

# **Riesgo sistémico y teoría de juegos de campo medio**

## **Systemic Risk and Mean Field Game Theory**

**John Freddy Moreno Trujillo\***

\* Doctor en Ciencias Económicas; magíster en Matemática Aplicada. Docente-Investigador, Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas (ODEON), Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [jhon.moreno@uexternado.edu.co], [<https://orcid.org/0000-0002-2772-6931>].

Artículo recibido: 17 de enero de 2025.

Aceptado: 25 de marzo de 2025.

Para citar este artículo:

Moreno Trujillo, J. F. (2025). Riesgo sistémico y teoría de juegos de campo medio. Odeon, 28, 7-27.

doi: <https://doi.org/10.18601/17941113.n28.02>

## Resumen

El artículo aborda el riesgo sistémico, definido como la posibilidad de que un evento adverso en una parte del sistema financiero desencadene una cadena de fallos que afecte su estabilidad global. Utilizando la teoría de juegos de campo medio, se desarrolla un modelo matemático para estudiar la dinámica de préstamos y créditos interbancarios entre  $N$  bancos. Este modelo considera interacciones financieras y la influencia de un banco central como proveedor de liquidez. Los resultados destacan que los préstamos interbancarios pueden mejorar la estabilidad, pero también contribuyen al riesgo sistémico, caracterizado por eventos raros donde múltiples bancos alcanzan niveles críticos de incumplimiento. Se analizan los equilibrios de Nash y su impacto en la estabilidad y el riesgo.

**Palabras clave:** riesgo sistémico; teoría de juegos de campo medio; estabilidad financiera; bancos; liquidez; modelos matemáticos; equilibrio de Nash.

**Clasificación JEL:** C73, G01, G21, C61.

## Abstract

The article addresses systemic risk, defined as the possibility of an adverse event in one part of the financial system triggering a cascade of failures that compromise global stability. Using mean field game theory, a mathematical model is developed to study the dynamics of interbank lending and borrowing among  $N$  banks. This model incorporates financial interactions and the role of a central bank as a liquidity provider. Results highlight that interbank lending can enhance stability but also contribute to systemic risk, characterized by rare events where multiple banks reach critical default levels. The Nash equilibria and their impact on stability and risk are analyzed.

**Key words:** Systemic risk; mean field game theory; financial stability; banks; liquidity; mathematical models; Nash equilibrium.

**JEL classification:** C73, G01, G21, C61.

## Introducción

El *riesgo sistémico* se puede definir como el riesgo de que un evento adverso en una parte del sistema financiero, como el colapso de una institución o un mercado, provoque una cadena de fallos en otras partes del sistema, lo que puede llevar a una crisis financiera generalizada. Este tipo de riesgo se debe a la interconexión e interdependencia de las instituciones financieras y los mercados, donde los problemas en una entidad o sector pueden extenderse rápidamente a otros, afectando la estabilidad económica global. Este tipo de riesgo es especialmente relevante en situaciones donde las instituciones son “demasiado grandes para quebrar” o están altamente interrelacionadas a través de préstamos, inversiones o contratos financieros complejos.

Este tipo de riesgo se ha convertido en un concepto central en el estudio de los sistemas financieros y económicos, particularmente después de la crisis financiera global de 2007-2008. La naturaleza interconectada de los mercados financieros globales y la creciente complejidad de las instituciones financieras han amplificado las preocupaciones sobre el riesgo sistémico. Trabajos semi-nales como el de Kaufman y Scott (2003) sobre la estructura del riesgo sistémico y las fallas de las instituciones financieras proporcionan una base teórica robusta para entender cómo las perturbaciones en un sector pueden propagarse a lo largo del sistema.

Uno de los enfoques más influyentes en la literatura sobre riesgo sistémico ha sido el desarrollo de modelos de redes financieras para evaluar la transmisión del riesgo, como lo explorado en los estudios de Haldane y May (2011), quienes aplicaron la teoría de redes para ilustrar cómo las interconexiones pueden aumentar la vulnerabilidad sistémica. Además, las investigaciones de Acharya *et al.* (2017) en torno a la medición del riesgo sistémico mediante indicadores como el *Marginal Expected Shortfall* (MES) han sido cruciales para el desarrollo de herramientas prácticas de monitoreo. Estos estudios han impulsado tanto el marco regulatorio como las políticas macroprudenciales destinadas a mitigar el riesgo sistémico en los sistemas financieros contemporáneos.

En este trabajo, para caracterizar y cuantificar el riesgo sistémico, se propone un modelo simple de préstamos y créditos interbancarios donde la evolución del logaritmo de las reservas monetarias (log-reservas) de  $N$  bancos es la solución de ecuaciones diferenciales parciales de tipo Hamilton-Jacobi-Bellman asociadas a un problema de control óptimo, en línea con el trabajo de Carmona *et al.* (2013). Se estudia el correspondiente planteamiento desde la perspectiva de la

teoría de juegos de campo medio -cuyas ideas principales se pueden revisar en Moreno Trujillo (2022)-, en el límite de un gran número de bancos, encontrando que los préstamos y créditos interbancarios crean estabilidad, la cual se ve mejorada por la posibilidad de pedir prestado y prestar a un banco central, que en este modelo aparece como una cámara de compensación que proporciona liquidez adicional, y el riesgo sistémico se describe como un evento raro con una probabilidad cuantificada por la teoría de grandes desviaciones.

Una característica del juego propuesto es que cada banco controla su tasa de préstamos y créditos con el banco central. El control de cada banco individual refleja el deseo de pedir prestado al banco central cuando su reserva monetaria cae por debajo de un nivel crítico, o prestar si supera este nivel, que aquí se elige como la log-reserva monetaria promedio. Pedir prestado o prestar al banco central también está sujeto a un costo cuadrático con una tasa que puede ser fijada por el regulador. En este contexto, el riesgo sistémico se caracteriza por un gran número de bancos que alcanzan un umbral de incumplimiento en un horizonte de tiempo dado.

