# Procesos de Lévy y transformada de Fourier aplicados a la valoración de opciones financieras

John Freddy Moreno Trujillo*

*Docente investigador*
*Universidad Externado de Colombia*
*Magister en matemática aplicada.*
*Estudios de doctorado en economía y estadística,*
*Universidad del Rosario y Universidad Nacional de Colombia.*
*Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas*
*john.moreno@uexternado.edu.co*

* Artículo recibido el 15 de febrero de 2010. Aceptado el 25 de agosto de 2010.

## Introducción

El primer intento formal por modelar el comportamiento del precio de activos financieros fue desarrollado en 1900 por Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier en su tesis doctoral titulada *Teoría de la especulación*. En este trabajo Bachelier introdujo el movimiento browniano con el objetivo de modelar el comportamiento aleatorio de los precios de los activos en la Bolsa de París.

En 1973, Fisher Black y Myron Scholes [BS] desarrollan el popular modelo Black-Scholes para la valoración de opciones de tipo europeo. En este modelo se retoman las ideas de Bachelier sobre la modelación del comportamiento del precio del activo subyacente en la opción, pero se mejoran de manera importante gracias a los desarrollos propios de la época, particularmente a la implementación de los resultados del matemático japonés Kiyoshi Itô, conocidos hoy en día como cálculo de Itô.

Si bien el modelo Black-Scholes-Merton (en adelante denotado simplemente como BS) goza de una alta aceptación dentro del mundo académico por su aporte concreto y sólido al problema de valoración, ha sido fuertemente criticado por aquéllos que día tras día se enfrentan a la práctica financiera. Estas críticas se basan esencialmente en que los resultados obtenidos por la implementación del modelo, no corresponden a los datos que se observan en el mercado. No es difícil determinar cuál es el origen de esta discrepancia entre el modelo y la realidad. Claramente está la situación de que el modelo BS es precisamente eso, un modelo de la realidad y que como modelo es simplemente una representación matemática del comportamiento de los precios en el mundo real. Pero más allá de esto, se sabe que el modelo es susceptible de mejoras importantes que incorporan características distintivas de los mercados. Una de estas mejoras está relacionada con la inclusión de saltos en el comportamiento del precio, lo que ha dado origen a los modelos de difusión y saltos entre los cuales el más conocido es el desarrollado por Merton en 1976 [Me].

Otra interesante extensión considera modelos en los cuales la volatilidad del precio del activo sigue un proceso estocástico determinado. Estos tipos de modelos son conocidos como modelos con volatilidad estocástica.

Los dos tipos de extensiones mencionados y muchos otros pueden agruparse dentro del conjunto de modelos que siguen procesos de Lévy y que cada día son más reconocidos y aplicados dentro de la modelación financiera.

El presente documento tiene como fin introducir al lector en la modelación financiera mediante procesos de Lévy, destacando el importante papel que juega la transformada de Fourier en el proceso de modelación y valoración de derivados financieros bajo este esquema. Siguiendo este objetivo, el documento está dividido de la siguiente manera. En la primera sección se realiza una breve descripción de la transformada de Fourier y sus propiedades más importantes. En la segunda sección se describe la función característica de una variable aleatoria y su relación con la transformada de Fourier. En la sección tres se define qué es un proceso de Lévy y se dan algunos ejemplos. En la sección cuatro se presenta el modelo BS como un modelo Lévy exponencial y se desarrollan las fórmulas de valoración a través de la aplicación de la transformada de Fourier. En la quinta sección se presenta el modelo de difusión y saltos de Merton y se desarrollan las fórmulas de valoración para este caso, aplicando la transformada de Fourier.

A pesar de las características un tanto técnicas del presente documento, invito al lector a que lo disfrute y espero lo considere en sus futuras investigaciones como una fuente de información sobre el tema.

## 1. La transformada de Fourier

La transformada de Fourier de una función $g(t)$ en una función $G(w)$, es definida utilizando las constantes arbitrarias $a$ y $b$, llamadas parámetros de la transformada, de la siguiente manera:

$$G(w) = F[g(t)](w) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1-a}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ibwt}\ g(t)$$

Y la transformada inversa de Fourier de la función $G(w)$ en la función $g(t)$ es definida por:

$$g(t) = F^{-1}[G(w)](t) = \sqrt{\frac{|b|}{(2\pi)^{1+a}}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ibwt}\ G(w$$

Para los propósitos propuestos se asumirá que el valor de los parámetros de la transformada y su inversa son $a = 1$ y $b = 1$, con lo cual:

$$G(w) = F[g(t)](w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwt}\ g(t)\,dt$$

y

$$g(t) = F^{-1}[G(w)](t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwt}\, G(w)\, dw$$

