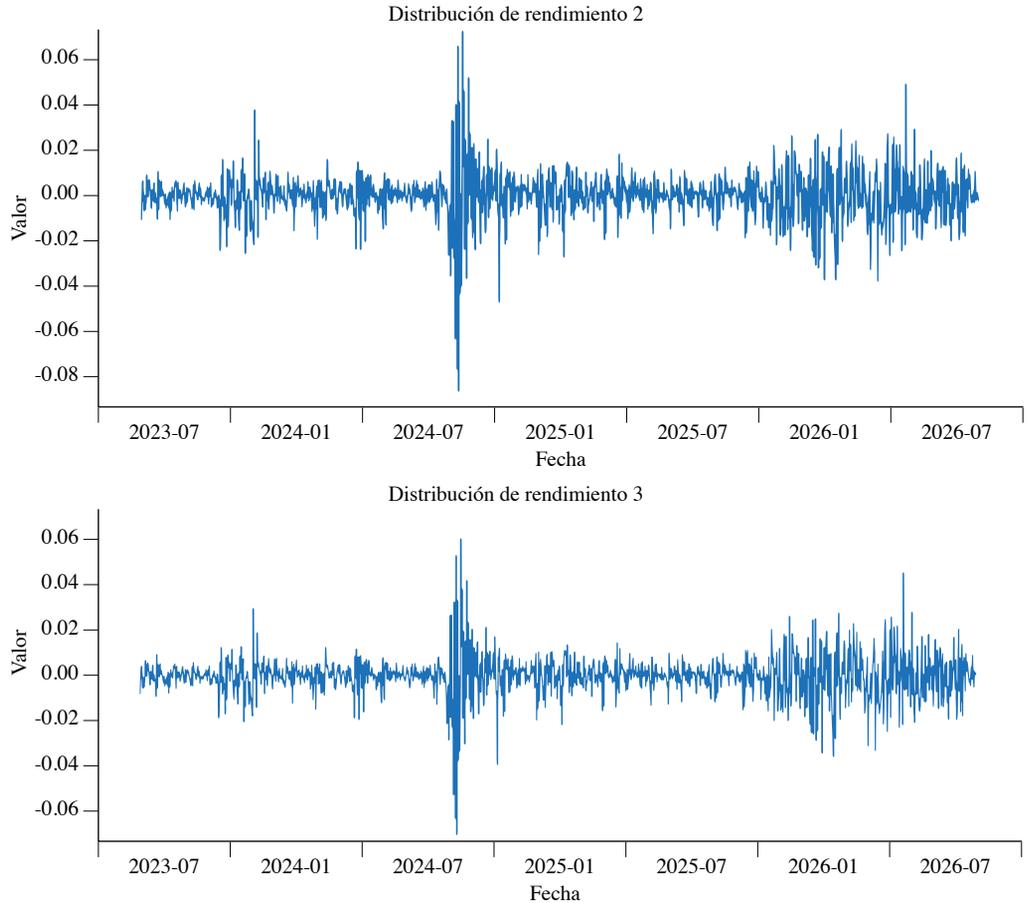
Tabla 7. Estadísticas de la distribución de rendimientos por portafolio

| | Portafolio 1 | Portafolio 2 | Portafolio 3 |
|------------------|--------------|--------------|--------------|
| Media | 0,00% | 0,03% | 0,02% |
| Desviación | 1,89% | 1,09% | 0,94% |
| Asimetría | -0,2602 | -0,4556 | -0,3889 |
| Curtosis | 2,8059 | 9,4126 | 8,0511 |
| Media anual | 0,37% | 8,22% | 6,07% |
| Desviación anual | 30,05% | 17,35% | 14,96% |

Fuente: elaboración propia.

Figura 5. Distribucion de rendimientos optimizados por portafolio





Fuente: elaboración propia con Python en Google Colab.

