Juegos y finanzas

Jorge Luis Ferro* - Darío Peña**

*Profesor en las áreas de teoría de juegos y manejo de riesgo facultades de Economía, Derecho y Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales, Universidad Externado de Colombia.
Director del Departamento de Matemáticas.
E-mail: ljferro@uexternado.edu.co

**Economista y matemático, asistente del profesor Luis Jorge Ferro, Universidad Externado de Colombia

1. ANTECEDENTES HISTÓRICOS[1]

Se reconoce [JP04], [DS01], [MS00], [Bou98], que el precursor en el análisis de la valoración de derivados es el matemático francés Louis Bachellier (1870-1946), quien en 1900, bajo la dirección de Henri Poincaré, realizó su tesis doctoral *Théorie de la spéculation,* en la cual analiza el mercado de opciones en la Bolsa de París. Las fórmulas que Bachellier desarrolló, y que en sus trabajos posteriores profundizó, sugieren que el proceso estocástico que gobierna el precio de las mercancías es el proceso markoviano continuo que hoy se denomina movimiento browniano. Varias décadas más tarde, la aproximación de Bachellier fue modificada a raíz del hecho que el movimiento browniano eventualmente toma valores negativos, lo cual no tiene sentido en el caso del precio de un activo.

La modificación resultante aclara que si bien el precio del activo no puede estar gobernado por el proceso estocástico sugerido, el movimiento browniano sí podría caracterizar al componente aleatorio de la dinámica de la tasa de retorno del activo. En efecto, bajo este nuevo enfoque la dinámica del activo estaría determinada por la ecuación diferencial estocástica

$$\frac{dS}{S}\ \mu dt + \sigma dW$$

Donde μ representa la tasa esperada de crecimiento del activo, σ simboliza la volatilidad del precio, W es un movimiento browniano estándar. Este proceso no se rige por las reglas usuales del cálculo diferencial, sino por un conjunto de reglas algo distintas, apropiadas para el cálculo con variables estocásticas, conocidas en su conjunto como cálculo de Ito[2].

De esta forma si D denota el precio de un derivado con activo subyacente S, a partir del lema de Ito se obtiene que la dinámica de D se determina por la siguien-

Artículo recibido el 12 de diciembre de 2004. Aceptado el 25 de enero de 2005.

[1] Esta reseña histórica está lejos de considerarse como exhaustiva, se limita únicamente a los resultados concernientes con los modelos de la segunda sección.

[2] Un proceso estocástico [Bn03] es una familia X_t, $t \in T$ de variables aleatorias definidas sobre un espacio de probabilidad común.

El movimiento browniano [Bn03] es un proceso estocástico X_t, $t\ [0,\infty]$ que satisface las siguientes condiciones.

1. $X_0 = 0$
2. $X_t N(_t,)$
3. $\mu_t = 0$ para todo $t \in [0,\infty]$
4. X_t, $t > 0$ tiene incrementos estacionarios e independientes
5. $\sigma_t^2 = \sigma^2 t$
6. X_t es continua en casi toda parte

Un proceso estocástico que cumple las anteriores condiciones con $\sigma^2 = 1$ se conoce como Movimiento Browniano Estándar o Proceso de Wiener.

te ecuación diferencial estocástica:

$$\frac{dD}{D} = (\frac{\delta D}{\delta S}\mu + \frac{\delta D}{\delta t} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 D}{\delta S^2}\sigma^2)dt + \sigma\frac{\delta D}{\delta t}dW$$

Con el fin de evitar los tecnicismos asociados a la solución de una ecuación diferencial estocástica, Black y Acholes [BS73] en su famoso artículo sobre la valoración de opciones utilizaron la heurística denominada replicación, a saber la creación de un portafolio a partir del activo subyacente y un activo libre de riesgo, tal que en cualquier instante del tiempo, y bajo cualquier realización de las variables aleatorias, el portafolio produzca los mismos rendimientos que el derivado a valorar.

