

Dependencia entre activos financieros: Un ejemplo para la relación TES - dólar más allá de los supuestos

Andrés Ricardo Quevedo Caro

*Profesor del área de econometría
Facultad de Economía de la
Universidad Externado de Colombia
E-mail: ricanquev@hotmail.com*



1. INTRODUCCIÓN

El sistema financiero colombiano ha registrado una extraordinaria evolución en los últimos años, apoyado en gran medida por la dinámica exhibida en el mercado de deuda pública. Como resultado inmediato, el número de alternativas de inversión con el que cuentan hoy en día las instituciones financieras del país es superior al que existía hace tan solo una década.

Pese a lo anterior, es evidente que la amplitud de la gama de inversiones a la cual se enfrenta un agente o una entidad financiera en el mercado interno colombiano es aún limitada¹; a manera de ejemplo a 31 de julio de 2004 el 45% del valor total de los fondos de inversiones y cesantías en Colombia se encontraba concentrado en TES, títulos de deuda “yankees” y en moneda extranjera, fundamentalmente dólar de los EE.UU.

Como un resultado, la relación existente entre el mercado del dólar y el mercado de deuda pública cobra especial relevancia y es objeto de seguimiento principal por parte de la mayoría de las instituciones financieras del país, para quienes se convierte en una valiosa fuente de información cuando de tomar posición e idear estrategias se trata. En general se espera que incrementos en la tasa de devaluación

sean acompañados por crecimientos en las tasas de interés de las principales referencias de los títulos TES.

La clase de relación que se verifica en la actualidad en Colombia corresponde al coeficiente de correlación de Pearson. La misma es una medida de dependencia débil e inadecuada, al incorporar dentro de su construcción una serie de supuestos que como el de normalidad en las variables financieras hoy en día son considerados como inadecuados en el campo financiero.

Teniendo en cuenta que la maximización de la rentabilidad y minimización del riesgo en la administración de los portafolios en Colombia depende directamente de la medida de dependencia utilizada, y considerando que la Superintendencia Bancaria de Colombia (2004) emplea el coeficiente de correlación de Pearson para la construcción del modelo de cuantificación de riesgo de mercado, su inadecuada utilización plantea importantes ineficiencias en la toma de decisiones financieras de la nación.

Para los negociadores financieros del país no es extraño enfrentar a diario situaciones en las cuales el coeficiente de correlación de Pearson evoluciona en contravía a lo esperado (ver Gráfico No. 1), al sugerir que incrementos en la tasa de devaluación están acompañados por de-

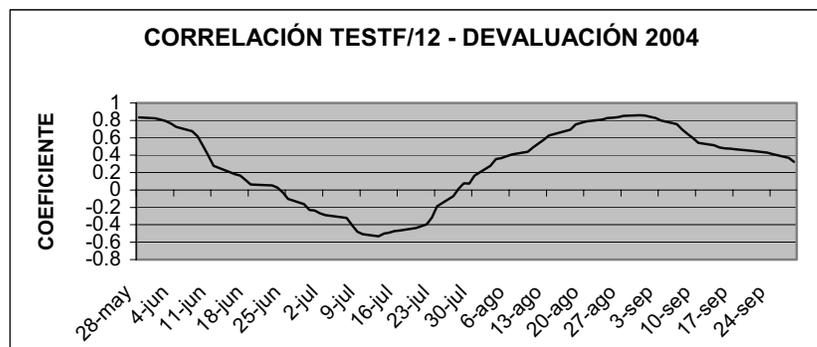
Artículo recibido el 9 de noviembre de 2004. Aceptado el 13 de diciembre de 2004.