Algunas propiedades básicas de la transformada de Fourier son las siguientes:

- **Linealidad.** Si se consideran dos funciones $h(t)$ y $g(t)$ con transformadas de Fourier $H(w)$ y $G(w)$ respectivamente, entonces:

  $$F[\alpha h(t) + \beta g(t)] = \alpha F[h(t)](w) + \beta F[g(t)](w) = \alpha H(w) + \beta G(w)$$

- **Diferenciabilidad.** Dada una función $f(t)$ se tiene que

  $$F\left[\frac{\partial f(t)}{\partial t}\right](w) = -iwF[f(t)](w)$$

- **Convolución**. La convolución de dos funciones $h(t)$ y $g(t)$ es definida por:

  $$(h * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)\, g(t-\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

La convolución puede ser considerada como una integral que mide la cantidad de solapamiento de una función $h(t)$ cuando es colocada sobre otra función $g(t)$. Si las funciones $h(t)$ y $g(t)$ tienen transformadas de Fourier $H(w)$ y $G(w)$ respectivamente, entonces:

$$F[(h * g)(t)](w) = H(w)\, G(w)$$

En la siguiente sección se describe la función característica de una variable aleatoria y su relación con la transformada de Fourier.

## 2. Función característica

Dada una variable aleatoria $X$ con función de densidad de probabilidad $f_x(x)$, se define su función característica $\phi_X(w)$ como el valor esperado de $e^{iwx}$, donde $i = \sqrt{-1}$. Se tiene, entonces, que:

$$\phi_X(w) = E\left[e^{iwx}\right] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwx}\, f_X(x)\, dx$$

Se puede observar que la función característica es la transformada de Fourier de la función de densidad de probabilidad $f_x(x)$ , luego es posible obtener la función de densidad a partir de la función característica aplicando la transformada inversa de Fourier.

$$f_X(x) = F^{-1}[\, \phi_X(w)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwx}\, \phi_X(w)\, dw$$

En el caso en el cual la variable aleatoria $X$ es discreta con posibles valores $\{x_1, x_2, x_3,...\}$ y tal que $P[X = x_k] = \beta_k$, la función característica se define como:

$$\phi_X(w) = E\left[e^{iwx}\right] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{iwx_k}\, \beta_k$$

Algunas propiedades importantes de la función característica son las siguientes:

- $|\phi_X(w)| < 1$ para todo $w \in R$.
- $|\phi_X(0)| = 1$.
- $\phi_X(w)$ es uniformemente continua.
- $E[X^k] = i^{-k} \frac{d^k}{dw^k} \phi_X(w)|_{w=0}$. Los k-ésimos momentos centrales de la variable se pueden obtener a partir de la función característica.
- La función característica transforma convoluciones en multiplicaciones, ya que si se consideran las variables aleatorias $x_1, x_2, x_3,... x_n$ se tiene que

$$\phi_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(w) = \prod_{i=1}^{n} \phi_{X_i}(w)$$

Propiedad que es heredada directamente de la propiedad de convolución de la transformada de Fourier.

Asociada a la función característica se define el exponente característico, o función generadora de cumulantes ($\psi_x(w)$) de la variable aleatoria $X$ de la siguiente manera:

$$\psi_x(w) = 1\text{n}\,(\phi_x(w))$$

El n-ésimo cumulante de la variable $X$ es definido como:

$$cumulante_n = i^{-n} \frac{d^n}{dw^n} \Psi_{\mathrm{X}}(\mathrm{w})|_{w=0}$$

Utilizando los cumulantes de la variable es posible calcular sus momentos alrededor de la media, en particular:

Media: $E[X] = cumulante_1$

Varianza: $V[X] = E[(X - E[X])^2] = cumulante_2$

Sesgo: $Sesgo[X] = \frac{E\left[(X-E[X])^3\right]}{\left(\sqrt{E[(X-E[X])^2]}\right)^3} = \frac{cumulante_3}{(cumulante_2)^{3/2}}$

Curtosis: $Curtosis[X] = \frac{E[(X-E[X])^4]}{\left(\sqrt{E[(X-E[X])^2]}\right)^4} - 3 = \frac{cumulante_4}{(cumulante_2)^2}$

La siguiente Tabla muestra la función característica para algunas distribuciones de probabilidad muy utilizadas en la modelación financiera.

| **Distribución** | $\boldsymbol{f_X(x)}$ | $\boldsymbol{\phi_X(w)}$ |
|---|---|---|
| Normal | $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} exp\left\{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$ | $exp\left(i\mu w - \frac{\sigma^2 w^2}{2}\right)$ |
| Exponencial | $\lambda e^{-\lambda x}$ | $\frac{\lambda}{\lambda - iw}$ |
| Poisson | $\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$ | $e^{\lambda(e^{ix}-1)}$ |
| Gamma | $\frac{\beta^{-\alpha} e^{-x/\beta} x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ | $(1 - i\beta w)^{-\alpha}$ |

En la siguiente sección se define qué es un proceso de Lévy y se enuncian algunas de sus principales características.