Utilizando esta estrategia se concluye que la dinámica de un derivado que no genera dividendos está gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 D_{SS} + rSD_S + D_t - rD = 0$$

donde r denota la tasa de interés libre de riesgo.

El proceso de replicación tiene un sitio propio dentro de la actual teoría de finanzas, es una característica que se presenta bajo ciertas especificaciones del modelo del mercado escogido.

Algunos de los trabajos[3] sobre las condiciones suficientes y necesarias para que cualquier derivado en el modelo especificado pueda ser replicado, característica del mercado conocida como completes, dieron como fruto los siguientes dos teoremas, denominados teoremas fundamentales de la valoración de activos financieros, los cuales se citan a continuación en la versión para tiempo discreto y finito.

Primer teorema fundamental[4]

Sea $(\Omega, f, (f_t)^N{}_t P)$ un espacio de probabilidad filtrado y asuma que el proceso R^d-dimensional $(S_t)_{t=0}^N$ es adaptado a la filtración $(\mathcal{F}_t)_{t=0}^N$, entonces el proceso $\mathcal{F}_{t-1}$ satisface la condición de no Arbitraje[5] sí y sólo sí existe al menos una medida martingala equivalente[6].

Intuitivamente, un mercado cumple la condición de no arbitraje sino existe algún portafolio h que brinde ganancias con probabilidad positiva y que genere pérdidas con probabilidad cero.

---

[3] [DS94], [Sch92], [HP81].

[4] [Sch92].

[5] Se dice que el proceso $(S_t)_{t=0}^N$ satisface la condición de no arbitraje si para $t=0,1,2,\ldots,N$ y para cada función h acotada, R^d-valuada y F_{t-1} -medible tal que $\Sigma_{i=1}^d h^i(\omega)\,(S_t^i(\omega) - S_{t-1}^i(\omega)) \geq 0$ con probabilidad 1, se debe tener que $\Sigma_{i=1}^d h^i(\omega)\,(S_t^i(\omega) - S_{t-1}^i(\omega)) = 0$ con probabilidad 1.

[6] Se dice que Q es una medida martingala equivalente a P cuando cualquier evento que tiene probabilidad 0 bajo P también tiene probabilidad 0 bajo Q y viceversa, y adicionalmete $E\left[\frac{S_{t+1}}{B_{t+1}}\mathcal{F}_t\right] = \frac{S_t}{B_t}$, donde B_t denota el activo libre de riesgo.

Segundo teorema fundamental[7]

Suponga que el proceso $(S_t)_{t=0}^{N}$ satisface la condición de no arbitraje, entonces el modelo de mercado es completo sí y sólo sí existe una única medida martingala equivalente.

Estos teoremas permitieron utilizar el bagaje de la teoría de semimartingalas y del análisis estocástico en el modelado de finanzas. Para un análisis de la utilidad de las medidas martingalas equivalentes, incluida la valoración de una opción call europea utilizando la medida martingala equivalente asociada con el modelo Black-Sholes, ver [Sun97].

2. Aproximación de la teoría de juegos a finanzas en tiempo continuo

Durante la última década se han propuesto algunas aproximaciones, a través de la teoría de juegos clásica, a los resultados teóricos en finanzas de tiempo continuo, referenciados en la sección anterior.

En particular, se establecieron diversas relaciones entre el proceso de valoración de derivados y los elementos constituyentes de la teoría de juegos. En efecto, estas relaciones aparecen en la medida que se pueda establecer una analogía entre el proceso de valoración de derivados y el proceso mediante el cual se mide la incertidumbre o se ponderan eventuales pagos futuros, bajo la premisa: la no existencia de oportunidades de arbitraje.

Esta última idea *per se* no es una relación directa entre juegos y finanzas sino una relación entre finanzas y la teoría de la utilidad. Que Von Neumann sea el responsable de esta teoría no implica de manera unívoca que sea teoría de juegos.