¹ Dicho inconveniente ha sido señalado antes por trabajos interesados en el tema e.i Fedesarrollo (1996).

crecimientos en la tasa de los títulos TES²; lo cual de ninguna manera obedece a que el coeficiente de correlación de Pearson sea obsoleto o a que una variable sea insensible a la otra, sino a una inadecuada utilización de una herramienta estadística, diseñada para cuantificar dependencia lineal.

se ha constituido en referencia obligada en econometría financiera. Desde el punto de vista práctico, el Banco J.P. Morgan estableció una metodología para el cálculo de riesgo de mercado Value at Risk (VaR) en 1995; siendo implementada por la mayoría de instituciones regulatorias fi-

Gráfico No. 1



La correlación entre activos financieros ha desempeñado un papel preponderante en el diseño de la teoría financiera moderna. Prueba de lo anterior lo constituyen las investigaciones de Markowitz (1959), Treynor (1961), Sharpe (1964) y Lintner (1965), en cuyo marco se desarrollaron las teorías de diversificación del portafolio y el modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) y que permitieron a Ross (1976) la creación del modelo Arbitrage Pricing Theory (APT), el cual gracias a Campbell, Lo y MacKinlay (1997)

nancieras del mundo, para cuantificar las potenciales pérdidas a las que se enfrentaría el sector financiero. Todos estos importantes estudios, aceptados como ley por parte de los agentes financieros, tienen en común el papel principal que le otorgan al coeficiente de correlación de Pearson para la consecución de sus conclusiones.

De igual manera, los trabajos que han estimado la relación contemporánea entre variables financieras en Colombia han asumido normalidad y/o linealidad en la dependencia. En un trabajo pertinente

² A manera de ejemplo el 27 de octubre de 2004 el coeficiente de correlación intradía entre los títulos TES de abril del 2012 y la tasa de cambio peso dólar fue de 0.55 indicando una evolución directa entre estas dos variables; contradiciendo el comportamiento observado por el mercado al presentarse una disminución al cierre del día de 1 pb para los TES frente a un incremento en la tasa de devaluación de 7 bp.

Gutiérrez y Formisano (2003) mencionan que el coeficiente de correlación, obtenido a partir de “una regresión sencilla entre el dólar y los TES con vencimiento en enero de 2012” señala la presencia de una relación simultánea y directa del 63% entre estas dos variables. Posteriormente, y como resultado de implementar la metodología de Vectores Autorregresivos, VAR, afirman que “parece claro que el efecto del dólar sobre el mercado financiero es bastante limitado y no va mucho más allá de guardar una relación contemporánea con los TES”. Recientemente, Medina (2003) y Cardozo (2004) realizan evaluaciones de diferentes variables del sistema financiero colombiano suponiendo relaciones de dependencia lineal entre las mismas para su análisis.

Desde los sugestivos trabajos de Mandelbrot (1963) y Clark (1973), han resultado inocultables las particularidades inherentes a los retornos de los activos financieros. De esta forma, internacionalmente es hoy inapelable la existencia de distribuciones de probabilidad leptokurticas y caracterizadas por colas gordas en un importante número de mercados, especialmente los financieros; lo cual no es compatible con las distribuciones de probabilidad gaussianas sobre las cuales se ha desarrollado la teoría financiera y particularmente aquella relacionada con la dependencia entre activos financieros.

Por lo tanto, tanto los teóricos del mundo financiero, como aquellas personas que desempeñan labores netamente

empíricas, se enfrentan hoy en día a la toma de decisiones apoyados en modelos teóricos cuestionados, al estar constituidos por supuestos inaplicables para el área en la cual van a ser desplegados. Lo anterior plantea un interesante desafío respecto a la solución de esta clase de inconveniente, especialmente para el sistema financiero colombiano; una solución al mismo ha sido planteada desde la perspectiva de la “cópula”, metodología que, no obstante haber sido mencionado por primera vez por Sklar en 1959, había sido incomprensiblemente olvidada y recientemente se ha implementado con éxito.

En virtud de lo anterior, el presente artículo argumenta que dadas las características de las variables financieras el coeficiente de correlación de Pearson es una medida de dependencia inadecuada entre las mismas y debe ser remplazada por otra que capture efectivamente el grado de asociación entre las variables; por lo tanto, el documento ha sido estructurado en cinco secciones, la primera de las cuales es la presente introducción, seguida por una sección de definiciones de las medidas de dependencia existentes, en la tercera parte se presentarán las características pertinentes para los títulos TES tasa fija con vencimiento abril 2012 y la tasa de cambio peso – dólar, en la cuarta sección se estimarán y compararán las medidas de dependencia construidas para los dos activos mencionados antes y, finalmente, se entregarán algunas conclusiones.