En el modelo propuesto, el proceso de difusión  $X_t^i$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  representa el logaritmo de las reservas monetarias de  $N$  bancos que otorgan y toman préstamos entre ellos. El sistema considera  $N$  movimientos Brownianos estándar  $\widehat{W}_t^i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  (posiblemente correlacionados) tales que  $\widehat{W}_t^i = \rho W_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^i$ , donde  $W_t^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$  son movimientos Brownianos estándar independientes,  $W_t^0$  es un “ruido común”, y  $|\rho| \leq 1$  corresponde al coeficiente de correlación entre el ruido común  $W_t^0$  y los ruidos  $W_t^i$ . El sistema inicia en el instante  $t = 0$  desde estados aleatorios i.i.d.  $X_0^i = \xi^i$ , que se asumen independientes de los movimientos Brownianos estándar y que satisfacen  $E[\xi^i] = 0$ . Se asume que los coeficientes de difusión son constantes e idénticos, denotados por  $\sigma > 0$ . En este modelo de préstamos y créditos se introduce la interacción a través de los términos de deriva que representan la tasa a la cual el banco  $i$  pide prestado o presta al banco  $j$ , y la tasa a la que el banco  $i$  pide prestado o presta al banco central. En este caso, las tasas son proporcionales a la diferencia entre las log-reservas monetarias. El modelo para la dinámica de las log-reservas es entonces:

$$dX_t^i = \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (X_t^j - X_t^i) dt + \alpha_t^i dt + \sigma d\widehat{W}_t^i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (1)$$

donde la tasa general de “reversión a la media”  $a/N$  ha sido normalizada por el

número de bancos con  $a \geq 0$ . El banco  $i$  controla su tasa de préstamos/créditos al banco central a través de la tasa de control  $\alpha_t^i$ . Utilizando la notación:

$$\bar{X}_t := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_t^j \quad (2)$$

para la media empírica de las log-reservas monetarias, la dinámica puede ser reescrita en la forma:

$$dX_t^i = [a(\bar{X}_t - X_t^i) + \alpha_t^i]dt + \sigma d\hat{W}_t^i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \quad (3)$$

Cada banco  $i \in \{1, \dots, N\}$  controla su tasa de préstamos y créditos en  $t$  seleccionando el control  $\alpha_t^i$  con el objetivo de minimizar:

$$J^i(\alpha^1, \dots, \alpha^N) = E \left[ \int_0^T f_i(X_t, \alpha_t^i)dt + g_i(X_T^i) \right] \quad (4)$$

donde la función de costo corrido entre 0 y  $T$ , es definida por:

$$f_i(x, \alpha^i) = \left[ \frac{1}{2}(\alpha^i)^2 - q\alpha^i(\bar{x} - x^i) + \frac{\epsilon}{2}(\bar{x} - x^i)^2 \right] \quad (5)$$

y la función de costo terminal está dada por:

$$g_i(x) = \frac{c}{2}(\bar{x} - x^i)^2 \quad (6)$$

Nótese que el costo cuadrático entre 0 y  $T$ ,  $\frac{1}{2}(\alpha_i)^2$  ha sido normalizado y que el efecto del parámetro  $q > 0$  es controlar el incentivo para pedir prestado o prestar; el banco  $i$  querrá pedir prestado ( $\alpha_t^i > 0$ ) si  $X_t^i$  es menor que la media empírica  $\bar{X}_t$  y prestar ( $\alpha_t^i < 0$ ) si  $X_t^i$  es mayor que  $\bar{X}_t$ . El parámetro  $q > 0$ , puede interpretarse como un control por parte del regulador del costo de pedir prestado o prestar.

Los términos cuadráticos en la función de costo corrido y costo terminal,  $(\bar{x} - x^i)^2$ , con  $\epsilon > 0$  y  $c > 0$ , penalizan alejarse del promedio. Se asume que:

$$q^2 \leq \epsilon \quad (7)$$

por lo que  $f_i(x, \alpha)$  es convexa en  $(x, \alpha)$ .

En la misma lógica de los modelos estructurales de incumplimiento o *default*, se introduce un nivel de incumplimiento  $D < 0$  y decimos que el banco

$i$  incurre en incumplimiento antes del momento  $T$  si su log-reserva monetaria alcanza o cae por debajo del nivel  $D$  antes del instante  $T$ . Cabe señalar que, en este modelo simple, incluso después de alcanzar el nivel de incumplimiento, el banco  $i$  permanece en el sistema hasta el tiempo  $T$  y continúa participando en las actividades de préstamos y créditos con los otros bancos y con el banco central.

El artículo está organizado de la siguiente manera. En la sección 1 se replican los resultados del modelo descriptivo presentado en Fouque y Langsam (2013) sin considerar controles, es decir,  $\alpha_t^i = 0$ . Se ilustra el hecho de que los préstamos y créditos interbancarios crean estabilidad, y se define y cuantifica el riesgo sistémico. La sección 2 está dedicada al análisis del juego diferencial estocástico descrito por (3) y (4). Se derivan los equilibrios exactos de Nash para los modelos de bucle abierto, así como para los modelos de bucle cerrado Markovianos, utilizando enfoques tanto probabilísticos como analíticos. Las implicaciones financieras en términos de liquidez y el rol de un banco central se discuten en la sección 3.