Al utilizar la analogía entre la función de utilidad esperada y el precio de un activo contingente, Ziegler [Zie04] propone visualizar el proceso de valoración de derivados como un proceso de optimización de la utilidad esperada. Esta valoración podría interpretarse como el resultado de un juego de suma cero entre el comprador y el vendedor del activo contingente. Su presentación tiene las características de un juego teórico al suponer que los jugadores son racionales, así, por ejemplo, el banco puede figurarse que el inversionista escogerá una estrategia óptima.

Su análisis no muestra explícitamente cuál es la utilidad esperada o la forma en que se están ponderando los eventuales pagos futuros, sino que utiliza el proceso de replicación empleado por Black-Scholes-Merton y realiza el proceso de maximización (cuando hay lugar a ello, como en el caso de un contingente americano en el cual para su valoración se debe determinar el tiempo óptimo de ejer-

[7] [Shi99].

cicio), sobre los parámetros de las ecuaciones diferenciales parciales *a la Merton* [Mer90].

Así, para el caso de la valoración de una opción *put* americana perpetua con precio de ejercicio igual a X, sobre el activo subyacente S, Ziegler [Zie04] enmarca el proceso de valoración dentro de un juego de información imperfecta en dos etapas. En la primera etapa juega el vendedor de la opción quien determina el precio de la opción, en la segunda etapa el comprador escoge cuál es la fecha de ejercicio que utilizará. De esta forma, si el comprador decide ejercer la opción en el primer momento (o el ínfimo de los momentos), en que el precio del activo subyacente sea a lo sumo $\overline{S}$, se tendría que en esta fecha de ejercicio la opción alcanzaría un valor $D= X- \overline{S}$. Esta última igualdad constituye una condición de frontera de la ecuación diferencial que gobierna la dinámica del proceso de la opción, a saber

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 D_{SS} + rSD_S - rD = 0$$

Si se considera adicionalmente la condición de frontera $D \to 0$ cuando, $S \to \infty$ se halla la solución

$$D(S) = (X - \overline{S})(\frac{S}{\overline{S}})^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

De esta forma, dado que el vendedor de la opción prevé que la estrategia óptima para el comprador es escoger el tiempo (equivalente a escoger el $\overline{S}$ asociado) que maximice el valor de la opción, el vendedor no ofrecerá la opción por un precio inferior a $D(\overline{S}^*)$ donde

$$\overline{S}^* = \frac{\gamma}{1+\gamma}X$$

con $\gamma = \frac{2r}{\sigma^2}$

Bassan y Natoli [BN], en el mismo sentido de Ziegler, analizan la analogía existente entre la valoración de un activo contingente y la maximización de la utilidad bajo condiciones de incertidumbre, sin embargo, especifica la función de utilidad esperada al hacer uso de los teoremas de Harrison y Pliska [HP81], en los cuales se muestra cómo bajo ciertas condiciones se puede determinar el precio de un activo contingente al calcular el valor esperado condicional de los futuros pagos, donde el valor esperado se calcula bajo una medida martingala equivalente.

Así, para el caso de una opción *put* americana perpetua con precio de ejercicio X sobre un activo subyacente S, el cual satisface , $dS= \mu Sdt + \sigma SdW$, Bassan y Natoli explican el proceso de valoración como el equilibrio de Nash de un juego entre un comprador, cuyas estrategias son cada uno de los posibles precios al cual venderá la opción, y un vendedor cuyas estrategias consisten de dos decisiones, el máximo precio al cual él estará dispuesto a comprar la opción, y la fecha en la cual ejercerá la opción, fecha que queda implícitamente determinada al suponer que el comprador escoge un valor $\overline{S}$ tal que la opción se ejerce en el momento $\tau_{\overline{S}} = inf\{t : S_t \leq \overline{S}\}$

De esta forma la decisión del agente de ejercer la opción en el momento $\tau_{\overline{S}}$, indica que el valor intrínseco que el agente le asignaría a la opción en el instante $\tau_{\overline{S}}$ es igual a $X - \overline{S}$, así se tendría que la utilidad esperada del comprador al seguir esta estrategia de ejercicio estaría dada por

$$U(D,\overline{S}) = E[e^{-\delta\tau_{\overline{S}}} u_{\overline{S}}(X-\overline{S})]$$

donde δ denota la tasa de descuento intertemporal.

