

# **Contrastación de paradigmas de las finanzas: normalidad e hipótesis del mercado eficiente. Aplicaciones en MATLAB®**

Germán Forero Laverde\*

---

*Docente investigador  
Universidad Externado de Colombia.  
Master of Science en Finanzas.  
Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas  
germanf.forero@uexternado.edu.co*

\* Artículo recibido el 22 de septiembre de 2010. Aceptado el 18 de enero de 2011.



## Introducción

En la actualidad, sistemas avanzados de programación como MATLAB han ganado un espacio en el sistema financiero como herramientas indispensables para realizar los más diversos cálculos y resolver problemas de alta complejidad. Dada la sofisticación que se ha presentado en la última década en las áreas de riesgo y en las tesorerías de las instituciones financieras, es apenas pertinente realizar un ejercicio de programación para presentar algunos de los resultados más conocidos de la teoría financiera, de forma tal que se pueda incentivar a los futuros profesionales a que profundicen en el estudio de estas nuevas herramientas.

Así, el presente es el primero de una serie de ejercicios pedagógicos que busca servir de abrebocas para estudiantes y profesionales que quieran emprender o reafirmar sus conceptos básicos de programación, así como de análisis de series de tiempo y caracterización de activos financieros.

En este sentido es pertinente revisar dos de los grandes supuestos de las finanzas. En primer lugar, se busca estudiar el supuesto de normalidad de los retornos de los activos financieros, que se ha constituido en la piedra angular de la mayoría de modelos de valoración y riesgo de la segunda mitad del siglo XX. Éste se pone en entredicho al realizar los cálculos de los principales momentos estadísticos y realizar la prueba estadística estándar de normalidad (Jarque y Bera, 1987). Si bien es cierto que la función de distribución normal es relativamente sencilla de operar para alcanzar fórmulas cerradas de valoración, como en el caso del modelo Black–Scholes, en el presente artículo se demostrará que es muy raro el caso en el que los retornos de un activo, en el largo plazo, cumplan con dicho supuesto (Black y Scholes, 1973).

Uno de los principales retos a los que se han enfrentado académicos de las finanzas y de las matemáticas durante las últimas tres décadas consiste en buscar modelos, por lo general utilizando métodos numéricos, que permitan valorar activos sofisticados. La idea de estos nuevos modelos es que la distribución utilizada se acerque más a la distribución implícita en la serie de retornos de los activos para que los precios calculados se ajusten a la realidad. Otro tanto podría decirse de los nuevos modelos que se han diseñado para la medición y valoración del riesgo de activos financieros. Modelos como el de la teoría del valor extremo, o aquéllos que utilizan volatilidad estocástica con saltos, son buenos ejemplos de soluciones para un problema que yace en el centro del modelaje de activos financieros.

En segundo lugar, es pertinente evaluar la aplicabilidad del segundo y tal vez más discutido pilar de la teoría financiera desde que fue postulado en 1965 por Paul Samuelson: la hipótesis del mercado eficiente (Merton, 1985). Éste indica que “El precio de mercado de un activo es igual al valor esperado del valor presente de sus flujos futuros disponibles para distribuir (...), donde la calidad de la información contenida en el valor esperado es alta en relación con la información disponible para los participantes individuales en el mercado” (Merton, 1985, 1). Esto quiere decir que en el mercado no se presentan, de forma sistemática, diferencias sustanciales entre el valor de mercado y el valor fundamental de un activo. Más aún implica que los precios de los activos financieros se comportan como variables aleatorias impredecibles, pues sus retornos siguen una caminata aleatoria.

La pertinencia de la revisión que aquí se hace consiste en agregar, en un solo documento, el acervo de pruebas y conocimiento financiero más relevante sobre las series de precios y retornos financieros acumulado durante las últimas seis décadas, así como producir un código genérico que se puede aplicar a cualquier serie de datos que cumpla con los requisitos de la base de datos aquí empleada. Sin embargo, está más allá del alcance de este artículo innovar sobre lo que se ha dicho acerca de la normalidad de los retornos de los activos financieros o sobre el cumplimiento de los principios de la hipótesis del mercado eficiente.