## 1. Estabilidad y riesgo sistémico

En esta sección consideramos un sistema de  $N$  bancos sin la posibilidad de pedir prestado o prestar a un banco central, es decir:

$$\begin{aligned} dX_t^i &= \frac{a}{N} \sum_{j=1}^N (X_t^j - X_t^i) dt + \sigma d\widehat{W}_t^i \\ &= a(\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma d\widehat{W}_t^i \quad ; \quad i = 1, \dots, N \end{aligned} \quad (8)$$

Inicialmente asumimos que los movimientos Brownianos  $\widehat{W}^i$  son independientes, es decir,  $\rho = 0$  y  $\widehat{W}^i = W^i$ . Por simplicidad también asumimos que  $X_0^i = \xi^i = 0$ .

### 1.1. Simulaciones

En la figura 1 se muestran realizaciones típicas de las  $N$  trayectorias con una tasa relativamente alta de préstamos/créditos  $a = 10$ , siendo el coeficiente de difusión  $\sigma = 1$  (utilizamos el esquema de Euler con un paso de tiempo  $\Delta t = 10^{-4}$ , hasta el tiempo  $T = 1$ ). Vemos que las trayectorias generadas por (8) están

más agrupadas que las generadas por movimientos Brownianos independientes correspondientes a la ausencia de préstamos o créditos interbancarios ( $a = 0$ ), lo que muestra que el efecto de “enjambre” o “formación” es más pronunciado para una tasa  $a$  mayor. En consecuencia, menos (o casi ninguna) trayectoria alcanzará el nivel de incumplimiento  $D$ , lo que crea estabilidad en el sistema.

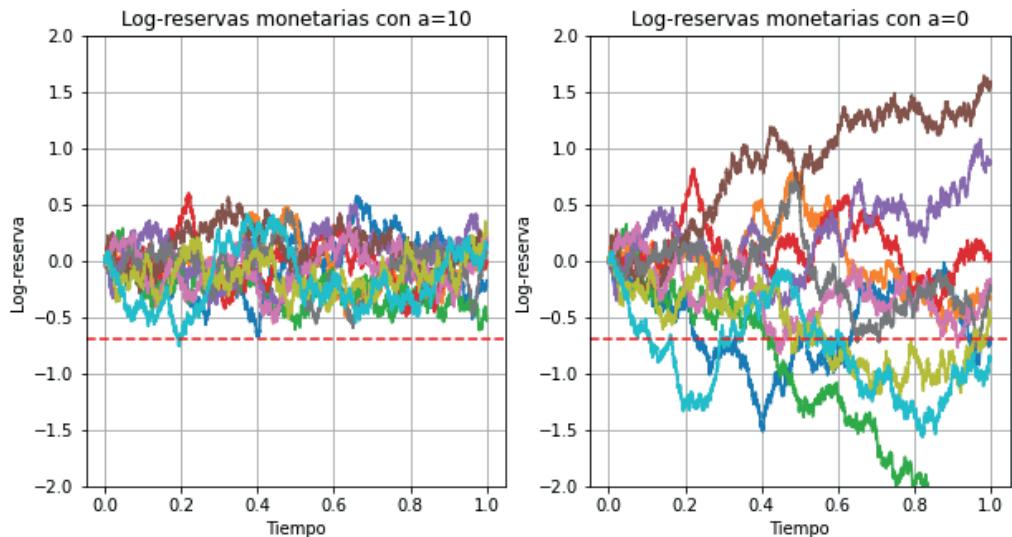


Figura 1. Realización de  $N = 10$  trayectorias de las difusiones acopladas (8) con  $a = 10$  (gráfico de la izquierda) y trayectorias de movimientos Brownianos independientes ( $a = 0$ ) (gráfico de la derecha) utilizando los mismos incrementos Gaussianos. La línea horizontal punteada representa el nivel de “incumplimiento”  $D = -0,7$ .

A continuación, comparamos la distribución de pérdidas (distribución del número de incumplimientos) para los casos acoplado e independiente. Calculamos estas distribuciones de pérdidas por el método de Monte Carlo usando  $10^4$  simulaciones, considerando los mismos parámetros anteriores. En el caso independiente ( $a = 0$ ), la distribución de pérdidas es Binomial ( $N, p$ ) con el parámetro  $p$  dado por:

$$p = \mathbb{P} \left( \min_{0 \leq t \leq T} (\sigma W_t) \leq D \right) = 2\Phi \left( \frac{D}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

donde  $\Phi$  denota la función de distribución acumulada de una distribución normal estándar, y usamos la distribución explícitamente conocida del mínimo de un

movimiento Browniano. Con nuestra elección de parámetros tenemos  $p \approx 0,48$ , mientras que al aumentar  $a$ , es decir, la tasa de préstamos y créditos interbancarios, se desplaza la mayor parte de la masa hacia cero incumplimientos, específicamente, con  $a = 10$  la probabilidad de incumplimiento estimada es de 0,05, en otras palabras, mejora la estabilidad del sistema al mantener las difusiones cerca de cero (alejadas del incumplimiento) la mayor parte del tiempo.