De otra parte, como la utilidad es una función creciente en términos de las ganancias monetarias $X - \overline{S}$, se puede considerar que este valor constituye una *Proxy* de la utilidad instantánea que él genera. Con lo cual se estaría suponiendo que el comprador es un agente neutral al riesgo y éste no es necesariamente el caso. Sin embargo, por los dos teoremas fundamentales de la valoración de activos, se puede concluir que dada la completes y la ausencia de oportunidades de arbitraje en el modelo Black-Scholes, existe una única medida martingala equivalente Q, es decir, existe una medida de probabilidad Q equivalente a la medida original del mercado P, tal que bajo esa medida los agentes valoran sus futuros pagos como sí fuesen agentes neutros al riesgo. Así, la utilidad que le generarían al comprador los eventuales pagos futuros por poseer dicha opción estarán dados por

$$U(D,\overline{S}) = E_Q[e^{-r\tau_{\overline{S}}}(X-\overline{S})] = \frac{X}{1+\gamma}\left(\frac{\overline{S}}{X}\frac{1+\gamma}{\gamma}\right)^{-\frac{2r}{\sigma^2}}$$

Adicionalmente, Bassan y Natoli sugieren una explicación proveniente de la teoría de juegos, sobre la unicidad de la medida martingala equivalente (o medida neutral al riesgo). Su análisis se basa en el resultado de Aumann [Aum76] conocido como "Agreeing to Disagree", el cual informalmente establece que si dos personas asignan las mismas probabilidades *a priori* a un evento *A,* se tiene que si las probabilidades a posteriori son de conocimiento común, entonces esas probabilidades deben ser iguales, sin importar que las probabilidades *a posteriori* se basen en información distinta. Ferro ilustra estos resultados en el articulo (Prepint) "*Juegos, guerra y valoración de opciones*" [Fer04].

Vladimir Vovk y Glenn Shafer [VS01, [SS], [SVnt] proponen una formulación diferente acerca de la valoración de contingentes, producto de su novedosa axiomatización de la teoría de la probabilidad, axiomatización que no recurre a la teoría de la medida. En efecto, su concepción general se basa en considerar que las propiedades de un modelo de mercado conocidas como arbitraje y replicación (completes del mercado), no son exclusivas de la teoría de matemáticas financieras ([DS94], [HP81]), sino que son hipótesis de las creencias o frecuencias relativas asignadas a cualquier evento que no se considere como determinístico o predecible, cualquiera que sea su naturaleza. A su juicio [SS], el hecho de que resulte inocuo en la valoración de activos imponer una medida sobre la σ-álgebra, siempre y cuando se mantenga invariante la clase de conjuntos de medida cero, da indicios que la aleatoriedad pueda ser excluida de la valoración de contingentes siempre que se diferencien los elementos improbables de los elementos probables.

Con el propósito de excluir en su totalidad cualquier relación con alguna medida de probabilidad en la especificación de la condición de no arbitraje, Vovk y Shafer hacen una diferenciación estricta entre eventos posibles y eventos imposibles. Para ellos, bajo su esquema, el papel de la teoría de juegos en la teoría de finanzas consiste en que la valoración de derivados es producto de un juego entre dos jugadores ficticios (inversionista y mercado), en el cual se establece un protocolo para el juego tal que eventualmente, en algún turno, el mercado tiene únicamente dos caminos para seguir, o permite que se presente una oportunidad de arbitraje (en términos de los autores permitir la incoherencia del juego), o establece de manera unívoca cuál es el valor del derivado. Este esquema de argumentación es utilizado por los autores no sólo para la valoración de derivados sino también para deducir a partir de la axiomatización que proponen, los resultados más importantes de la teoría de la probabilidad.