2. CÓPULAS Y MEDIDAS DEPENDENCIA, UN EJEMPLO PARA EL MERCADO FINANCIERO COLOMBIANO

Partiendo del trabajo de Embretchts, McNeil y Straumann (1999) y seguido por los de Bouyé y Salmon (2001) y Salmon (2001) se ha desarrollado una línea de investigación completa en los últimos años; la misma pretende corregir los errores cometidos por la teoría convencional en el tema de dependencia entre activos financieros; utilizando para ello un concepto desarrollado por Sklar (1959) a partir de la teoría de probabilidad en espacios métricos conocido como “cópula”.

2.1. Definición de cópula

Como se mencionó antes, la metodología de las cópulas permite incrementar la eficiencia de las medidas de dependencia. Teniendo en cuenta que el presente documento tiene como interés privilegiar las conclusiones cuantitativas, sin profundizar en el componente teórico bajo el cual son alcanzadas las mismas, solamente se presentará la definición de cópulas que a continuación aparece³.

Una cópula es una función de distri-

bución conjunta con distribuciones marginales univariadas uniformes que relaciona un grupo de variables. Formalmente puede expresarse como:

$$C(u_1, u_2, \dots, u_N) = \Pr[U_1 \leq u_1, U_2 \leq u_2, \dots, U_N \leq u_N]$$

donde U_1, U_2, \dots, U_N representan variables aleatorias uniformes⁴. Por lo anterior, es posible concluir que la cópula logra capturar toda la información que sobre dependencia exista en el conjunto de variables, en la medida en que se encuentra definida por la transformación uniforme de las distribuciones marginales; independientemente de la distribución de probabilidad que tengan cada una de ellas.

En virtud de lo anterior, la determinación de las relaciones de dependencia entre dos activos financieros mediante la estimación de una cópula, elimina la necesidad de contar con el supuesto de distribución de probabilidad normal para interpretar adecuadamente la causalidad que presenten los mismos; permitiendo a la vez alcanzar indicadores de dependencia más adecuados.

2.2. Medidas de dependencia

De acuerdo con Embretchts (2000) una medida de dependencia es un indica-

³ Aquellas personas interesadas en profundizar en el tema pueden encontrar una valiosa ayuda en los trabajos de Sklar (1963) y Nelsen (1999).

⁴ Sklar (1959) desarrolló una importante conclusión sobre cópulas, al afirmar que en la medida en que las funciones de distribución marginal sean continuas, entonces se puede aseverar que la cópula encontrada es única.

dor que resume la estructura de dependencia entre dos variables aleatorias en un solo número; para que la misma sea perfecta debe mantener cuatro propiedades a saber, simetría, normalización, comonotonicidad y contramonotonicidad y, por último, ser estrictamente monótona sobre el rango de las variables aleatorias bajo las cuales opera.

A continuación se presenta una revisión de las diferentes clases de medidas de dependencia existentes, cuya formulación es presentada en el Apéndice No.1⁵.

2.2.1. Coeficiente de correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson, utilizado como medida de dependencia entre dos variables, solamente tiene sentido cuando es aplicado sobre la familia de distribuciones esférica. No obstante, la facilidad de su aplicación, esta clase de relación de asociación posee una serie de debilidades⁶ que deben tenerse en cuenta dentro de su análisis; al detectar solamente dependencia lineal en los datos, estar definida únicamente cuando la varianza es finita⁷, presuponer la existencia de normalidad entre las variables y, por último, pero no menos importante, no ser

invariante ante transformaciones estrictamente monótonas. Esta última característica se refiere a que el resultado de la correlación es sensible frente a variaciones en la escala de las variables marginales.

2.2.2. Correlación en el rango

Otra clase de medidas de dependencia la constituyen los coeficientes de correlación por rango que miden el grado de dependencia monótona entre un par de variables aleatorias. Los ejemplos tradicionales de las anteriores los constituyen la correlación de Spearman y la de Kendall; las mismas, no obstante cumplir con los cuatro criterios de dependencia perfecta, en ocasiones son desestimadas por ser catalogados como de manipulación dispendiosa.