## 1.2. Comportamiento en el límite

De la ecuación (8) vemos que el proceso  $X_t^i$  es un proceso Ornstein-Uhlenbeck (OU) que revierte a una media dada por su promedio conjunto  $\bar{X}_t$ . Sumando las ecuaciones en (8) y utilizando  $X_0^i = 0$  para  $i = 1, \dots, N$  se tiene que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N dX_t^i &= \sum_{i=1}^N [a(\bar{X}_t - X_t^i)dt + \sigma dW_t^i] \\ &= aN \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^i dt - a \sum_{i=1}^N X_t^i dt + \sigma \sum_{i=1}^N dW_t^i \\ &= \sigma \sum_{i=1}^N dW_t^i \end{aligned}$$

integrado a ambos lados,

$$\begin{aligned} \int_0^t \sum_{i=1}^N dX_t^i &= \int_0^t \sigma \sum_{i=1}^N dW_t^i \\ \sum_{i=1}^N X_t^i &= \sigma \sum_{i=1}^N W_t^i \end{aligned}$$

y dividiendo entre  $N$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^i &= \frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i \\ \bar{X}_t &= \frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i \end{aligned} \tag{9}$$

luego, el promedio conjunto se distribuye como un movimiento Browniano con coeficiente de difusión  $\sigma/\sqrt{N}$  independiente de  $a$ . En el límite, cuando  $N \rightarrow \infty$ , por la ley fuerte de los grandes números se tiene, casi seguramente, que:

$$\frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i \rightarrow 0 \quad (10)$$

De forma más general, a partir de (8), se tiene que el proceso  $X_t^i$  cumple:

$$\begin{aligned} dX_t^i &= a(\bar{X}_t - X_t^i)dt + \sigma dW_t^i \\ dX_t^i + aX_t^i dt &= a\bar{X}_t dt + \sigma dW_t^i \\ \frac{d}{dt} [e^{at} X_t^i] &= ae^{at} \bar{X}_t dt + \sigma e^{at} dW_t^i \\ (e^{as} X_s^i) \Big|_0^t &= \underbrace{\int_0^t ae^{as} \bar{X}_s ds}_{(A)} + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s^i \end{aligned}$$

Utilizando integración por partes en (A) con  $u = \bar{X}_s$  y  $dv = e^{as}ds$ , luego,  $du = \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N dW_s^j$  y  $v = \frac{e^{as}}{a}$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t ae^{as} \bar{X}_s ds &= a \left[ \left( \frac{\bar{X}_s e^{as}}{a} \right) \Big|_0^t - \int_0^t \frac{e^{as}}{a} \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N dW_s^j \right] \\ &= \bar{X}_t e^{at} - \frac{\sigma}{N} \left( \int_0^t \sum_{j=1}^N e^{as} dW_s^j \right) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
 e^{at} X_t^i &= \bar{X}_t e^{at} - \frac{\sigma}{N} \left( \int_0^t \sum_{j=1}^N e^{as} dW_s^j \right) + \sigma \int_0^t e^{as} dW_s^i \\
 X_t^i &= \bar{X}_t - \frac{\sigma}{N} e^{-at} \int_0^t \sum_{j=1}^N e^{as} dW_s^j + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s^i \\
 X_t^i &= \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N W_t^j + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s^i - \frac{\sigma}{N} \sum_{j=1}^N e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s^j
 \end{aligned} \quad (11)$$

lo que muestra que si  $N \rightarrow \infty$ , el proceso converge a procesos OU independientes  $\sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s^i$ . Este es un ejemplo sencillo de un límite de campo medio.

### 1.3. Grandes desviaciones y riesgo sistémico

En esta sección consideramos el evento donde el promedio del conjunto dado por (9) alcanza el nivel de incumplimiento. La probabilidad de este evento es pequeña (cuando  $N$  se vuelve grande) y está dada por la teoría de grandes desviaciones<sup>1</sup>.

En el caso considerado en este trabajo, esta probabilidad puede calcularse explícitamente de la siguiente manera:

---

<sup>1</sup>La teoría de grandes desviaciones es un conjunto de principios matemáticos que describe el comportamiento de la probabilidad de eventos raros en sistemas con múltiples variables aleatorias. Esta teoría se centra en cómo dichas probabilidades decrecen exponencialmente a medida que el número de variables o el tiempo aumenta. En esencia, proporciona una forma de cuantificar la rapidez con la que estas probabilidades se hacen extremadamente pequeñas. Algunos conceptos clave de esta teoría son:

- Eventos raros: eventos que son poco probables bajo distribuciones normales o conocidas.
- Función de tasa  $I(x)$ : describe la tasa de decaimiento de la probabilidad de eventos raros.
- Decaimiento exponencial: para valores grandes de  $N$ , la probabilidad de que una suma promedio de  $N$  variables aleatorias alcance un valor extremo decrece aproximadamente como  $e^{-NI(x)}$ , donde  $I(x)$  es la función de tasa.

En el contexto del movimiento Browniano, la teoría de grandes desviaciones permite estimar la probabilidad de que el promedio de  $N$  movimientos Brownianos alcance un valor extremo, como un nivel de default  $D$ .

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left( \min_{0 \leq t \leq T} \left( \frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i \right) \leq D \right) &= \mathbb{P} \left( \min_{0 \leq t \leq T} \widetilde{W}_t \leq \frac{D\sqrt{N}}{\sigma} \right) \\
 &= 2\Phi \left( \frac{D\sqrt{N}}{\sigma\sqrt{T}} \right)
 \end{aligned} \tag{12}$$

donde  $\widetilde{W}$  es un movimiento Browniano estándar y  $\Phi$  es la función de distribución acumulada de una normal estándar. Por lo tanto, utilizando el equivalente clásico para la función de distribución acumulativa Gaussiana, obtenemos:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} -\frac{1}{N} \log \mathbb{P} \left( \min_{0 \leq t \leq T} \left( \frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i \right) \leq D \right) = \frac{D^2}{2\sigma^2 T} \tag{13}$$

En otras palabras, para un gran número de bancos, la probabilidad de que el promedio del conjunto alcance la barrera de incumplimiento es del orden de  $\exp(-D^2/(2\sigma^2 T))$ .