## 3. Procesos de Lévy

Un proceso estocástico $\{X_t, t \geq 0\}$ con trayectorias continuas a derecha con límite por la izquierda, o un proceso estocástico adaptado definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, F, P)$ con valores en los reales, se dice un proceso de Lévy si satisface las siguientes condiciones:

- Tiene incrementos independientes. Para $u > t$, $(X_u - X_t)$ es independiente de la filtración $F_t$, es decir $P[X_u - X_t|F_t] = P[X_u - X_t]$.
- Tiene incrementos estacionarios. $X_{t+h} - X_t$ tiene la misma distribución que $X_h$.
- $X_0 = 0$ casi seguramente.

Otra forma en la que se pueden definir los procesos de Lévy es utilizando el concepto de distribución infinitamente divisible, ya que los procesos de Lévy son generados por distribuciones infinitamente divisibles.

Una variable aleatoria $X$ se dice infinitamente divisible si puede ser representada por la suma de $n$ variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con $n \geq 2$.

$$X = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

Si $\phi_X(w)$ denota la característica de la variable $X$ y $\phi_{Xn}(w)$ la función característica común de los $n$ sumandos. La relación entre estas funciones se puede delimitar a partir de las propiedades de la función característica, y está determinada por:

$$\phi_X(w) = \left(\phi_{X_n}(w)\right)^n \text{ luego } \phi_{X_n}(w) = \left(\phi_x(w)\right)^{1/n}$$

Como ejemplo si $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ se tiene que:

$$\phi_{X_n}(w) = \{\phi_X(w)\}^{1/n} = \left\{exp\left(i\mu w - \frac{\sigma^2 w^2}{2}\right)\right\}^{1/n} = exp\left\{i\left(\frac{\mu}{n}\right)w - \frac{(\sigma^2/n)w^2}{2}\right\}$$

luego los $n$ sumandos idénticamente distribuidos también son normales con media $\frac{\mu}{n}$ y varianza $\frac{\sigma^2}{n}$, es decir, $X = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

Formalmente la relación de este concepto con los procesos de Lévy es la siguiente. Un proceso estocástico es un proceso de Lévy si y solo si para todo $t$, los incrementos del proceso siguen una distribución infinitamente divisible.

Es importante destacar que el movimiento browniano estándar es el único proceso de Lévy continuo generado por una distribución normal. De igual forma, los procesos Poisson y Poisson compuestos utilizados para modelar saltos en los precios de los activos, son procesos de Lévy.

Si $\{\tau_i\}_{i \geq 1}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes distribuidas exponencial con parámetro $\lambda$, y sea $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$. Un proceso Poisson con intensidad $\lambda$ es:

$$N_t = \sum_{n \geq 1} 1_{t \geq T_n}$$

El proceso $N_t$ cuenta el número de eventos aleatorios ocurridos en el intervalo [0, $t$]. No es muy difícil verificar que un proceso Poisson cumple con las condiciones necesarias para ser considerado un proceso de Lévy.

Como se puede ver de la definición, el proceso Poisson presenta trayectorias crecientes, con saltos de longitud 1. Una versión más general de este proceso es el proceso Poisson compuesto $\{P_t\}_{t \geq 0}$ con intensidad $\lambda$ definido por:

$$P_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Donde las variables $Y_i$ son independientes e idénticamente distribuidas e independientes de $N_t$. Estas variables describen el tamaño y sentido de los saltos de acuerdo con alguna función de densidad $f$.