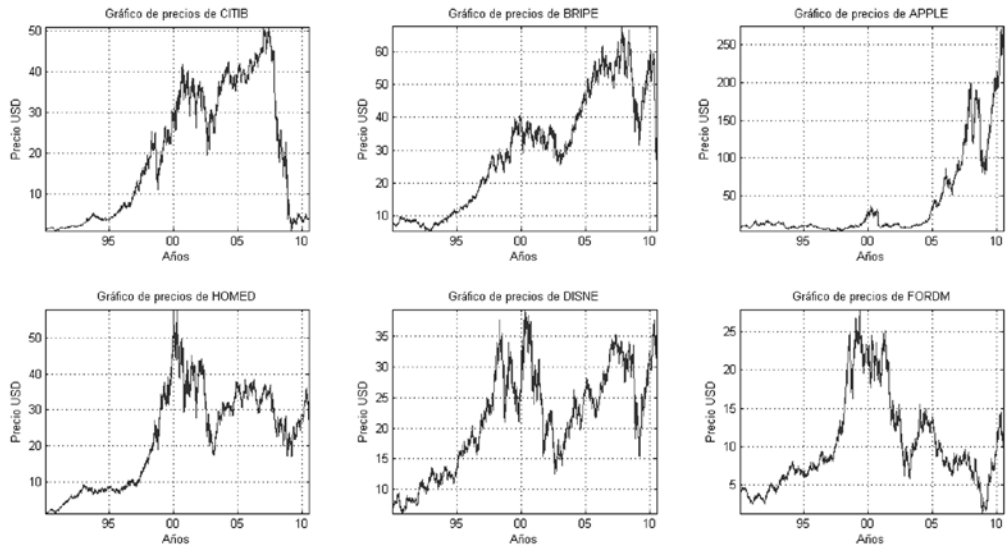
En la primera parte del artículo se describe la base de datos utilizada y se presentan algunas gráficas de los precios de los activos objeto de estudio. La segunda parte, desarrolla la conversión de precios a retornos, el cálculo de sus principales momentos estadísticos (muestra completa y ventanas móviles), la realización de la prueba Jarque-Bera de normalidad y algunas presentaciones gráficas de los resultados. En la tercera parte, se definen los tres tipos de caminata aleatoria que podrían generar los retornos financieros y que comprobarían la HME. Tras la presentación teórica de cada una de éstas se muestran algunas pruebas estadísticas y sus resultados sobre las series de precios. En la última parte, se presentan las principales conclusiones y extensiones al presente artículo. El código completo se incluye como anexo.

## **1. Descripción de la base de datos y gráficas de precios**

Las series de datos financieros sobre las que se realizan los cálculos incluyen los cierres diarios, corregidos para pagos de dividendos y *splits*, de seis acciones ordinarias que se transan en el mercado estadounidense. Los activos en estudio

son los de las siguientes compañías: Citibank, British Petroleum, Apple, Home Depot, Disney y Ford Motors. La ventana de observación va desde el 3 de enero de 1990 hasta el 17 de julio de 2010. Se incluyen solamente los 5172 días en los que se llevaron a cabo negociaciones. La fuente es <http://finance.yahoo.com/>.

Gráfico 1: Precios históricos de los activos en estudio



Del Gráfico 1 se puede inferir lo que motivó la selección de activos para este análisis. En primer lugar, todos pertenecen a sectores diferentes de la economía. Así, se pueden ver representados el sector financiero, de hidrocarburos, tecnológico, de ventas al por menor, de entretenimiento y automotriz. Esto permite tener una representación amplia, aunque incompleta, de la economía estadounidense.

Además, en el Gráfico en mención se ven claramente los distintos momentos por los que ha pasado la economía de Estados Unidos en el período de estudio. Entre otros, se puede observar el auge en el precio de los activos durante lo que el laureado Joseph E. Stiglitz denominó los “felices 90”, la crisis de las compañías de internet de comienzos del siglo XXI y la crisis financiera de 2007. La ventaja de incluir dos ciclos económicos completos se verá en las pruebas de HME, donde se observarán agrupaciones de volatilidad estrechamente vinculadas con los períodos de recesión y auge de la economía.

## 2. Análisis de retornos

### 2.1. Cálculo de retornos a partir de los precios de los activos

Una de las primeras dificultades cuando se van a tratar series financieras consiste en un problema de dimensionalidad de los datos. En ese sentido, cuando se observa el Gráfico 1 se puede hacer un primer análisis individual de los activos. Sin embargo, se cometería un serio error si se intentara hacer un análisis comparativo entre ellos. Esto se debe a que las escalas en el eje Y no son iguales y, por tanto, no se pueden comparar las dimensiones de los incrementos o de las caídas en los precios. De aquí surge la necesidad de buscar una unidad de medida que permita realizar comparaciones entre activos diferentes. Esta necesidad se reafirma al anotar que, como medida de desempeño, a los inversionistas no les preocupa el valor total de su portafolio en un momento dado, tanto como el cambio en dicho valor a lo largo del tiempo.

Así surge, a cambio del precio, el retorno como principal objeto de análisis del estudioso de las finanzas. El retorno simple se define, siguiendo la notación de Campbell, Lo y MacKinlay como:

$$R_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (1)$$

Donde  $R_t$  se refiere al retorno simple,  $P_t$  se refiere al precio del activo en el momento  $t$  y  $P_{t-1}$  se refiere al precio del activo en el momento  $t-1$  (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997). También cabe aquí definir el retorno bruto como  $R_t+1$ .