Partiendo de la ecuación (9), se identifica

$$\left\{ \min_{0 \leq t \leq T} \bar{X}_t \leq D \right\} \tag{14}$$

como un *evento sistémico*. Es importante notar que este no depende de  $a > 0$ , es decir, aumentar la estabilidad incrementando la tasa de préstamo y endeudamiento  $a$  no previene un evento sistémico donde un gran número de bancos quiebra. De hecho, una vez en este evento, aumentar  $a$  genera aún más quiebras al “converger hacia el incumplimiento”. En resumen, este modelo simple con dinámicas prescritas (sin juego) y ruidos independientes muestra que “prestar y pedir prestado mejora la estabilidad, pero también contribuye al riesgo sistémico”.

## 1.4. Riesgo sistémico y ruido común

En esta sección consideramos el modelo con difusiones acopladas descritas por movimientos Brownianos correlacionados  $\widehat{W}_t^i$  y sin control ( $\alpha^i = 0$ ). De la dinámica descrita por (3) se tiene que:

$$\begin{aligned} dX_t^i &= a(\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma d\widehat{W}_t^i \\ &= a\left(\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_t^j - X_t^i\right) dt + \sigma\left(\rho dW_t^0 + \sqrt{1-\rho^2} dW_t^i\right) \end{aligned} \quad (15)$$

donde  $W_t^0$  y  $W_t^i$  para  $i = 1, \dots, N$  son movimientos Brownianos independientes y  $W_t^0$  es un ruido común. Como en la sección anterior, se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_t^i &= \frac{\sigma}{N} \sum_{i=1}^N \widehat{W}_t^i = \sigma\left(\rho W_t^0 + \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{N} \sum_{i=1}^N W_t^i\right) \\ &\stackrel{d}{=} \sigma \sqrt{\rho^2 + \frac{1-\rho^2}{N}} B_t \end{aligned} \quad (16)$$

donde  $B_t$  es un movimiento Browniano estándar. En este caso, la solución explícita para  $X_t^i$  es:

$$X_t^i = \sigma\rho W_t^0 + \sigma\sqrt{1-\rho^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N W_t^j + \int_0^t e^{a(s-t)} dW_s^i - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \int_0^t e^{a(s-t)} dW_s^j \right) \quad (17)$$

y la probabilidad del evento sistémico (14) está dada por:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq s \leq T} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_s^i < D\right) &= \mathbb{P}\left(\min_{0 \leq s \leq T} B_s < \frac{D}{\sigma} \sqrt{\frac{N}{N\rho^2 + (1-\rho^2)}}\right) \\ &= 2\Phi\left(\frac{D}{\sigma\sqrt{T}} \sqrt{\frac{N}{N\rho^2 + (1-\rho^2)}}\right) \end{aligned} \quad (18)$$

De (18) se puede ver que en el caso correlacionado ( $\rho \neq 0$ ), la probabilidad de riesgo sistémico no tiende a cero cuando  $N$  crece, sino que tiende a  $2\Phi\left(\frac{D}{\sigma\sqrt{T}|\rho|}\right)$ , lo que contrasta con el caso no correlacionado  $\rho = 0$ , donde la probabilidad de riesgo sistémico decrece exponencialmente con  $N$ .

## 2. Juego diferencial estocástico

Ahora consideramos el modelo donde cada banco controla su tasa de préstamo y endeudamiento, y buscamos los equilibrios de Nash del sistema descrito por (3)-(6). Primero construimos equilibrios de *loop* abierto<sup>2</sup> utilizando el principio de máximo estocástico de Pontryagin, lo que lleva naturalmente a la solución de ecuaciones diferenciales estocásticas hacia adelante y hacia atrás. A continuación, construimos equilibrios de *loop* cerrado<sup>3</sup> Markovianos utilizando dos enfoques diferentes: el primero basado en una versión modificada del principio de máximo estocástico de Pontryagin utilizado en el caso de *loop* abierto, y el otro basado en el principio de programación dinámica que conduce a la solución de las ecuaciones en diferenciales parciales de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). En todos los casos buscamos encontrar un equilibrio para el siguiente problema de préstamo y endeudamiento. Las dinámicas de las log-reservas  $X_t^i$  para  $i = 1, \dots, N$  son de la forma:

$$dX_t^i = [a(\bar{X}_t - X_t^i) + \alpha_t^i]dt + \sigma \left( +\rho dW_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i \right) \quad (19)$$

donde  $W_t^i$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ , son movimientos Brownianos independientes,  $\sigma > 0$  y  $a \geq 0$ . El banco  $i \in \{1, \dots, N\}$  controla su tasa de préstamo y endeudamiento (con el banco central) en el tiempo  $t$  eligiendo el control  $\alpha_t^i$  para minimizar:

$$J^i(\alpha^1, \dots, \alpha^N) = E \left[ \int_0^T f_i(X_t, \alpha_t^i)dt + g_i(X_T^i) \right] \quad (20)$$

con:

$$f_i(x, \alpha^i) = \left[ \frac{1}{2}(\alpha^i)^2 - q\alpha^i(\bar{x} - x^i) + \frac{\epsilon}{2}(\bar{x} - x^i)^2 \right] \quad (21)$$

$$g_i(x) = \frac{c}{2}(\bar{x} - x^i)^2 \quad (22)$$

y donde  $f_i(x, \alpha)$  es convexa en  $(x, \alpha)$  bajo el supuesto  $q^2 < \epsilon$ .

<sup>2</sup>En la teoría de juegos de campo medio un equilibrio de Nash de *loop* abierto es un concepto utilizado para describir las estrategias óptimas de los jugadores en un juego dinámico en el que cada jugador toma decisiones a lo largo del tiempo, pero estas no dependen del estado actual del sistema, con lo cual cada jugador elige una estrategia que es una función del tiempo predeterminada desde el inicio del juego.