La función característica de un proceso Poisson $N_t$ puede derivarse utilizando la expansión en series de Taylor de la función exponencial, tal que:

$$\phi_N(w) = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!} \right\} e^{iwk} = exp\left\{ \lambda t (e^{iw} - 1) \right\}$$

Para obtener la función característica de un proceso Poisson compuesto $\{P_t\}_{t \geq 0}$ con intensidad $\lambda$ y distribución de tamaño de salto $f$, se denota por $f^*$ la función característica de $f$ (Ver[CT]),

$$E\left[e^{iwP_t}\right] = E\left[E[e^{iwP_t}] | N_t\right] = E[f^*(w)^{N_t}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^n f^*(w)^n}{n!}$$
$$= exp\left\{ \lambda t \int_{-\infty}^{\infty} \left(e^{iwx} - 1\right) f(dx) \right\}$$

Definiendo una nueva medida $l(dx) = \lambda f(dx)$ que es llamada la medida de Lévy del proceso $\{P_t\}_{t \geq 0}$, la fórmula anterior puede escribirse como un caso especial de la fórmula de representación de Lévy-Khintchine, la cual se describe más adelante, de forma que:

$$E\left[e^{iwP_t}\right] = exp\left\{t\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{iwx} - 1\right)l(dx)\right\}$$

La medida de Lévy $l(dx)$ de un proceso Poisson compuesto puede interpretarse como una medida del número promedio de saltos por unidad de tiempo.

El exponente característico $\psi_x$ $(w)$ de un proceso de Lévy, satisface la siguiente fórmula de representación de Lévy-Khintchine

$$\Psi_X(\mathrm{w}) = i\gamma w - \frac{1}{2}\sigma^2 w^2 + \int_{-\infty}^{\infty}\left(\exp(iwx) - 1 - iwx1_{\{|x|<1\}}\right)l(dx)$$

donde $\gamma \in R$, $\sigma^2 \geq 0$ y $l(dx)$ es la medida Lévy. Decimos, entonces, que toda distribución infinitamente divisible tiene un tripla de Lévy característica $(\gamma, \sigma^2, l(dx))$.

## 4. El modelo Black-Scholes como un modelo de Lévy exponencial

En el modelo BS se asume que el comportamiento del precio de los activos satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

donde el componente de tendencia $\mu S_t$ es el retorno esperado del activo proporcional a su precio y el componente de difusión $\sigma S_t$ es la volatilidad constante del precio del activo proporcional a su precio.

Dado que de forma general la variable aleatoria $S$ tiene una dinámica determinada por el proceso de Itô:

$$dS = a(S,t)dt + b(S,t)dW_t$$

y considerando una función $V$ de las variables $s$ y $t$, la dinámica de $V(S, t)$ está determinada por la formula de Itô:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

y en términos del movimiento browniano estándar $W$, se tiene que:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}(a(S,t)dt + b(S,t)dW_t) + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dt$$

$$dV = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + a(S,t)\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}b^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + b(S,t)\frac{\partial V}{\partial S}dW_t$$

Si se asume que la función $V(s) = ln(s)$ se aplica a $S_t$, se tiene que:

$$dln(S_t) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma dW_t$$

de donde

$$ln(S_t) = ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t) + \sigma W_t$$

expresión que nos dice que los retornos logarítmicos del activo siguen una distribución normal con función de densidad:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}}exp\left\{-\frac{\left[\ln(S_t) - \left(\ln(S_0) + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)\right]^2}{2\sigma^2 t}\right\}$$

De las expresiones anteriores se tiene que:

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

y decimos que en el modelo BS el precio de los activos riesgosos sigue un movimiento browniano geométrico.

Bajo este marco el problema de valorar opciones puede ser abordado desde diferentes metodologías, una de las cuales es la valoración por replicación. En este caso se construye un portafolio de replicación $Y_t$, compuesto por una posición larga en la opción $V(S, t)$ sobre el subyacente $S$, y una posición corta en alguna cantidad $\Delta$ de dicho subyacente.

El valor del portafolio en un instante $t$ estará dado por:

$$Y_t = V(S_t, t) - \Delta S_t$$

y los cambios en su valor están determinados por

$$dY_t = dV(S_t, t) - \Delta dS_t$$

Al aplicar la fórmula de Itô, la dinámica del precio del portafolio estará dada por:

$$dY_t = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}dt - \Delta dS_t$$

Si en esta última ecuación hacemos $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$ , se simplifica a la expresión:

$$dY_t = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt$$

Luego, el valor del portafolio es libre de riesgo y asumiendo la ausencia de oportunidades de arbitraje se tiene que:

$$E[dY_t] = rY_t dt$$

Se concluye que:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}\right)dt = r\left(V(S_t,t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}S_t\right)dt$$

expresión de la cual se puede deducir la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes,

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} + r\frac{\partial V}{\partial S_t}S_t - rV(S_t,t) = 0$$

Se puede observar que ésta es una ecuación diferencial parcial lineal de segundo orden parabólica, en la que no hay términos aleatorios. Asociada a esta ecuación diferencial, están las condiciones de frontera: $max\{S_T - K, 0\}$ para una opción call y $max\{K - S_T, 0\}$ para una opción put. La solución de esta ecuación diferencial puede establecerse por métodos analíticos o numéricos como los utilizados para resolver la ecuación de calor.