El término protocolo se utiliza para denominar al conjunto de estrategias permitidas a los jugadores, las funciones de pagos durante cada período, por ejemplo [VS01] para el caso de valoración de activos contingentes europeos en tiempo continuo se supone que existen dos activos básicos: una mercancía S que no paga dividendos y un título valor D que en cada período paga dividendos de $\left(\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}}\right)^2$. Así, si denota el capital que posee el inversionista en el periodo t, el protocolo para la valoración de un activo contingente europeo U se describe así:

Para $n = 0$

$K_0 = 0$

Mercado establece y anuncia $S_0 > 0, D_0 > 0$

Para $n = 1,2,3,\ldots, N$

Inversionista anuncia M_n, $V_n \in \mathrm{R}$

Mercado anuncia $S_0 > 0, D_0 > 0$

$$K_n = K_{n-1} + M_n \Delta S_n + V_n \left[\left(\frac{\Delta S_n}{S_{n-1}} \right)^2 + \Delta D_n \right]$$

Con las restricciones adicionales (para tiempo continuo)

S y D son continuas

$sup_n S_n < \infty$, $sup_n D_n < \infty$

$vexS \leq 2$

vexD < 2[8]

Vovk y Shafer logran excluir dentro de su esquema cualquier relación con alguna medida de probabilidad, al especificar el tipo de dinámica del precio del activo subyacente sin necesidad de recurrir a argumentos probabilísticos, determinándolo a partir de argumentos de teoría de juegos, a través de su esquema general ya mencionado.

En efecto, haciendo uso de herra-

[8] El término *vex* es una característica de una función en sentido no estándar, dado el marco conceptual necesario para la definición de este término se remite al lector a [VS01].

mientas del análisis no estándar, los autores muestran [SVnt] cómo un modelo de mercado sin oportunidades de arbitraje (en términos de su esquema un juego coherente) requiere que la variación del precio del activo (variación de una función en el sentido no estándar) sea del orden $\sqrt{dt}$. Este orden de variación es el correspondiente a un movimiento fraccional browniano con parámetro h igual a $\frac{1}{2}$ [9]

3. COMPLEJIDAD Y MODELOS MULTI-AGENTE

Durante el último lustro ha surgido una escuela de análisis de los mercados financieros conocida como econofísica. Su principal campo de investigación es el estudio de las extensas series de datos financieros, bajo la óptica que los mercados financieros pueden ser considerados como un sistema complejo y, por ende, su estudio eventualmente puede sugerir regularidades o ayudar a responder algunas de las preguntas acerca de los sistemas complejos en física, a la vez que se genera conocimiento en la teoría de los mercados financieros.

En el presente [BP00], [JJHH], [YCMD], [JLJ+], el mencionado análisis de los mercados financieros no se centra en la valoración de activos contingentes sino que busca explicar algunas de las propiedades estadísticas de las series de tiempo (como lo sería la distribución leptokúrtica de los retorno), las cuales no son justificables a partir de los modelos económicos tradicionales basados en la hipótesis de mercado eficiente y optimización de portafolio. Con este propósito se abandonan los modelos de un único prototipo de agente económico representativo, propios del análisis macroeconómico, por modelos multiagente que reflejan la microestructura del mercado.

Los modelos multiagente utilizados actualmente en el análisis de series de tiempo, son modificaciones del modelo conocido como *Minority Game* [CZ97]. Este último consiste en un juego dinámico de tiempo discreto, en el cual en cada etapa $2n+1$ jugadores deben elegir entre dos acciones posibles A y B (por ejemplo, comprar y vender una unidad de un bien); una vez que cada agente toma su decisión ganan en esa etapa aquellos agentes pertenecientes a la minoría resultante, es decir, los agentes que eligieron la acción con menos adherentes; esta estructura de juego refleja cómo los compradores se benefician cuando se produce un descenso en el nivel de precios debido a un exceso de oferta o cómo los vendedores se benefician cuando se presenta un exceso de demanda. Cada jugador i posee una memoria con la capacidad de registrar los

[9] Se dice que $(B_h(t))_{t\geq 0}$ es un movimiento fraccional browniano de índice h si se cumple $\forall t > s \geq 0 B_h(t) - B_h(s)$ que es una variable aleatoria continua con varianza $(t-s)^{2h}$

resultados anteriores (ganó *A* o ganó *B*) y a partir de dicha información pondera cuál debería ser su siguiente acción. De esta forma, cada agente tendrá estrategias posibles, sin embargo, se realiza el supuesto que cada agente en el periodo inicial selecciona aleatoriamente un número de estrategias que guiarán sus futuras decisiones, sin posibilidad de un eventual remplazo de estrategias. Así, el hecho que los agentes eventualmente cuenten con grupos heterogéneos de estrategias, le dan al juego el carácter de multiagente.