<sup>3</sup>Un equilibrio de *loop* cerrado es un tipo de equilibrio en juegos dinámicos donde las estrategias de los jugadores dependen del estado actual del sistema en cada momento del tiempo, no solo del tiempo en sí. En este equilibrio, los jugadores ajustan continuamente sus decisiones en función de cómo evoluciona el estado del sistema.

## 2.1. Equilibrio de *loop* abierto

En el caso determinístico ( $\sigma = 0$ ), el problema de *loop* abierto corresponde a buscar un equilibrio entre las estrategias que son funciones (determinísticas)  $\alpha_t^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , dadas en el tiempo  $t = 0$  y de las cuales se deducen  $(X_t^i)$ ,  $i = 1, \dots, N$  mediante la ecuación (19).

En el caso estocástico ( $\sigma > 0$ ), el problema de *loop* abierto consiste en buscar un equilibrio entre las estrategias  $\alpha_t^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , que son procesos adaptados que satisfacen alguna propiedad de integrabilidad, como  $\mathbb{E} \left[ \int_0^T |\alpha_t^i| dt \right] < \infty$ , y lo más importante, de las cuales se deducen las dinámicas de  $X_t^i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , mediante la ecuación (19).

Usando el enfoque de Pontryagin, el Hamiltoniano para el banco  $i$  está dado por:

$$\begin{aligned} H^i(x_1, \dots, x_N, y^{i,1}, \dots, y^{i,N}, \alpha^1, \dots, \alpha^N) \\ = \sum_{k=1}^N [a(\bar{x} - x^k) + \alpha^k] y^{i,k} + \frac{1}{2}(\alpha^i)^2 - q\alpha^i(\bar{x} - x^i) + \frac{\epsilon}{2}(\bar{x} - x^i)^2 \end{aligned} \quad (23)$$

Las dinámicas hacia adelante de los estados pueden ser reescritas como:

$$dX_t^i = \partial_{y^{i,i}} H^i(X_t, Y_t^i, \alpha^t) dt + \sigma \left( \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i + \rho dW_t^0 \right) \quad (24)$$

con condiciones iniciales  $X_0^i = x_i$ . Aunque no aparecen (aún) en las dinámicas hacia adelante, los procesos  $Y_t^i = (Y_t^{i,j}, j = 1, \dots, N)$  son los procesos adjuntos que satisfacen las ecuaciones hacia atrás:

$$dY_t^{i,j} = -\partial_{x^j} H^i(X_t, Y_t^i, \alpha^t) dt + \sum_{k=0}^N Z_t^{i,j,k} dW_t^k \quad (25)$$

con condiciones terminales  $Y_T^{i,j} = \partial_{x_j} g_i(X_T)$  y donde los procesos  $Z_t^{i,j,k}$  son adaptados y cuadrado integrables. La condición necesaria del principio de máximo estocástico de Pontryagin sugiere que se minimiza el Hamiltoniano  $H^k$  con respecto a  $\alpha^k$ , lo que lleva a la elección:

$$\hat{\alpha}^k = -y^{k,k} + q(\bar{x} - x^k) \quad (26)$$

Para demostrar que estos candidatos realmente forman un equilibrio de Nash, asumimos que todos los jugadores están tomando esa elección, y dejamos que el jugador  $i$  encuentre su mejor respuesta resolviendo la ecuación diferencial estocástica hacia atrás (BSDE) (25) para identificar su propio proceso adjunto. Las derivadas parciales del Hamiltoniano  $H^i$  son:

$$\partial_{y^{i,i}} H_i = (a + q)(\bar{x} - x^i) - y^{i,i}$$

$$\partial_{x^i} H^i = \frac{a + q}{N} \sum_{k=1}^N (y^{i,k} - y^{i,j}) + (\epsilon - q^2)(\bar{x} - x^i) \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right)$$

donde usamos la notación usual  $\delta_{i,j} = 1$  si  $i = j$  y  $\delta_{i,j} = 0$  si  $i \neq j$ .

La forma particular del Hamiltoniano  $H^i$  y las condiciones terminales para las ecuaciones hacia atrás sugieren el ansatz:

$$Y_t^{i,j} = \eta_t \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_i^t) \quad (27)$$

donde  $\eta_t$  es una función determinista que satisface la condición terminal  $\eta_T = c$ . Usando este ansatz, con algunos cálculos se tiene que las ecuaciones hacia atrás (25) se convierten en:

$$dY_t^{i,j} = \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_t^i) [(a + q)\eta_t - (\epsilon - q^2)] dt + \sum_{k=0}^N Z_t^{i,j,k} dW_t^k \quad (28)$$

La ecuación hacia adelante (24) se convierte en:

$$dX_t^i = \left[ a + q + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \eta_t \right] (\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma \left( \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i + \rho dW_t^0 \right) \quad (29)$$

lo que sumando da:

$$d\bar{X}_t = \sigma \rho dW_t^0 + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N dW_t^k \right) \quad (30)$$

Como resultado, obtenemos:

$$d(\bar{X}_t - X_t^i) = - \left[ a + q + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \eta_t \right] (\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N dW_t^k - dW_t^i \right) \quad (31)$$

Derivando el ansatz (27) y utilizando (31), obtenemos:

$$\begin{aligned} dY_t^{i,j} &= \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_t^i) \left[ \dot{\eta}_t - \eta_t \left( a + q + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \eta_t \right) \right] dt \\ &\quad + \eta_t \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \left( \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N dW_t^k - dW_t^i \right) \end{aligned} \quad (32)$$

donde  $\dot{\eta}_t$  denota la derivada temporal de  $\eta_t$ . Comparando las dos descomposiciones de Itô (28) y (32), los términos martingala proporcionan los procesos  $Z_t^{i,j,k}$ :

$$Z_t^{i,j,0} = 0, \quad Z_t^{i,j,k} = \eta_t \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,k} \right), \quad \text{para } k = 1, \dots, N$$

lo cual resulta ser determinista en nuestro caso y, por lo tanto, adaptado. Identificando los términos de deriva, se muestra que la función  $\eta_t$  debe satisfacer la ecuación escalar de Riccati:

$$\dot{\eta}_t = 2(a + q)\eta_t + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \eta_t^2 - (\epsilon - q^2)$$

con la condición terminal  $\eta_T = c$ . Esta ecuación se puede resolver explícitamente. La interpretación financiera de este equilibrio, que será similar a la de un equilibrio de bucle cerrado, se presenta más adelante.