Ahora, si bien es evidente que los retornos así calculados no tienen escala, es importante resaltar que sí obedecen a una unidad de tiempo. Es decir, que representan lo que ha sucedido con el precio de un activo durante un período de tiempo determinado. Así, la diferencia entre  $P_t$  y  $P_{t-1}$  puede referirse al cambio del precio en un día, una semana, un año o cinco años.

De las definiciones previas se puede deducir que el retorno de un activo durante  $k$  períodos de tiempo se puede calcular de la siguiente forma (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$1 + R_t(k) \equiv (1 + R_t)(1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1}) \quad (2)$$

Y se puede re expresar como:

$$1 + R_t(k) = \frac{P_t}{P_{t-1}} \cdot \frac{P_{t-1}}{P_{t-2}} \cdot \frac{P_{t-2}}{P_{t-3}} \dots \frac{P_{t-k+1}}{P_{t-k}} = \frac{P_t}{P_{t-k}} \quad (3)$$

De esta forma se pueden calcular retornos para  $k$  períodos. Uno de los problemas esenciales de la metodología de cálculo de interés simple aparece cuando se quieren re expresar las periodicidades de los retornos de  $j$  períodos a  $k$  períodos. Por ejemplo, cuando se quieren anualizar retornos que están expresados como bienales o quinquenales. Para lograr este cometido se debe realizar un promedio geométrico de acuerdo con la siguiente fórmula (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$\text{Anualizado}[R_t(k)] = \left[ \prod_{j=0}^{k-1} (1 + R_{t-j}) \right]^{1/k} \quad (4)$$

Frente a la dificultad que surge de manipular constantemente promedios geométricos, como en (4), para series de tiempo financieras surge la metodología de cálculo de retornos compuestos continuos o logarítmicos. Éstos se definen como (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$r_t \equiv \ln(1 + R_t) = \ln \frac{P_t}{P_{t-1}} = p_t - p_{t-1} \quad (5)$$

Donde, por definición, las letras minúsculas representan los logaritmos de las variables en letra mayúscula. Las ventajas de trabajar con retornos logarítmicos se vuelven transparentes en el momento de trabajar con retornos para varios períodos (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$r_t(k) = \ln(1 + R_t(k)) = \ln((1 + R_t) \cdot (1 + R_{t-1}) \dots (1 + R_{t-k+1})) \quad (6a)$$

$$r_t(k) = \ln(1 + R_t) + \ln(1 + R_{t-1}) + \dots + \ln(1 + R_{t-k+1}) \quad (6b)$$

$$r_t(k) = r_t + r_{t-1} + \dots + r_{t-k+1} \quad (6c)$$

El lograr convertir un proceso multiplicativo en un proceso aditivo es muy valioso para lograr derivar las características estadísticas de las series de tiempo financieras. Además, nos permitirá una mayor facilidad de cómputo. De esta definición se extrae precisamente el supuesto de normalidad que se discutió en la introducción. Así, si los precios se asumen distribuidos lognormalmente, lo que no permite valores negativos que generen oportunidades de arbitraje, la distribución de los retornos logarítmicos se puede asumir como normal.

Una de las preguntas que se busca responder en este punto es si hay una diferencia tangible en los valores de los retornos al calcularlos de una u otra forma.

A continuación se anexa una Gráfica de las diferencias en los retornos calculados con las fórmulas (1) y (5). Lo más relevante de esta Gráfica es notar la escala de las diferencias. Abajo se incluye una Tabla en la que se muestra el número de datos por rangos de las diferencias en la metodología de cálculo. Vale la pena recordar que se tienen 5171 retornos para 6 activos, es decir, 31026 diferencias calculadas.

