

Redes neuronales informadas por la física, aplicadas a la resolución de un problema de inversión y consumo óptimo, bajo función de utilidad exponencial

Physics informed neural networks applied to solving an optimal investment and consumption problem with an exponential utility function

John Freddy Moreno Trujillo*

* Doctor en Ciencias Económicas; Magíster en Matemática Aplicada. Docente-Investigador, Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas (ODEON), Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [jhon.moreno@uexternado.edu.co], [https://orcid.org/0000-0002-2772-6931].

Artículo recibido: 03 de agosto de 2024.

Aceptado: 20 de septiembre de 2024.

Para citar este artículo:

Moreno Trujillo, J. F. (2024). Redes neuronales informadas por la física, aplicadas a la resolución de un problema de inversión y consumo óptimo, bajo función de utilidad exponencial. *Odeon*, 27, 299-308.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n27.09>

Resumen

Este trabajo considera el problema del portafolio óptimo de Merton en el contexto de un mercado financiero incierto compuesto por dos tipos de activos. Se plantea la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman asociada con este tipo de problema y se muestra cómo se pueden implementar redes neuronales informadas por la física (PINN) para encontrar su solución.

Palabras clave: portafolio óptimo; ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman; redes neuronales informadas por la física.

Clasificación JEL: C45, D91, C63.

Abstract

This work considers the optimal portfolio problem of Merton in the context of an uncertain financial market composed of two types of assets. The Hamilton-Jacobi-Bellman equation associated with this type of problem is posed, and it is shown how physics-informed neural networks (PINNs) can be implemented to find its solution.

Key words: Optimal portfolio; Hamilton-Jacobi-Bellman equation; physics-informed neural networks.

JEL classification: C45, D91, C63.

Introducción

En el campo de las finanzas cuantitativas, la optimización de portafolios ha sido un tema central durante décadas, especialmente en el contexto del modelo de Merton para la asignación óptima de activos en un entorno de inversión incierto. Sin embargo, resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) asociada a este problema ha sido tradicionalmente desafiante, debido a su alta dimensionalidad y complejidad. En respuesta a esta dificultad, ha surgido en los últimos años un enfoque prometedor que combina redes neuronales informadas por la física (PINN) con técnicas de aprendizaje profundo para abordar problemas de optimización. Trabajos recientes como el de Raissi y Karniadakis (2018) han demostrado la efectividad de las PINN en la resolución de ecuaciones diferenciales parciales, mientras que investigaciones más específicas, como la de Sirignano y Spiliopoulos (2018) han considerado la aplicación de esta metodología al problema de optimización de carteras de Merton. En este trabajo, exploramos la aplicación de las PINN para resolver la ecuación HJB en el contexto del problema de portafolio óptimo de Merton, bajo diferentes formas de la función de utilidad del agente tomador de decisiones, destacando su potencial para superar las limitaciones de los métodos tradicionales y abriendo nuevas perspectivas en la gestión de activos y la ciencia financiera.

1. El problema de portafolio óptimo de Merton

El problema del portafolio óptimo de Merton (1975), nombrado en honor al economista Robert C. Merton, surge en el contexto de la teoría de inversión óptima y gestión de carteras en entornos inciertos. Este problema busca determinar la asignación óptima de capital entre un activo riesgoso y un activo libre de riesgo con el objetivo de maximizar la utilidad esperada del agente inversionista a lo largo de un horizonte temporal finito.

Este problema de portafolio óptimo se formula como uno de optimización estocástica, donde el agente debe decidir qué fracción de su capital invertir en el activo riesgoso y qué fracción invertir en el activo libre de riesgo en cada período de tiempo, teniendo en cuenta su aversión al riesgo y sus preferencias por el consumo presente y futuro. La solución óptima a este problema se obtiene, generalmente, utilizando el enfoque de programación dinámica y resolviendo la

ecuación de HJB, que describe la función de valor del agente en función del tiempo y la riqueza.