Otra forma de resolver el problema de valoración bajo el marco BS es utilizando medidas martingala equivalentes. En este esquema partimos de considerar un movimiento browniano estándar $\{W_t; 0 \leq t \leq T\}$, definido sobre un espacio de probabilidad completo $(\Omega, F, P)$. Bajo la medida de probabilidad actual $P$, el comportamiento del precio del activo está determinado por un movimiento browniano geométrico

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}$$

y se tiene que bajo $P$ el proceso de precios del activo riesgoso es martingala.

Al ser el modelo BS completo es posible determinar una única medida martingala equivalente $Q$ bajo la cual el proceso de precio descontado del activo $\{e^{-rt} S_t; 0 \leq t \leq T\}$ es martingala. Se tiene entonces, que bajo la medida $Q$ el comportamiento del precio del subyacente es descrito por:

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma\widetilde{W_t}\right\}$$

donde $\widetilde{W_t}$ es un movimiento browniano estándar sobre $(\Omega, F, Q)$. Bajo este esquema, el valor de una opción *call* europea está determinado por:

$$C(t,S_t) = e^{-rt}\tilde{E}_t[(S_T - K)^+]$$

donde $\tilde{E}[\cdot|F_t]$ denota el valor esperado calculado bajo la medida $Q$, condicional a la información disponible en el tiempo $t$.

Otra forma en la que se puede ver este modelo es considerándolo un modelo de Lévy exponencial, esta visión que se sigue a partir de la ecuación que describe el comportamiento de los precios como un movimiento browniano geométrico.

$$S_t = S_0 exp\left\{\left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\},$$

la cual puede ser expresada en la forma

$$S_t = S_0 e^{L_t},$$

donde el proceso de precio del activo $\{S_t; 0 \leq t \leq T\}$ es modelado como el exponencial del procesos de Lévy $\{L_t; 0 \leq t \leq T\}$ donde $L_t = \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t$.

De lo anterior, el modelo BS puede ser clasificado como un modelo exponencial de Lévy continuo, pues el movimiento browniano presenta trayectorias continuas. Otros modelos que también son modelos de Lévy exponenciales son el modelo Merton de difusión y saltos [Me], en el que las trayectorias presentan discontinuidades ocasionales de acuerdo con un proceso Poisson, y el modelo varianza Gamma de Madan, Carr y Chang [MCC], en el que el proceso es de salto puro.

### 4.1 Valoración de opciones mediante transformada de Fourier

Dadas las medidas martingala equivalentes *P* y *Q* y considerando un mercado libre de arbitraje, es posible establecer el precio de cualquier activo en el instante *t* como:

$$S_t = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[\, S_T | F_t]$$

En un mercado que cumple con estas condiciones se introduce un activo contingente con precio de ejercicio *K* y maduración *T*. Si asumimos que el activo contingente puede ser una opción *call* o una opción *put* europea, su valor en un instante *t* estará determinado por la expresión:

- $C(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[(S_T - K)^+ | F_t]$ para la opción call.
- $P(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\tilde{E}[(K - S_T)^+ | F_t]$para la opción put,

ecuaciones que pueden reescribirse como:

- $C(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\left\{\int_K^\infty (S_T - K)(f_{S_T}^Q | F_t) dS_T\right\}$,
- $P(t,S_t) = e^{-r(T-t)}\left\{\int_0^K (K - S_T)(f_{S_T}^Q | F_t) dS_T\right\}$,

donde $(f_{S_T}^Q | F)$, denota la función de densidad de probabilidad de $S_T$ bajo la medida de probabilidad *Q*. En BS se asume que $S_T$ condicional a $F_t$ sigue una distribución lognormal, luego:

$$(f_{S_T}^Q | F) = \frac{1}{S_t\sqrt{2\pi\sigma^2(T-t)}}exp\left[-\frac{\left\{\ln(S_t) - \left[\ln(S_t) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T\_t)\right]\right\}^2}{2\sigma^2(T-t)}\right]$$

En general, para los modelos de Lévy exponenciales $(f_{S_T}^Q | F)$ no puede ser expresada de forma explícita, utilizando funciones matemáticas conocidas o simplemente ésta no se conoce, lo cual no permite la valoración directa mediante las ecuaciones anteriores. Para poder resolver esta situación se utiliza el hecho de que la función característica de cualquier proceso de Lévy exponencial siempre existe y se replantean las ecuaciones de valoración en términos de la función característica.