El Portafolio 2 registra el mayor rendimiento promedio anual de 8,22 %. A pesar de que los otros portafolios ofrecen rendimientos inferiores, exhiben una volatilidad más baja. La desviación anual del Portafolio 2 es de 17,35 %, comparada con el 14,96 % del Portafolio 3 y el 30,05 % del Portafolio 1. Todos los portafolios presentan asimetría negativa, aunque el Portafolio 2 se aproxima más a una distribución simétrica. En términos de curtosis, el Portafolio 1 muestra el valor más bajo.

Tabla 8. Momentos de rentabilidad en portafolio

| | \bar{R}_t (%) | $\theta\sigma^2$ (%) | $\theta^2\sigma^3S$ (%) | $\theta^3\sigma^4(K-3)$ (%) |
|--------------|-----------------|----------------------|-------------------------|-----------------------------|
| Portafolio 1 | 0,37 | 22,57 | -2,94 | 0,40 |
| Portafolio 2 | 8,22 | 7,53 | -0,99 | 0,15 |
| Portafolio 3 | 6,07 | 5,60 | -0,54 | 0,07 |

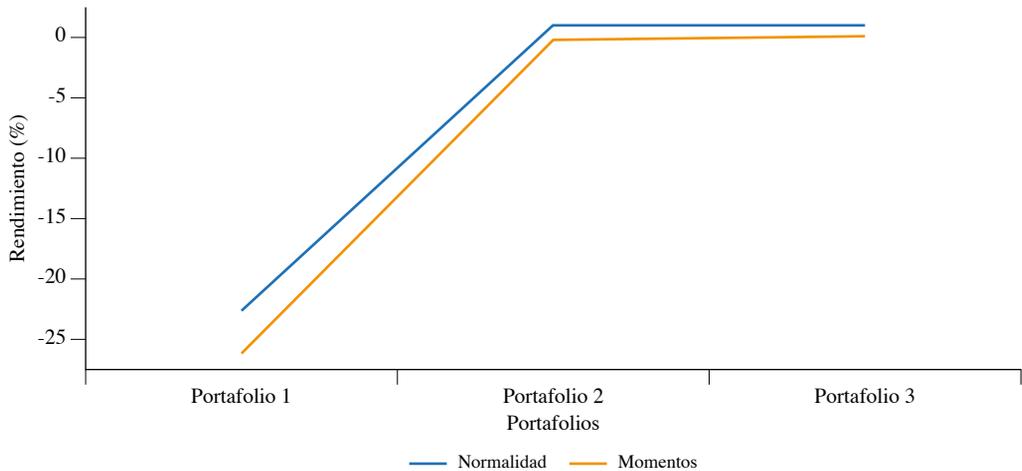
Fuente: elaboración propia.

Tabla 9. Utilidad por portafolio a partir de suposición de normalidad y momentos

| | Portafolio 1 (%) | Portafolio 2 (%) | Portafolio 3 (%) |
|------------|------------------|------------------|------------------|
| Normalidad | -22,20 | 0,6 | 0,48 |
| Momentos | -25,53 | -0,45 | -0,14 |

Fuente: elaboración propia.

Figura 6. Utilidad por portafolio a partir de suposición de normalidad y momentos



Fuente: elaboración propia con Python en Google Colab.

Los hallazgos indican que bajo la suposición de normalidad, el Portafolio 2 sobresale por su utilidad, como se detalla en la tabla 9. Este resultado es particularmente relevante dado su nivel de curtosis significativamente más alto comparado con los otros portafolios, mostrado en la tabla 7. Una curtosis alta sugiere una concentración mayor de retornos alrededor del promedio y una probabilidad incrementada de eventos extremos. A pesar de tener la media más alta y una menor volatilidad en comparación con los demás portafolios, la aplicación de la ecuación de momentos superiores sugiere que ninguno de los portafolios representa una opción de inversión viable, como se observa en la tabla 9, lo que señala un aumento en el riesgo para todos los portafolios.