2.2.3 Dependencia en las colas de la distribución

Igualmente, si el interés se encuentra en los valores extremos de la distribución de un par de variables aleatorias, es factible verificar la dependencia existente entre las colas de las mismas, la cual a menudo diferirá de aquella existente alre-

⁵ Las ecuaciones y definiciones presentada siguen en su mayoría a Embrechts et al. (1999).

⁶ Además de solo cumplir con los dos primeros criterios de un conjunto de cuatro necesarios para operar como medida de dependencia perfecta, los cuales son en su orden: simetría, normalización, comonotonicidad y contramonotonicidad y por último ser estrictamente monótona sobre el rango de las variables aleatorias bajo las cuales opera.

⁷ Esta propiedad no es deseable cuando las variables tienen el fenómeno catalogado como de colas gordas; lo cual es el caso de las variables financieras.

dedor de la media. Al respecto vale la pena mencionar que cuando su medida de dependencia es función de su cópula, entonces no varía bajo transformaciones estrictamente crecientes.

2.2.4 Medida de concordancia

Finalmente, cuando el objetivo es identificar si la relación entre dos activos es positiva o negativa, desplazando la intención de conocer una cifra exacta, es posible utilizar las medidas de concordancia para averiguar si la relación de dependencia entre las mismas es de comonotonicidad (concordancia) o contramonotonicidad (discordancia).

Por lo tanto, en virtud de las diferentes clases de dependencia existentes, un elemento clave al momento de realizar un análisis que involucre dependencia, lo constituye la definición de la clase de relación que se quiere medir. Con el ánimo de brindar claridad respecto a lo anterior, a continuación se realiza una revisión de las principales características que rodean a la tasa de cambio peso-dólar y a los títulos TES, las series colombianas para analizar en este estudio.

3. CARACTERÍSTICAS DE LA TASA DE CAMBIO PESO – DÓLAR Y LOS TÍTULOS TES

Como se mencionó antes, a nivel internacional han sido ampliamente analizadas las características particulares de los activos financieros. Sin embargo, en Colombia ese tema no ha sido evaluado; por lo tanto, a continuación se realiza una revisión sobre dos de las más importantes referencias negociadas en el mercado, los títulos TES y el mercado de divisas peso-dólar.

La base de datos se refiere a los retornos logarítmicos diarios de las tasas de los títulos TES con vencimiento abril del 2012 y de la devaluación anual de la tasa de cambio representativa del mercado (TRM) para el período comprendido entre 18 de abril del 2004 y 27 de octubre de 2004.

Para establecer si el fenómeno de colas gordas se produce en una variable cualquiera, los gráficos de los cuantiles de la distribución empírica comparados frente aquellos de la distribución normal (q-q plots), ofrecen una buena aproximación visual. Al observar los Gráficos No. 2 y No. 3 es posible aseverar que tanto los TES como la tasa de cambio peso - dólar sufren de esta peculiaridad. En efecto, a partir de los cuantiles 1 y -1 se presenta una separación de los valores empíricos de los teóricos de la distribución normal.

Gráfico No. 2

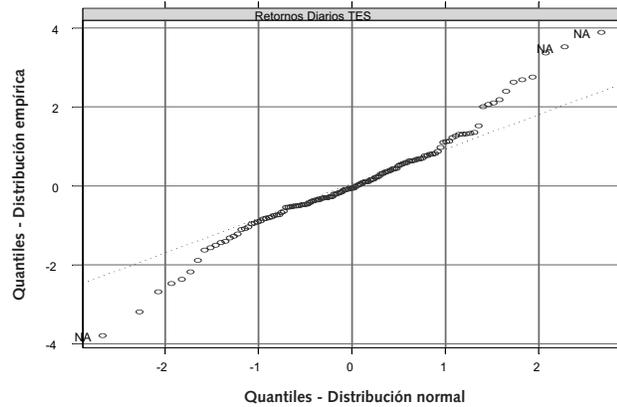
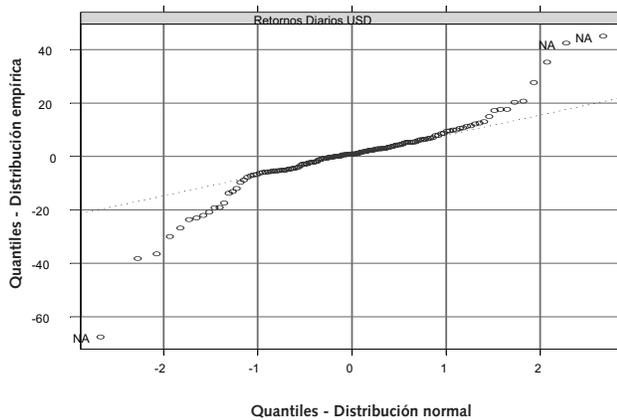