Si se considera el valor de la opción *call* en $t = 0$, y se realiza un cambio de variable de $S_t$ a $Ln(S_t)$, se tiene que:

$$C(T,K) = e^{-rT}\left\{\int_{\ln(K)}^{\infty}\left(e^{\ln(S_T)} - e^{\ln(K)}\right)(f^{Q}_{\ln(S_T)}|F_0)\,d\ln(S_T)\right\}$$

Sea $s_T = ln(S_T)$ y $k = \ln(K)$, luego la ecuación anterior puede escribirse como:

$$C(T,k) = e^{-rT}\left\{\int_{k}^{\infty}\left(e^{s_T} - e^{k}\right)(f^{Q}_{s_T}|F_0)\,ds_T\right\}$$

De acuerdo con la definición presentada en la sección 2, la función característica de la variable aleatoria $s_T = ln(S_T)$ es la transformada de Fourier de la función de densidad $f^{Q}_{s_T}$, luego:

$$\phi_{s_T}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iws_T} f^{Q}_{s_T} ds_T$$

Bajo el modelo BS la variable $s_T$ sigue una distribución normal, luego su función característica es:

$$\phi_{s_T}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iws_T} f^{Q}_{s_T} ds_T = exp\left[i\left\{s_o + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T\right\}w - \frac{(\sigma^2 T)w^2}{2}\right]$$

Para garantizar la existencia de la transformada Fourier de la función que describe el precio de la opción *call*, Carr y Mandan [CM] proponen un precio *call* modificado, definido como:

$$C_{mod}(T,k) = e^{\alpha k}C(T,k)$$

expresión que permite garantizar la existencia de la transformada seleccionando un valor adecuado de $\alpha$. Si se toma la transformada de Fourier de esta función se tiene que:

$$\Psi_T(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iwk}\, C_{mod}(T,k)\,dk$$

Una vez garantizada la existencia de esta transformada, la función que determina el valor de la opción *call* puede ser determinada mediante la aplicación de la transforma inversa de Fourier como lo muestran las siguiente ecuaciones.

$$C_{mod}(T,k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwk}\,\Psi_T(w)\,dw$$

$$e^{\alpha k}C(T,k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iwk}\,\Psi_T(w)\,dw$$

$$C(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{iwk}}\ \Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w})dw$$

donde la última expresión describe el precio de una opción *call* europea en términos de la función de cumulantes de la variable $S_T$. Se tiene entonces que:

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{iwk}}\, e^{\alpha k} C(T,k)\, dk$$

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{iwk}}\, e^{\alpha k}\, e^{-rT} \int_{\mathrm{k}}^{\infty} \left(e^{s_T} - e^{\mathrm{k}}\right)(f_{s_T}^{Q} | F_0) ds_T\, dk$$

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\, (f_{s_T}^{Q} | F_0) \int_{-\infty}^{s} \mathrm{e}^{\mathrm{iwk}} \left(e^{s_T + \alpha k} - e^{(1+\alpha)\mathrm{k}}\right) dk ds_T$$

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT}\, (f_{s_T}^{Q} | F_0) \left(\frac{e^{(\alpha+1+iw)s_T}}{\alpha + iw} - \frac{e^{(\alpha+1+iw)s_T}}{\alpha + 1 + iw}\right) ds_T$$

$$\Psi_{\mathrm{T}}(\mathrm{w}) = \frac{e^{-rT}\phi_{s_T}(w - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - w^2 + i(2\alpha + 1)w}$$

De acuerdo con esta última expresión el valor de una opción *call* europea está determinado por:

$$C(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{iwk}}\ \frac{e^{-rT}\phi_{s_T}(w - (\alpha + 1)i)}{\alpha^2 + \alpha - w^2 + i(2\alpha + 1)w} dw$$

ecuación en donde el valor de la función depende explícitamente de la función característica $\phi_{sT}$

En la siguiente sección se describe el modelo Merton de difusión y saltos y se determina la fórmula de valoración de una opción *call* europea mediante transformada de Fourier para este modelo.