4. Conclusiones

Esta investigación destaca la necesidad crítica de expandir los métodos de evaluación de carteras más allá de las estrategias convencionales. Se evidencia que los enfoques tradicionales pueden ser insuficientes para captar la esencia de los rendimientos financieros. La integración de momentos superiores, tales como asimetría y curtosis, en la asignación de activos es fundamental debido a que la desviación de la normalidad en los rendimientos es habitual en las finanzas. Estos momentos adicionales permiten entender mejor la complejidad y las distribuciones de cola pesada de los rendimientos, incluyendo los eventos extremos que impactan significativamente las inversiones.

Los hallazgos muestran que al incluir momentos superiores en la evaluación de carteras que contienen activos como LABU, PSQ, FXI, SPY e IWM, se produce una notable disminución en los rendimientos. Cuando se asumen condiciones de normalidad, los rendimientos suelen ser negativos, y esta tendencia se intensifica con la inclusión de momentos superiores.

En cuanto a los portafolios analizados, el Portafolio 2 mostró un rendimiento relativamente bueno bajo la suposición de normalidad de los rendimientos. No obstante, la inclusión de momentos superiores indica que ningún portafolio es adecuado para inversión, lo que señala un aumento del riesgo en todas las carteras. Este resultado resalta la importancia de entender y manejar el riesgo en la inversión de carteras, especialmente en un contexto donde la variabilidad de los rendimientos es recurrente.

Referencias

- Arditti, D. (1967). Risk and the required return on equity. *The Journal of Finance*, 22(1), 19-36. <https://doi.org/10.2307/2977297>
- Aksaraylı, M., y Pala, O. (2018). A polynomial goal programming model for portfolio optimization based on entropy and higher moments. *Expert Systems with Applications*, 94, 185-192. <https://doi.org/10.1016/j.eswa.2017.10.056>
- BlackRock (2023). iShares Russell 2000 ETF. <https://www.blackrock.com/cl/productos/239710/ishares-russell-2000-etf>
- Bergh, G., y Rensburg, P. (2008). Hedge funds and higher moment portfolio selection. *Journal of Derivatives & Hedge Funds*, 14, 102-126. <https://doi.org/10.1057/JDFH.2008.14>
- Brito, R. P., Sebastião, H. y Godinho, P. (2019). Portfolio management with higher moments: The cardinality impact. *International Transactions in Operational Research*, 26(6), 2531-2560. <https://doi.org/10.1111/itor.12404>
- Charupat, N. y Miu, P. (2013). The pricing efficiency of leveraged exchange-traded funds: evidence from the US markets. *Journal of Financial Research*, 36(2), 253-278. <https://doi.org/10.1111/j.1475-6803.2013.12010.x>
- Dahlquist, M., Farago, A., y Tédongap, R. (2017). Asymmetries and portfolio choice. *The Review of Financial Studies*, 30(2), 667-702. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhw091>
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The journal of Business*, 38(1), 34-105.
- Harvey, C. R., Liechty, J. C., Liechty, M. W. y Mueller, P. (2010). Portfolio selection with higher moments. *Quantitative Finance*, 10, 469-485. <http://dx.doi.org/10.1080/14697681003756877>
- Harvey, C. R. y Siddique, A. (1999). Autoregressive conditional skewness. *Journal of financial and quantitative analysis*, 34(4), 465-487. <https://doi.org/10.2307/2676230>