1.1. El modelo de mercado

Consideramos un mercado en el intervalo de tiempo $[0, T]$, que está compuesto por dos tipos de activos. Un activo libre de riesgo, con valor en $t \in [0, T]$ denotado por B_t , que satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$dB_t = r_f B_t dt \quad (1)$$

donde r_f es una tasa de interés libre de riesgo constante conocida. El segundo es un activo riesgoso con valor en $t \in [0, T]$ denotado por S_t , que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \alpha(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t \quad (2)$$

donde $\alpha(t, S_t)$ y $\sigma(t, S_t)$ son funciones que describen los coeficientes de tendencia y difusión del proceso, respectivamente, y satisfacen condiciones suficientes para asegurar la existencia de una solución a esta ecuación. En particular, se asumirá que:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (3)$$

con α y $\sigma > 0$ constantes, lo que significa que el precio de los activos riesgosos sigue un movimiento Browniano geométrico.

En este mercado, consideramos un agente con una función de utilidad $U(c_t)$, donde c_t denota su tasa de consumo en el momento $t \in [0, T]$, y una utilidad $\Phi(X)$ por alcanzar el tiempo T con una riqueza X . El objetivo de este agente es maximizar el valor esperado de su utilidad derivada del consumo y de la riqueza final, seleccionando de manera óptima las proporciones invertidas en los activos (libre de riesgo y riesgoso), sujeto a la restricción asociada con los cambios en su riqueza.

El proceso de riqueza del agente es X_t , y denotando w_t como la proporción de riqueza invertida en el activo riesgoso en el tiempo t (así, $(1 - w_t)$ es la proporción invertida en el activo libre de riesgo), la dinámica de X_t está dada por:

$$dX_t = X_t \left[(1 - w_t) \frac{dB_t}{B_t} + w_t \frac{dS_t}{S_t} \right] - c_t dt \quad (4)$$

y de las expresiones (1) y (3), se sigue que:

$$dX_t = X_t [r_f + (\alpha - r_f)w_t] dt - c_t dt + X_t w_t \sigma dW_t \quad (5)$$

1.2. Problema de control óptimo y ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

El problema de control óptimo estocástico de este agente es:

$$\max_{\{c_t, w_t\}} E \left[\int_0^T U(c_t) e^{-\rho t} dt + \Phi(X_T) e^{-\rho T} \right] \quad (6)$$

sujeta a:

$$dX_t = X_t [r_f + (\alpha - r_f)w_t] dt - c_t dt + X_t w_t \sigma dW_t \quad ; \quad X_0 = x \quad (7)$$

donde $\rho > 0$ es una tasa de descuento. La ecuación de HJB para la función de valor óptimo $V(t, x)$ asociada a este problema es:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \max_{c, w} \left\{ U(c) + [w(\alpha - r_f)x + r_f x - c] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = 0 \\ V(T, x) = \Phi(x) \end{cases} \quad (8)$$

Considerando el problema de optimización estático asociado a la ecuación (8), tenemos:

$$\max_{c, w} \left\{ U(c) + [w(\alpha - r_f)x + r_f x - c] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} \quad (9)$$

y se sigue que:

$$U'(c) = \frac{\partial V}{\partial x} \quad (10)$$

y

$$\hat{w} = \frac{(r_f - \alpha) \partial V / \partial x}{x \sigma^2 \partial^2 V / \partial x^2} \quad (11)$$

Las ecuaciones (10) y (11) caracterizan los controles óptimos (\hat{c}_t y \hat{w}_t) en términos de la función de utilidad del agente ($U(c_t)$) y de las derivadas parciales

de la función de valor óptimo $V(t, x)$. Así, considerando la caracterización de los controles óptimos, tenemos que la ecuación HJB es:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + U(\hat{c}) + [\hat{w}(\alpha - r_f)x + r_f x - \hat{c}] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\hat{w}^2\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = 0 \\ V(T, x) = \Phi(x) \end{cases} \quad (12)$$

que puede ser expresada de forma compacta como:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + G\left(U, t, x, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = 0 \\ V(T, x) = \Phi(x) \end{cases} \quad (13)$$

con:

$$G\left(U, t, x, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right) = U(\hat{c}) + [\hat{w}(\alpha - r_f)x + r_f x - \hat{c}] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2}x^2\hat{w}^2\sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad (14)$$