Se observa que la forma (26) del control  $\alpha_t$ , y la suposición (27) combinan para dar:

$$\alpha_t = \left[ q + \eta_t \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \right] (\bar{X}_t - X_t^i) \quad (33)$$

Es interesante señalar que estos controles, aunque construidos para formar un equilibrio de *loop* abierto, en realidad están en forma de retroalimentación de *loop* cerrado. En este equilibrio, cada banco  $i$  puede implementar su estrategia conociendo  $\bar{X}_t - X_t^i$ , y dado que se necesita esta observación, es natural buscar equilibrios cuando las estrategias admisibles permiten el uso de esta, es decir, estrategias de bucle cerrado.

## 2.2. Equilibrios de *loop* cerrado

En esta sección resolvemos un equilibrio de Nash exacto en forma de *loop* cerrado cuando los jugadores/bancos en el tiempo  $t$  tienen información completa sobre los estados de todos los demás jugadores en el mismo tiempo  $t$ , es decir, permitimos estrategias de retroalimentación.

En este contexto, cuando todos los demás jugadores han elegido estrategias en forma de retroalimentación dadas por funciones deterministas  $\alpha^k(t, x)$  del tiempo y el estado, el Hamiltoniano del jugador  $i$  se da por:

$$\begin{aligned} H^i(x, y^{i,1}, \dots, y^{i,N}; \alpha^1(t, x), \dots, \alpha^i(t, x), \dots, \alpha^N(t, x)) \\ = \sum_{k \neq i} [a(\bar{x} - x^k) + \alpha^k(t, x)] y^{i,k} + [a(\bar{x} - x^i) + \alpha^i] y^{i,i} \\ + \frac{1}{2}(\alpha^i)^2 - q\alpha^i(\bar{x} - x^i) + \frac{\epsilon}{2}(\bar{x} - x^i)^2. \end{aligned} \quad (34)$$

Como en el caso de *loop* abierto, pero ahora con el Hamiltoniano (34), las dinámicas hacia adelante de los estados para  $i = 1, \dots, N$  se dan por (24), y las ecuaciones hacia atrás son como en (25). Minimizar  $H^i$  sobre  $\alpha^i$  da las elecciones:

$$\hat{\alpha}^i = -y^{i,i} + q(\bar{x} - x^i), \quad i = 1, \dots, N; \quad (35)$$

y nuevamente hacemos el ansatz

$$Y_t^{i,j} = \eta_t \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_t^i) \quad (36)$$

donde  $\eta_t$  es una función determinista que satisface la condición terminal  $\eta_T = c$ . Con las elecciones (35) obtenemos:

$$\begin{aligned} \alpha^k(t, x) &= \left( q + \eta_t \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \right) (\bar{x} - x^k) \\ \partial_{x^j} \alpha^k(t, x) &= \left( q + \eta_t \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \right) \left( \frac{1}{N} - \delta_{k,j} \right) \end{aligned}$$

y después de algunos cálculos, usando el Hamiltoniano (34), las ecuaciones hacia atrás se reducen a:

$$\begin{aligned}
dY_t^{i,j} &= -\partial_{x^j} H^i dt + \sum_{k=0}^N Z_t^{i,j,k} dW_t^k \\
&= \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_t^i) \left[ (a + q) \eta_t - \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N} - 1 \right) \eta_t^2 + q^2 - \epsilon \right] dt \\
&\quad + \sum_{k=0}^N Z_t^{i,j,k} dW_t^k
\end{aligned} \tag{37}$$

con condiciones terminales  $Y_T^{i,j} = c \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_T - X_T^i)$ .

Las ecuaciones hacia adelante se convierten en:

$$\begin{aligned}
dX_t^i &= \partial_{y^{i,i}} H^i dt + \sigma \left( \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i + \rho dW_t^0 \right) \\
&= \left[ a + q + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \eta_t \right] (\bar{X}_t - X_t^i) dt + \sigma \left( \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^i + \rho dW_t^0 \right)
\end{aligned} \tag{38}$$

y sumando se deduce:

$$d\bar{X}_t = \sigma \left( \rho dW_t^0 + \sqrt{1 - \rho^2} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N dW_t^k \right) \tag{39}$$

Diferenciando la ansatz (36) y usando la forma (38)-(39) de las dinámicas hacia adelante, obtenemos:

$$\begin{aligned}
dY_t^{i,j} &= \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) (\bar{X}_t - X_t^i) \left[ \dot{\eta}_t - \eta_t \left( a + q + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \eta_t \right) \right] dt \\
&\quad + \eta_t \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \sum_{k=1}^N \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,k} \right) dW_t^k
\end{aligned} \tag{40}$$