- Gong, X., Yu, C., Min, L. y Ge, Z. (2021). Regret theory-based fuzzy multi-objective portfolio selection model involving DEA cross-efficiency and higher moments. *Applied Soft Computing*, 100, 106958. <https://doi.org/10.1016/j.asoc.2020.106958>
- Guiso, L. y Paiella, M. (2001). Risk Aversion, Wealth and Background Risk. *Microeconomic Theory Journal*. <https://doi.org/10.2139/ssrn.262958>.
- Jean, W. H. (1971). The extension of portfolio analysis to three or more parameters. *Journal of financial and Quantitative Analysis*, 6(1), 505-515. <https://doi.org/10.2307/2330125>
- Jondeau, E., y Rockinger, M. (2006). Optimal portfolio allocation under higher moments. *European Financial Management*, 12(1), 29-55. <https://doi.org/10.1111/j.1354-7798.2006.00309.x>
- Konno, H., Hiroshi, S. e Hiroaki, Y. (1993). A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimization model. *Annals of Operations Research*, 45(1), 205-220.
- Lai, T. Y. (1991). Portfolio selection with skewness: A multiple-objective approach. *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 1, 293-305. <https://doi.org/10.1007/BF02408382>
- Levy, H., y Arditti, F. D. (1975). Valuation, leverage and the cost of capital in the case of depreciable assets: A reply. *The Journal of Finance*, 30(1), 221-223. <https://doi.org/10.2307/2978446>
- Levy, H. y Markowitz, H. M. (1979). Approximating expected utility by a function of mean and variance. *The American Economic Review*, 69(3), 308-317. <https://www.jstor.org/stable/1807366>
- Mandelbrot, B. (1963). New methods in statistical economics. *Journal of Political Economy*, 71(5), 421-440. <https://doi.org/10.1086/258792>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *Journal of Finance, American Finance Association*, 7(1), 77-91. <https://doi.org/10.2307/2975974>
- Molina, M. (2022). Paso a paso. Prueba de la t de Student para muestras independientes. *Revista electrónica AnestesiaR*, 14(8), 1-5. <https://doi.org/10.30445/rear.v14i8.1060>

- Pierro, M. D. y Mosevich, J. (2011). Effects of skewness and kurtosis on portfolio rankings. *Quantitative Finance*, 11(10), 1449-1453. <https://doi.org/10.1080/14697688.2010.495723>
- Peiro, A. (1999). Skewness in financial returns. *Journal of Banking & Finance*, 23(6), 847-862. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(98\)00119-8](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(98)00119-8)
- Premaratne, G. y Bera, A. K. (2000). Modeling asymmetry and excess kurtosis in stock return data. *Illinois Research & Reference Working Paper* No. 00-123. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.259009>
- Vilella, F. (2020). Rebrotos del Covid-19 mantendrán en auge a sectores ya beneficiados. *Revista Uruguaya de Economía y Finanzas Personales, Portfolio*, 102(8), 29-32.
- Saranya, K. y Prasanna, P. K. (2014). Portfolio selection and optimization with higher moments: Evidence from the Indian stock market. *Asia-Pacific Financial Markets*, 21, 133-149. <https://doi.org/10.1007/s10690-014-9180-0>
- Salinas, S. M., Maldonado, D. A. y Díaz, L. G. (2010). Estimación del riesgo en un portafolio de activos. *Apuntes del CENES*, 29(50), 117-150.
- Sweta, K. (2023). *Top-Ranked ETFs to Buy on Small-Cap Comeback*. Yahoo Finance.
- Steyn, J. P. y Theart, L. (2021). The pricing of skewness: Evidence from the Johannesburg Stock Exchange. *Investment Analysts Journal*, 50(2), 133-144. <https://doi.org/10.1080/10293523.2021.1898744>
- Thiele, S. (2020). Modeling the conditional distribution of financial returns with asymmetric tails. *Journal of Applied Econometrics*, 35(1), 46-60. <https://doi.org/10.1002/jae.2730>
- TYVA (2023). Qué es el ETF SPY. <https://tyba.com.co/blog/spy/>
- Xu, Z., Li, X. y Chevapatrakul, T. (2019). Return asymmetry and the cross sección of stock returns. *Social Science Research Network*. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2850842>
- Zhu, F., Luo, X. y Jin, X. (2019). Predicting the volatility of the iShares China Large-Cap ETF: What is the role of the SSE 50 ETF? *Pacific-Basin Finance Journal*, 57, 101192. <https://doi.org/10.1016/j.pacfin.2019.101192>