Gráfico No. 3



Respecto a la normalidad, en los Cuadros No. 1 y No. 2⁸ se aprecia la prueba de Jarque – Bera para cada una de las variables en cuestión. La misma permite afirmar que no existe evidencia para no rechazar la hipótesis nula de normalidad

para los retornos de los TES y de la TRM. Al observar los estadísticos de kurtosis y sesgo es posible ir un poco más adelante y se puede afirmar que se encuentran idéntica e independientemente distribuidas (i.i.d.).

⁸ Para la elaboración de los diferentes gráficos y estimaciones cuantitativas desplegados en este artículo se utilizaron los programas RATS, S-plus y Matlab.

Cuadro No. 1. Principales resultados estadísticos TES TF/042012

Statistics on Series TES			
Observations	131		
Sample Mean	0.00049695118	Variance	0.000151
Standard Error	0.01230301679	SE of Sample Mean	0.001075
t-Statistic	0.46231	Signif Level (Mean=0)	0.64462844
Skewness	0.25692	Signif Level (Sk=0)	0.23533323
Kurtosis	1.52460	Signif Level (Ku=0)	0.00052561
Jarque-Bera	14.12847	Signif Level (JB=0)	0.00085515

Cuadro No. 2. Principales resultados estadísticos TRM

Statistics on Series USD			
Observations	131		
Sample Mean	0.00156721229	Variance	0.018125
Standard Error	0.13462837941	SE of Sample Mean	0.011763
t-Statistic	0.13324	Signif Level (Mean=0)	0.89421149
Skewness	-0.82399	Signif Level (Sk=0)	0.00014119
Kurtosis	6.28590	Signif Level (Ku=0)	0.00000000
Jarque-Bera	230.49684	Signif Level (JB=0)	0.00000000

Finalmente, respecto a la evaluación de normalidad en la relación de dependencia, en los Gráficos No. 4, No. 5, No. 6 y No. 7 se comparan la función de densidad conjunta (No. 4 y No. 5) y los contornos de la Función Densidad Acumulada

entre las dos variables de interés, respecto de aquella esperada en una distribución normal; una simple inspección en los gráficos permite concluir que existe una clara diferencia.