## 5. Modelo Merton de difusión y saltos

El modelo Merton de difusión y saltos puede ser descrito como un modelo Lévy exponencial de la forma:

$$S_t = S_0 e^{X_t}$$

donde el proceso de Lévy $X_t$ es:

$$X_t = \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

Se puede observar que la diferencia entre el modelo BS y el modelo Merton radica en la inclusión del término $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i$, que denota un proceso Poisson compuesto con intensidad λ. Merton [Me] asume que las variables $Y_i$ son independientes e idénticamente distribuidas de acuerdo con una distribución lognormal con parámetros asociados, μ y σ, luego en este modelo se tienen tres fuentes de aleatoriedad descritas por los tres parámetros λ, μ y σ, que buscan capturar el sesgo y el exceso de curtosis en los retornos logarítmicos de los activos.

La ecuación que describe el comportamiento del precio de los activos en este modelo, es la solución de la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = (\alpha - \lambda k)dt + \sigma dW_t + (y_t - 1),$$

que también puede ser utilizada para describir la mecánica del precio de los activos en este caso.

Determinar la distribución que siguen los retornos logarítmicos en este caso es sencillo debido al supuesto realizado sobre la distribución de las variables que determinan la dirección y el tamaño del salto. Si en un intervalo determinado no se presentan saltos se tendrá que $\sum_{i=1}^{N_t} Y_i = 0$ y el comportamiento del modelo será idéntico al del modelo BS. En caso de que se presenten saltos (evento que denotaremos como *A*), y denotando por $x_t$ a los retornos logarítmicos hasta el tiempo *t* se tiene que:

$$P[x_t \in A] = \sum_{k=0}^{\infty} P[N_t = k] P[x_t \in A | N_t = k],$$

donde se ha utilizado el concepto de probabilidad condicional. Se tiene entonces que:

$$f_{x_t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!} N\left(x_t; \left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t + k\mu, \sigma^2 t + k\delta^2\right),$$

donde *N* denota la distribución normal.

A partir de esta expresión es posible determinar la función característica de $x_t$, como:

$$\phi_{x_t}(w) = exp\left\{\lambda t exp\left[\frac{1}{2}w(2iu - \delta^2 w)\right] - \lambda t(1 + iwk) - \frac{1}{2}tw(-2i\alpha + \sigma^2[i + w])\right\}$$

Expresión que puede ser simplificada hasta obtener:

$$\phi_{x_t}(w) = \exp\lfloor t\Psi(w)\rfloor$$

La valoración de opciones bajo este modelo sigue las mismas metodologías desarrolladas para la valoración bajo el modelo BS, por ejemplo, para determinar un portafolio de replicación del comportamiento de la opción definida sobre un subyacente que sigue el modelo Merton de difusión y saltos, se establece una posición larga en la opción descrita por la función $V(S, t)$ y una posición corta en una cantidad $\Delta$ del activo subyacente. De esta forma, el valor del portafolio en un tiempo $t$ es:

$$P_t = V(S,t) - \Delta S_t$$

De nuevo los cambios en el valor del portafolio para un intervalo de tiempo muy pequeño están descritos como:

$$dP_t = dV(S,t) - \Delta dS_t$$

Al aplicar la fórmula de Itó para procesos de difusión y saltos tenemos que:

$$d\big(V(S_t,t)\big) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + (\alpha - \lambda k)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dt + \frac{\sigma^2 {S_t}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}dt + \sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}dW_t + [V(y_tS_t,t) - V(S_t,t)]dN_t$$

y la dinámica del portafolio de replicación estará descrita por la ecuación:

$$dP_t = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + (\alpha - \lambda k)S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{\sigma^2 {S_t}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} - \Delta(\alpha - \lambda k)S_t\right\}dt + \left\{\sigma S_t\frac{\partial V}{\partial S_t} - \Delta\sigma S_t\right\}dW_t + \{V(y_tS_t,t) - V(S_t,t) - \Delta(y_t - 1)S_t\}dN_t$$

Si se toma $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S_t}$, el cambio en el valor del portafolio está determinado por la expresión

$$dP_t = \left\{\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 {S_t}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2}\right\}dt + \left\{V(y_tS_t,t) - V(S_t,t) - \frac{\partial V}{\partial S_t}(y_t - 1)S_t\right\}dN_t,$$

ecuación en la que no aparece el componente de ruido asociado al movimiento browniano, pero se mantiene el componente de saltos $dN_t$. Merton argumenta que el componente de saltos en la dinámica del precio del activo no está correlacionado con todo el mercado, entonces el riesgo de salto es diversificable y no debería implicar una prima de riesgo. Por lo tanto, el valor esperado de crecimiento del portafolio es la tasa libre de riesgo:

$$E[dP_t] = rP_t dt$$

Esta última expresión nos lleva a la siguiente ecuación diferencial parcial del modelo Merton de difusión y saltos.