Con el fin de analizar las series de precios a través de una estructura de juego semejante a la del "juego de la minoría", se han realizado las siguientes modificaciones [JLJ+], [JJ], [YMCD]:

- Se lleva un registro del porcentaje de éxitos que han alcanzado cada una de las estrategias seleccionadas por el jugador (hayan sido o no utilizadas en las etapas anteriores).
- Se establece un umbral mínimo de predicción, a saber si ninguna estrategia alcanza un porcentaje de éxitos mayor o igual que el umbral, el agente no actúa en dicha etapa. En caso contrario el agente emplea la estrategia con mayor porcentaje de éxitos.
- Dado que en ninguna etapa se puede garantizar que el número de agentes que actúan sea impar, en caso de presentarse una igualdad entre el número de compradores y vendedores, el alza o la baja del precio se determinan a través del lanzamiento de una moneda.
- Se especifica una dinámica para el precio del activo a partir de los excesos de demanda resultantes en el juego, a saber:

$$In[p[t]] - In[p[t-1]] = \frac{D[t^-]}{\lambda}$$

ó

$$p[t] - p[t-1] = \frac{D[t^-]}{\lambda}$$

donde λ representa la sensibilidad del mercado frente a desbalances.

A partir de estas dinámicas y de series históricas de precios, los autores han desarrollado protocolos de juego que se ajustan a los datos iniciales de la serie y mediante simulaciones acerca de los precios futuros han logrado generar distribuciones de probabilidad de los retornos, acordes con los hechos estadísticos que se deseaban explicar.

4. COMENTARIOS FINALES

La aproximación de Bassan y Natoli enmarca la valoración de contingentes bajo medidas neutrales al riesgo dentro del contexto de un juego de suma cero, en el cual cada agente busca maximizar su utilidad. Con este propósito Bassan y Natoli utilizan el primer teorema fundamental de la valoración de activos para garantizar la existencia de una medida neutral al riesgo dentro del modelo de Black-Scholes, y sugieren que a partir del resultado de Aumann se puede concluir la unicidad de la medida. Esta aproximación le da una mayor prerrogativa a la teoría de juegos comparada con lo que Ziegler le atribuye. Sin embargo, la teoría de juegos no resulta más poderosa contrastada con los métodos clásicos de valoración de opciones.

Por otra parte, el trabajo de Vovk y Shafer, no pretende garantizar la existencia de ninguna medida equivalente, por el contrario, busca excluir cualquier estructura probabilística del análisis de la valoración de derivados y a una nueva versión de la condición de no arbitraje, denominada coherencia del mercado, en la cual se considera imposible, no sólo improbable, el evento que un agente disponga de alguna estrategia que le brinde infinita riqueza. A diferencia del trabajo de Bassan y Natoli, en el de Vovk y Shafer, cualquier especificación que se utilice, por ejemplo la dinámica del activo subyacente del derivado, es el resultado de algún juego entre el inversionista y el mercado, según el esquema de protocolo de juego que ellos proponen. Más allá de replicar los resultados en finanzas estocásticas a través del análisis de protocolos de juego, su mayor logro es alcanzar los resultados de la teoría de la probabilidad, por ejemplo, el teorema del límite central, a partir de sus protocolos de juego y no como resultado de la axiomatización de la teoría de la medida.

En relación con los estudios realizados por la escuela denominada econofísica dentro del análisis de los mercados financieros a través de juegos, es importante resaltar que su aporte no es exclusivo al análisis de los mercados financieros, sino que en general transmite el conocimiento sobre sistemas dinámicos y complejos, desarrollado por la física como cuerpo teórico, al estudio de las condiciones de estabilidad de los juegos evolutivos.