A continuación, identificando término a término las dos descomposiciones de Itô (37) y (40), obtenemos de los términos de martingala:

$$Z_t^{i,j,0} = 0; \quad Z_t^{i,j,k} = \eta_t \sigma \sqrt{1 - \rho^2} \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,j} \right) \left( \frac{1}{N} - \delta_{i,k} \right) \quad \text{para } k = 1, \dots, N$$

que son efectivamente adaptados e integrables en cuadrado, y de los términos de deriva:

$$\dot{\eta}_t - \eta_t \left( a + q + \left( 1 - \frac{1}{N} \right) \eta_t \right) = (a + q) \eta_t - \frac{1}{N} \left( \frac{1}{N} - 1 \right) \eta_t^2 + q^2 - \epsilon$$

Por lo tanto,  $\eta_t$  debe satisfacer la ecuación de Riccati escalar

$$\dot{\eta}_t = 2(a + q) \eta_t + \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right) \eta_t^2 - (\epsilon - q^2) \quad (41)$$

con la condición terminal  $\eta_T = c$ . La ecuación (41) admite la solución:

$$\eta_t = \frac{-(\epsilon - q^2) \left( e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - 1 \right) - c \left( \delta^+ e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - \delta^- \right)}{(\delta^- e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - \delta^+) - c \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right) \left( e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - 1 \right)} \quad (42)$$

donde usamos la notación

$$\delta^\pm = -(a + q) \pm \sqrt{R} \quad (43)$$

con

$$R := (a + q)^2 + \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right) (\epsilon - q^2) > 0 \quad (44)$$

Se observa que  $\eta_t$  está bien definida para cualquier  $t \leq T$  ya que el denominador en (42) se puede escribir como:

$$- \left( e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} + 1 \right) \sqrt{R} - \left( a + q + c \left( 1 - \frac{1}{N^2} \right) \right) \left( e^{(\delta^+ - \delta^-)(T-t)} - 1 \right) \quad (45)$$

que permanece negativo porque  $\delta^+ - \delta^- = 2\sqrt{R} > 0$ . De hecho, usando  $q^2 \leq \epsilon$ , vemos que  $\eta_t$  es positiva con  $\eta_T = c$ . El enfoque de programación dinámica del problema produce el mismo equilibrio que el obtenido en esta sección.

### 3. Implicaciones financieras

Los siguientes comentarios son realizados en el caso del equilibrio de *loop* cerrado con la función  $\eta_t$ , y son idénticos en el caso del equilibrio de *loop* abierto con  $\eta_t$  reemplazado por  $\varphi_t$ .

1. Una vez que se ha obtenido la función  $\eta_t$  en (42), el banco  $i$  implementa su estrategia utilizando su control  $\hat{\alpha}^i$  dado por:

$$\hat{\alpha}^i = q(\bar{X}_t - X_t^i) - \partial_{x^i} V^i \quad (46)$$

con ansatz,

$$V^i(t, x) = \frac{\eta_t}{2}(\bar{x} - x^i)^2 + \mu_t \quad (47)$$

donde  $\eta_t$  y  $\mu_t$  son funciones determinísticas que satisfacen  $\eta_T = 0$  y  $\mu_T = 0$ . Esto requiere conocer su propia reserva logarítmica  $X_i(t)$ , pero también la reserva promedio  $\bar{X}_t$ , que puede o no ser conocida por el banco individual  $i$ . Se observa que la reserva promedio  $\bar{X}_t$  está dada por (39) y es idéntica al promedio encontrado en la sección anterior, por lo tanto, el riesgo sistémico ocurre de la misma manera que en el caso de dinámicas no controladas, con o sin ruido común.

2. El efecto de que los bancos usen sus estrategias óptimas corresponde al préstamo y endeudamiento interbancario a la tasa efectiva incrementada

$$A_t := a + q + \left(1 - \frac{1}{N}\right) \eta_t$$

sin banco central (o con un banco central actuando como una cámara de compensación instantánea). Como consecuencia, bajo este equilibrio, el sistema está operando como si los bancos estuvieran tomando prestado y prestando entre sí a la tasa  $A_t$ , y el efecto neto es una liquidez adicional cuantificada por la tasa de préstamo/endeudamiento.

3. Nótese que el comentario anterior es válido no solo si  $a > 0$ , en cuyo caso el efecto del juego es aumentar la tasa de préstamo y endeudamiento interbancario; si  $a = 0$ , el efecto del juego es “crear” una actividad de préstamo y endeudamiento interbancario. En ambos casos, el banco central actúa como una cámara de compensación, pero necesita proporcionar la información  $\bar{X}_t$  para que los bancos individuales puedan implementar sus estrategias.

4. Se observa que la presencia de un ruido común (cuantificado por  $\rho$ ) no afecta la forma de las estrategias óptimas (la función  $\eta_t$  no depende de  $\rho$ ). Sin embargo, afecta la función de valor  $V^i(t, x)$  y la dinámica  $X_i(t)$ , luego tiene un efecto drástico sobre el riesgo sistémico.

## Referencias

- Acharya, V. V., Pedersen, L. H., Philippon, T., y Richardson, M. (2017). Measuring systemic risk. *The Review of Financial Studies*, 30(1), 2–47.
- Carmona, R., Fouque, J.-P., y Sun, L.-H. (2013). Mean field games and systemic risk. *arXiv preprint arXiv:1308.2172*.
- Fouque, J.-P., y Langsam, J. A. (2013). *Handbook on systemic risk*. Cambridge University Press.
- Haldane, A. G., y May, R. M. (2011). Systemic risk in banking ecosystems. *Nature*, 469(7330), 351–355.
- Kaufman, G. G., y Scott, K. E. (2003). What is systemic risk, and do bank regulators retard or contribute to it? *The Independent Review*, 7(3), 371–391.
- Moreno Trujillo, J. F. (2022). Una nota introductoria a los juegos de campo medio. teoría y algunas aplicaciones. *ODEON*(22).