Gráfico No. 4. Densidad conjunta de la distribución normal

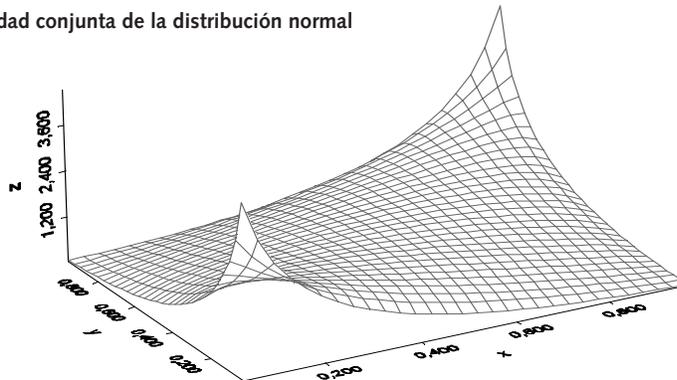


Gráfico No. 5. Densidad conjunta de la distribución empírica

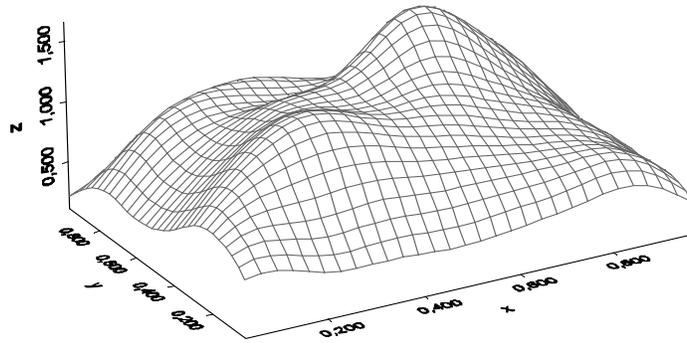


Gráfico No. 6. Contornos de la CDF normal

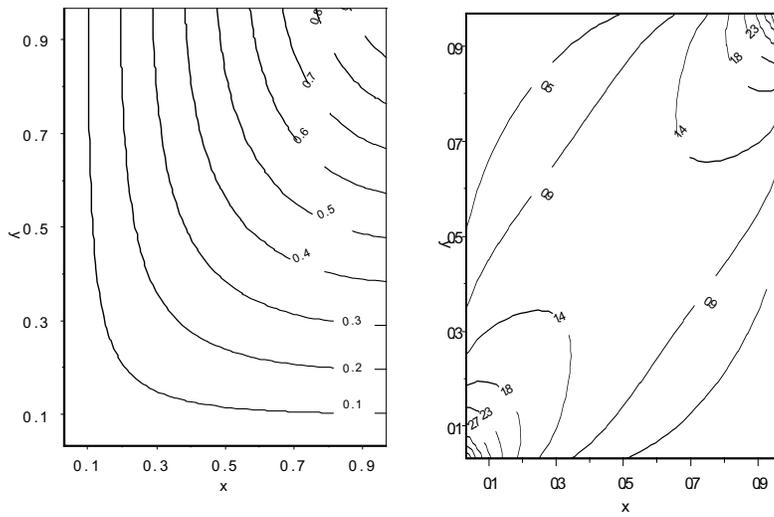
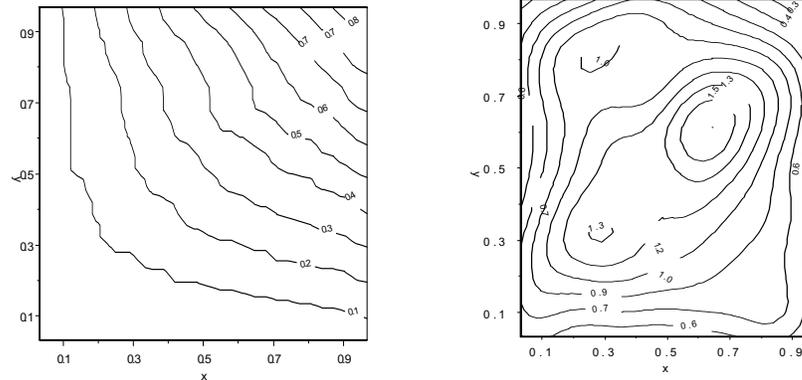


Gráfico No. 7. Contornos CDF empírica retornos TES -USD



4. EVALUACIÓN DE LAS MEDIDAS DE DEPENDENCIA ENTRE LA TASA DE CAMBIO PESO – DÓLAR Y LOS TÍTULOS TES

Teniendo en cuenta que las particularidades encontradas entre los retornos de los TES y los de la TRM permiten concluir que sus distribuciones de probabilidad poseen colas gordas, cuestionando el supuesto de varianza finita, que no son compatibles con aquellas del tipo i.i.d. y que la relación de dependencia entre las variables tampoco puede denominarse como de densidad conjunta normal, la in-

conveniencia en la utilización de la correlación de Pearson son evidentes. Por lo tanto, en el Cuadro No. 1 se presenta una comparación entre el mencionado coeficiente respecto a los coeficientes de correlación de rango estimados a partir de la cópula empírica.