2. Solución de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman mediante redes neuronales informadas por la física

Para resolver la ecuación de HJB, consideramos una red neuronal $V_\theta(t, x)$ con un conjunto de parámetros θ , que aproxima la función de valor óptimo $V(t, x)$. Esta red incorpora la información (la física) integrada en la ecuación al construir la función de costo que incluye el residuo:

$$r_\theta(t, x) := \frac{\partial V_\theta}{\partial t} + G\left(U, t, x, \frac{\partial V_\theta}{\partial x}, \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial x^2}\right) \quad (15)$$

Específicamente, la función de costo de esta red es de la forma:

$$L_\theta(t, X) = L_{HJB}(t, X) + L_{BC}(T, X) \quad (16)$$

donde:

$$L_{HJB}(t, X) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [r_\theta(t_i, x_i)]^2 \quad (17)$$

en un conjunto $(t, X) := \{(t_i, X_i)\}_{i=1}^N$ de puntos interiores del dominio de la función. Y la función:

$$L_{BC}(T, X) := \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M [V_{\theta}(T, x_i) - \Phi(X)]^2 \quad (18)$$

en un conjunto de puntos en la frontera $(T, X) := \{(T, X_i)\}_{i=1}^M$.

La red neuronal se entrena utilizando un algoritmo de optimización, como el de gradiente estocástico descendente, para minimizar la función de pérdida total $L_{\theta}(t, X) = L_{HJB}(t, X) + L_{BC}(T, X)$. Tras la convergencia, la red neuronal proporciona una aproximación de la función de valor $V_{\theta}(t, X)$, que puede utilizarse para obtener la política óptima de inversión y consumo en cada momento del tiempo.

En resumen, el proceso de aplicar redes informadas por la física para resolver la ecuación HJB implica formular una función de pérdida que capture la discrepancia entre la ecuación HJB y las predicciones de la red neuronal, y minimizar esta función de pérdida utilizando un algoritmo de optimización junto con una regularización física para garantizar que la solución obtenida cumpla con las condiciones físicas del problema.

3. Aplicación

Como un ejemplo de aplicación del algoritmo PINN para resolver la ecuación HJB asociada a un problema de portafolio óptimo, consideramos un agente que maximiza la utilidad del consumo a lo largo del intervalo finito $[0, T]$. El mercado en el que se toma la decisión sobre cómo estructurar el portafolio óptimo consta de dos tipos de activos:

- Un activo libre de riesgo con valor en t denotado por B_t , que satisface la ecuación diferencial ordinaria:

$$dB_t = rB_t dt \quad (19)$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo.

- Un activo riesgoso con valor en t denotado por S_t , que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \alpha S_t dt + \sigma S_t dW_t \quad (20)$$

donde α es la tasa de rendimiento esperado del activo y W_t es un movimiento Browniano estándar unidimensional.

Los controles del problema corresponden a la proporción de la riqueza invertida en cada tipo de activo, junto con la tasa de consumo, de manera que:

- w_t : proporción invertida en el activo riesgoso en el tiempo t .
- $1 - w_t$: proporción invertida en el activo libre de riesgo en el tiempo t .
- c_t : tasa de consumo en el tiempo t .

La función de utilidad para el consumo del agente es exponencial y está asociada con una tasa de descuento $\delta > 0$, es decir, $U(c_t) = e^{-\delta t} c_t^\gamma$ con $0 < \gamma < 1$, y no se considera utilidad por tener riqueza en el tiempo T .