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2 {S_t}^2}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial {S_t}^2} + rS_t\frac{\partial V}{\partial S_t} - rV + \lambda E[V(y_t S_t, t) - V(S_t, t)] - \lambda S_t\frac{\partial V}{\partial S_t}E[y_t - 1] = 0$$

Bajo el supuesto de la distribución lognormal de las variables $Y_t$ es posible resolver esta ecuación diferencial y obtener la siguiente fórmula para el valor de una opción *call* europea.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\frac{e^{-\overline{\lambda}\tau}\left(\lambda\tau\right)^i}{i!}C_{BS}(S_t, \tau = T - t, \sigma_i, r_i)$$

donde,

$$\lambda = \lambda e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2}$$

$${\sigma_i}^2 = \sigma^2 + \frac{i\delta^2}{\tau}$$

$$r_i = r - \lambda\left(e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1\right) + \frac{i(\mu + \frac{1}{2}\delta^2)}{\tau}$$

y $C_{BS}$ es el precio del *call* por la fórmula Black-Scholes sin saltos.

Entonces el modelo Merton para valoración de opciones sobre subyacentes que siguen un proceso de difusión y saltos, puede considerarse como un promedio del modelo BS de valoración, condicional a que el precio salte $i$ veces antes de la fecha de maduración, con pesos determinados por la probabilidad de que el precio del subyacente salte.

### 5.3 El modelo Merton y la transformada de Fourier

El primer paso en la implementación de la transformada de Fourier es obtener la función característica del logaritmo de los precios, partiendo de la ecuación que describe la dinámica de este logaritmo

$$\ln(S_t) = \ln(S_o) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_t$$

donde $k = e^{\mu + \frac{1}{2}\delta^2} - 1$. Si se aplica la definición descrita en las secciones previas, se tiene que la función característica es:

$$\phi(w) = exp\left[\lambda t\left(\exp\left(i\mu w - \frac{\delta^2 w^2}{2}\right) - 1\right) + iw\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t\right) - \frac{\sigma^2 w^2}{2}t\right]$$

Al sustituir esta función característica en la ecuación de valoración de una opción *call* mediante transformada de Fourier, que se desarrolló al final de la sección cuatro, se tiene que

$$C_{Merton-FT}(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{iwk}} \frac{e^{-rT}\phi_{s_T}(w-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-w^2+i(2\alpha+1)w}dw$$

donde,

$$\phi(w) = exp\left[\lambda t\left(\exp\left(i\mu w - \frac{\delta^2 w^2}{2}\right) - 1\right) + iw\left(\ln(S_0) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k\right)t\right) - \frac{\sigma^2 w^2}{2}t\right]$$

## Conclusiones

Como se mostró en el texto la siguiente expresión permite determinar el valor de una opción *call* mediante la aplicación de la transformada de Fourier, vía la función característica de la distribución que sigue el proceso de logaritmo del precio del subyacente.

$$C_{Merton-FT}(T,k) = \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{iwk}} \frac{e^{-rT}\phi_{s_T}(w-(\alpha+1)i)}{\alpha^2+\alpha-w^2+i(2\alpha+1)w}dw$$

Aunque esta expresión tiene una complejidad mayor al momento de calcular el valor del *call* comparada con las fórmulas estándar en los modelos BS y de Merton, tiene la ventaja de su generalidad, pues permite determinar el valor de la opción sobre supuestos muy generales en la distribución del logaritmo del subyacente.

Esta generalidad permite considerar modelos en los que la distribución del subyacente considera múltiples parámetros, que capturan de una mejor manera el comportamiento real de los mercados financieros.

Invito al lector a utilizar este documento como punto de partida para el desarrollo de esquemas de valoración que se ajustan mejor a los datos observados, sin la necesidad de múltiples restricciones sobre el comportamiento de los precios.

## Bibliografía

[BS] F. Black and M.Scholes. (1976). "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy*, 81 637-659.

[CM] P. Carr and B. Madan. (1998). "Option Valuation using the fast Fourier Transform", *Journal of Computational Finance*, 2 61-73.

[CT] R. Cont and P. Tankov. (2004). "Financial Modeling with Jump Processes", Chapman & Hall/CRR. Financial Mathematics.

[MCC] B. Madan and P. Carr and E. Chang. (1998). "The Variance Gamma Process and Option Pricing", *European Financial Review* 2, 79-105.

[Me] R. Merton. "Option Pricing when the Underlined Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3, 125-144.