REFERENCIAS

[Aum76] Robert Aumann. *Agreeing to Disagree. The Annals of Statics,* 4(6), 1976.

[BN] Bruno Bassan and Giuseppina Natoli. *Strategic Option Pricing.* Preprint. Presentado en XV IMGTA-Italian Meeting on Game Theory and Applications, Urbino, julio 2003.

[Bou98] Nicolas Bouleau. *Martingales et Marchés Financiers*. Editions Odile Jacob, 1998.

[Bn03] Liliana Blanco y Myriam Muñoz. *Análisis estocástico*. Notas de clase. Facultad de Ciencias, Universidad Nacional de Colombia, 2003.

[BP00] Jean-Philippe Bouchaud and Marc Potters. *Theory of Financial Risks. From Statistical Physics to Risk Management.* Cambridge University Pres, 2000.

[BS73] Fischer Black and Myrron Scholes. *The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy,* 81, 1973.

[CZ97] D. Challet and Y. Zhang. *Emergence of Cooperation and Organization in an Evolutionary Game. Physica.* A, 246, 1997.

[DS94] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. *A General Version of the fundamental Theorem of Asset Pricing. Mathematische Annalen,* 300, 1994.

[DS01] Freddy Delbaen and Walter Schachermayer. *Applications to Mathematical Finance. In Handbook of the Geometrie of Banach Spaces,* volume 1, North Holland, 2001, pages 367-391.

[Fer04] Luis Jorge Ferro. *Juegos, guerra y valoración de opciones* Prepint. Primer foro de Investigación de Operaciones Militares, Escuela Naval Armada Nacional, Cartagena de Indias, 2004.

[HP81] Michael Harrison and Stanley Pliska. *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading. Stochastic Processes and their Applications,* 1981.

[JJ] Neil Johnson and Paul Jefferies. *Designing Agent-based Market Models.* Con-mat/0207523.

[JJHH] Neil Johnson, Paul Jefferies, Michael Hart and P. Hui. *From Market Games to Real World Markets.* cond-mat/0008367.

[JLJ+] Neil Johnson,David Lamper, Paul Jefferies, Michael Hart, and Sam Howison *Application of Multi-agent Games to the Prediction of Financial Time-Series.* cond-mat/0105303.

[JP04] Robert Jarrow and Philip Protter. *A short history of stochastic integration and mathematical finance of the early years, 1880-1970.IMS Lecture Notes Monograph,* 45, 2004.

[Mer90] Robert C. Merton. *Continuos-time Finance.* Basie & Black well, 1990.

[MS00] Rosario Mantegna and Eugene Stanley. *An introduction to Econo-physics:* Correlations and Complexity in Finance. Cambridge University Press, 2000.

[Sch92] Walter Schachermayer. *A Hilbert Space Proof of the Fundamental Theorem* of Assets Pricing in Finite Discrete Time. Insurance, Mathematics and Economics, 11, 1992.

[Shi99] Albert Shiryaev. *Essentials of Stochastic Finance. Facts, Models Theory.* World Scientific Publishing Co., 1999.

[SS] Glenn Shafer and Yudan Sheng. *The Principle of Coherence.* Prepint.

[Sun97] Rungarajan Sundaram. *Equivalent Martingales Measures and Risk-Neutral Pricing. An Expository Note. Journal of Dirivatives,* Fall, 1997.

[SVnt] Glenn Shafer and Vladimir Vovk. *The Effect*. Prepint.

[VS01] Vladimir Vovk and Glenn Shafer. *Probability and Finance. It's only a Game!* Jhon Wiley and Sons, 2001.

[YCMD] Zhand Yi-Cheng, Marsili Mateo, and Challet Damien. *Stylized Facts of* Financial and Markets Crashes in Minority Games.

[Zie04] Alexandre Ziegler. *A Game Theory Analysis of Options.* Springer Verlag, second edition, 2004.