Se deduce que la dinámica de la riqueza del agente (X_t) satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dX_t = w_t(\alpha - r)X_t dt + (rX_t - c_t) dt + X_t w_t \sigma dW_t \quad (21)$$

y el problema de control óptimo es:

$$\max_{w_t, c_t} \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\delta t} c_t^\gamma dt \right] \quad (22)$$

sujeto a:

$$dX_t = w_t(\alpha - r)X_t dt + (rX_t - c_t) dt + X_t w_t \sigma dW_t \quad (23)$$

$$c_t \geq 0 \quad ; \quad w_t \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, T] \quad (24)$$

La ecuación de HJB correspondiente es:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \max_{w, c} \left\{ e^{-\delta t} c^\gamma + [w(\alpha - r)x + rx - c] \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{1}{2} x^2 w^2 \sigma^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right\} = 0 \quad (25)$$

junto con la condición de frontera $V(T, x) = 0$.

El resultado de la implementación del algoritmo PINN para valores iniciales: $r = 0,05$, $\sigma = 0,2$, $\delta = 0,04$, y $\gamma = 0,5$ es representado en la siguiente función de consumo óptimo:

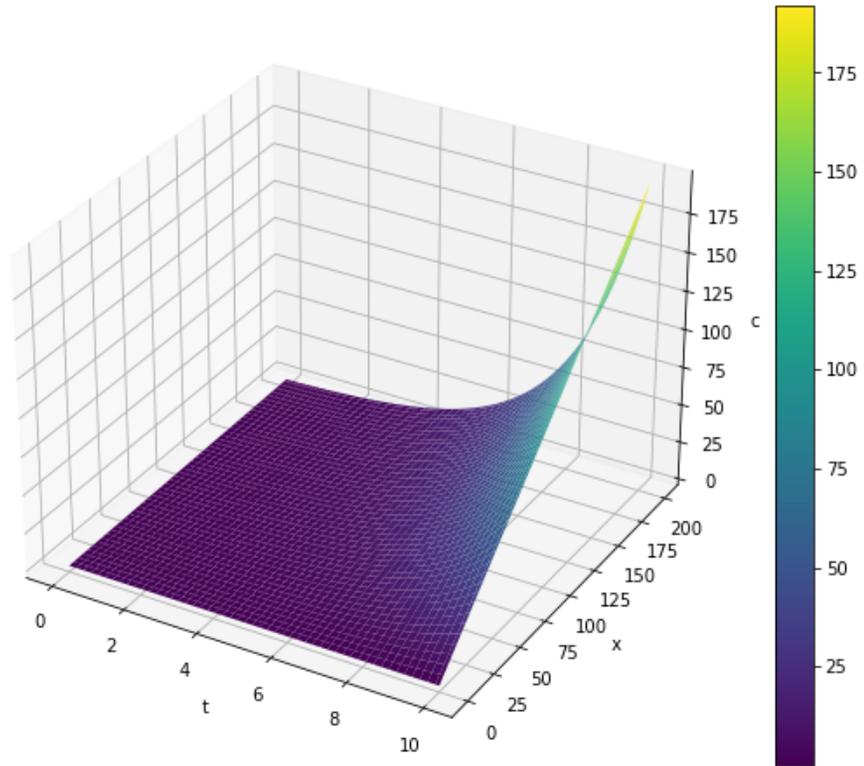


Figura 1. Función de consumo óptimo

Referencias

Merton, R. C. (1975). Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. *Stochastic optimization models in finance*, 621-661.

Moreno Trujillo, J. F. (2023a). Aplicación de la teoría de control óptimo estocástico a un problema de inversión-consumo. *ODEON*(25).

Moreno Trujillo, J. F. (2023b). Resolución de la ecuación diferencial parcial de black-scholes mediante redes neuronales físicamente informadas. *ODEON*(24).

Raissi, M., y Karniadakis, G. E. (2018). Hidden physics models: Machine learning of nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 357, 125-141.

Sirignano, J., y Spiliopoulos, K. (2018). Dgm: A deep learning algorithm for solving partial differential equations. *Journal of computational physics*, 375, 1339-1364.