Como se aprecia en el cuadro anterior, calcular el coeficiente de correlación de Pearson, como se hace actualmente en el mercado colombiano, es equivalente a sobrestimar en aproximadamente 100% el grado de asociación empírico entre las dos variables. Es decir, cualquier institución financiera que hubiera utilizado el

Cuadro No. 1 Retornos logarítmicos diarios para los TES TF/042012 y TRM 18 de abril 2004 - 27 de octubre 2004			
Medida de Dependencia	Correlación de Pearson	Tau de Kendall por cópulas	Rho de Spearman por cópulas
TES - USD	0.08609507	0.04615385	0.05738536

habitual coeficiente de correlación para optimizar el riesgo y la rentabilidad de sus portafolios se podría enfrentar a resultados no deseados e incluso, en la medida que la real dependencia es menor a la estimada normalmente, podría verse incentivado a tomar una posición en uno de estos dos activos inferior a aquella que le permitiría mitigar sus pérdidas.

Así mismo, dado que el diseño del modelo estándar de cuantificación de riesgo de mercado, recomendado por la Superintendencia Bancaria de Colombia como de obligatorio para las entidades financieras pertinentes, incorpora los coeficientes de Pearson entre los factores de riesgo y el supuesto de variables i.i.d., la gestión de supervisión del ente regulador puede verse erosionada, ya que los resultados arrojados por el modelo de riesgo mencionado se alejarían de los realmente existentes.

El inconveniente anterior no quedaría resuelto, como erróneamente se supone, utilizando una matriz de correlaciones con elementos cercanos o iguales a la unidad con el ánimo de generar escenarios

de dependencia total o extrema; ya que es posible tener grados de asociación máximos entre variables con valores diferentes a la unidad e incluso con valores de cero⁹. Dicha confusión obedece a que equivocadamente se supone que debido a que completa dependencia implica correlación de uno, lo contrario se cumple también, es decir que tener un coeficiente de correlación cercano a uno significa mayor asociación entre las variables; lo cual solamente se cumple bajo un escenario de gassiano multivariado.

Una vez identificado el coeficiente empírico de correlación de Kendall es posible realizar una comparación entre éste y los estimados mediante las diferentes copulas teóricas existentes para dar una idea de la relación de dependencia entre las variables. Una vez realizado dicho ejercicio se observa como la cópula normal genera un coeficiente muy por encima del producido por medio de otra clase de cópulas; descartando como se aprecia en el Cuadro No.2 que la relación de dependencia corresponda a la cópula normal.

En virtud de la semejanza de los co-

Cuadro No.2 Ajuste de la Copula a la distribución empírica			
Frank	bb2	Normal	Empírica
Tau = 0.0475	Tau = 0.068	Tau = 0.0808	Tau = 0.0461

⁹ A manera de ejemplo, el coeficiente de correlación máximo entre dos variables la primera de ellas con una distribución lognormal (0,1) y la segunda con una distribución lognormal (0,s²) tiende a cero cuando σ tiende a infinito.

eficientes estimados en el cuadro anterior, se aprecia como la cópula empírica se encuentra mejor caracterizada por una cópula paramétrica de clase Frank o por una de clase bb2 que por una de tipo normal. Este último hecho refuerza aún más lo inadecuado que resulta estimar dependencia utilizando el coeficiente de correlación de Pearson.

Sin embargo, si se quiere caracterizar una poco más la relación de dependencia es factible interpretar los coeficientes utilizados para ajustar la cópula empírica a las diferentes clases de cópula. Así en el cuadro No. 3 se aprecia que el alto valor de los coeficientes delta de la Cópula Gumbel y Theta de la cópula Joe (frecuentemente utilizadas para identificar correlaciones extremas), indica una alta correlación en las observaciones extremas que se encuentran en la cola superior de las distribuciones. Igualmente, el bajo nivel del delta de la cópula bb7 señalaría una baja correlación entre las observaciones extremas ubicadas en la cola inferior de las distribuciones. Finalmente, el alto grado de concordancia entre las variables puede ser observado en el alto valor del theta de la cópula bb7.

5. COMENTARIOS FINALES

Una vez revisadas las características individuales que han exhibido dos de los activos financieros más apetecidos por el sistema financiero colombiano, los títulos TES TF/2012 y el precio del dólar, se aprecia como el coeficiente de correlación de Pearson no sólo es inexacto, dados los supuestos que lo constituyen, sino que debe ser remplazado por otras medidas de dependencia disponibles para establecer la asociación entre esta clase de variables; dichas medidas, al caracterizar en mayor forma la relación de dependencia entre las variables otorgan una mejor y más diversa cantidad de información a sus usuarios.

Especial atención debe ser otorgada a la distribución que define la relación de dependencia entre las variables puesto que aun cuando se tengan variables normales individualmente es posible tener un grado de asociación con una distribución diferente; siendo por lo tanto posible tener portafolios sesgados no obstante estar compuestos por activos financieros insesgados.

Las implicaciones de dicha afirmación recaen principalmente sobre la eficiencia en la gestión financiera y de riesgo de las entidades financieras colombianas en ge-

Cuadro No.3 Ajuste de la Coeficientes de ajuste de las distribuciones				
Gumbel	Joe	bb7	Frank	Normal
delta = 1.0767	theta = 1.0274	theta = 1 delta = 0.1548	0.4287	0.1361

neral y sobre de la supervisión que de la misma emprendan tanto la Superintendencia Bancaria como la Superintendencia de Valores de Colombia, en particular las primeras se encontrarían maximizando su rendimiento y minimizando su riesgo en escenarios inferiores al potencial, y las segundas, estarían tomando determinaciones sobre modelos de riesgo de mercado inconsistentes con la realidad.

BIBLIOGRAFÍA

- Campbell, J. Y., A.W. Lo, and A. MacKinlay (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, Princeton.
- Cardozo P. (2004). *Valor en riesgo de los activos financieros colombianos aplicando la teoría de valor extremo*. Uniandes.
- Embrechts P. A. McNeil and D. Straumann (1999). "Extremes and Integrated Risk Management", *RISK*, 5, 69-71.
- Fedesarrollo, Minhacienda, Banco Mundial (1996). *Misión de estudios del mercado de capitales*. Bogotá. Fedesarrollo.
- Formisano, M. y S., Gutiérrez (2003), "La culpa es del yankee: correlaciones e ineficiencias en el mercado de dinero", *Apuntes de Banca y Finanzas*. Bogotá. Asobancaria.
- Joe. H. (1997). "Multivariate Models and Dependence Concepts". Chapman & Hall. *Monographs on Statistics and Applied Probability*, 73.
- J. P. Morgan (1995), *RiskMetrics-technical manual*, third ed.
- Lintner J. (1965), "The valuation of risky assets and the selection of risky investment in stock portfolios and capital budgets", *Review of Economics and Statistics*, 47, 13-37.
- Medina L (2003). "Aplicación de la teoría del portafolio en el mercado accionario colombiano". *Cuadernos de Economía*, N° 39.
- Markowitz H. (1959), *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*, John Wiley and Sons, New York.
- Nelsen, R. B. (1999): *An Introduction to Copulas*. Springer, New York.
- Ross, S. (1976), "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing." *Journal of Economic Theory*. 13: 341-360.
- Sklar A. (1959), "Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges", *Publ. Inst. Stat. Univ. Paris*, 8, 229-231.
- Sklar A. (1973), "Random Variables, Joint Distribution Functions and copulae", *Kybernetika*, 9, 449-460.
- Superintendencia Bancaria de Colombia. (2003). *Circular básica contable y financiera*. Capítulo XXI, "Criterios y procedimientos para medición de riesgos de mercado".

APÉNDICE NO.1

Coefficiente de correlación de Pearson:

Ecuación No.1

$$r = \frac{n(\sum XY) - (\sum X)(\sum Y)}{\sqrt{[n\sum X^2 - (\sum X)^2][n\sum Y^2 - (\sum Y)^2]}}$$

Donde el numerador corresponde a la covarianza entre X y Y y el denominador es la raíz cuadrada de la multiplicación de la varianza de X por la Varianza de Y.

Correlación en el rango
Coefficiente de Kendall:
Ecuación No.2

$$\rho_r(X, Y) = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0].$$

Donde (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) son dos pares de variables aleatorias independientes.

Coefficiente de Spearman:
Ecuación No.3

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y))$$

Donde X y Y son variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 y una función de distribución conjunta F