Gráfico 2: Diferencias de los retornos simples y continuos

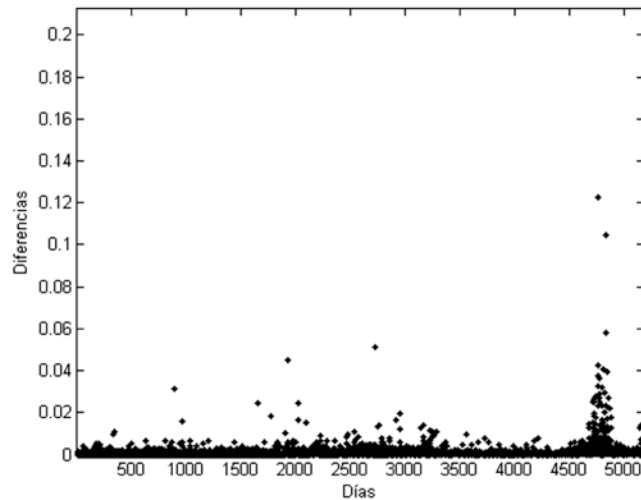


Tabla 1: Rango de las diferencias entre cálculo de retornos simple y logarítmico

	0.0% < X < 0.1%	0.1% < X < 0.5%	0.5% < X < 1.0%	1.0% < X < 5.0%	5.0% < X < 10.0%	10.0% < X < 20.0%	20.0% < X < 30.0%
Número de Datos	29,183	1,658	108	72	2	2	1
Porcentaje	94.06%	5.34%	0.35%	0.23%	0.01%	0.01%	0.00%

Aquí encontramos un primer resultado relevante. Las diferencias en la metodología de cálculo son irrelevantes, es decir, inferiores al 0.1%, en poco más del 94% de los casos. Sin embargo, cuando los movimientos de precios de un día a otro son sensibles, se presentan diferencias importantes en los datos. Éstas alcanzan a estar entre un 10% y un 30% para 1 de cada 10,000 datos. Aunque esto puede parecer irrelevante a primera vista, tiene implicaciones importantes para la evaluación de riesgos, pues es precisamente en estas situaciones en las que la riqueza de los inversionistas se ve amenazada. Un buen ejemplo de esto



es cuando se analiza el VaR con el 99.9% de confianza, es decir, cuando se busca conocer el peor resultado posible en 10,000 días.

Como se puede ver en el código, el cálculo realizado usando la ecuación (5) consistentemente subestima el valor de los retornos frente al cálculo de retornos simples (1). Sin embargo, como es tradicional en la práctica financiera se hará uso de las ventajas inherentes al cálculo de retornos logarítmicos en lo que resta del artículo.

## **2.2. Cálculo de los principales momentos estadísticos – serie completa**

Una vez se han calculado los retornos históricos de los activos bajo estudio, es importante realizar una descripción de los mismos usando las herramientas con las que nos provee la estadística. Dentro de la estadística descriptiva que aquí se va a desarrollar se calcularán los parámetros y no los estimadores ajustados de los mismos, ya que se puede aplicar la ley de grandes números (Wooldridge, 2002) que indica que cuando las muestras de datos son lo suficientemente grandes el valor de los estimadores tiende al valor de los parámetros de forma insesgada. En el caso particular de esta base de datos, contar con 5171 retornos por activo es una muestra de tamaño suficiente para omitir las correcciones que se hacen a los estimadores para muestras pequeñas. Para cada serie de datos se calcularán los cuatro primeros momentos: media, desviación estándar, sesgo y curtosis.

### **2.2.1. Media histórica de los retornos – muestra completa**

La media, bajo el supuesto de normalidad, es un estimador insesgado, consistente y eficiente que en algunos casos de la práctica financiera se utiliza como el mejor estimador posible del retorno para el futuro. En un análisis inicial se realizará el cálculo de la misma tomando la muestra completa, lo que asume que los datos del comienzo de la muestra tienen el mismo peso que los datos más recientes (Wooldridge, 2002). Para eliminar este supuesto, al menos parcialmente, en el inciso 2.3 se tomarán estadísticas descriptivas para menor cantidad de datos, mostrando además que las estadísticas descriptivas son también variables aleatorias. Si se asume que los retornos se comportan como martingalas, entonces el mejor estimador del retorno futuro es el último retorno disponible de la serie (Neftci, 2000). Sin embargo, esta aplicación excede el alcance de este artículo.

La media se define como:

$$\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n r_t \quad (7)$$

En la Tabla 2 se presenta la media de muestra completa de cada una de las series de tiempo.

Tabla 2: Media de los retornos por activos – muestra completa

Muestra completa	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Media (diaria)	0.019%	0.030%	0.066%	0.057%	0.028%	0.018%
Media (anualizada)	4.764%	7.599%	16.516%	14.243%	6.937%	4.602%

Gracias al supuesto inicial que nos permitió calcular retornos compuestos a través de la función logarítmica, es transparente encontrar la media anualizada a partir de la media de retornos diarios. Así, sólo hay que multiplicarlos por el número de días hábiles en un año, que para el estándar financiero es de 252 días. Este número varía entre 250 y 255 días. Proviene de tomar un año estándar de 365 días, restar 104 días que equivalen a los días de fin de semana en los que no se llevan a cabo negociaciones y, posteriormente, descontar un número de días feriados, que en el caso de los Estados Unidos es en promedio de 9 días.

Sin embargo, este supuesto es muy fuerte y rara vez esta anualización es equivalente a calcular el retorno de un activo, tomando el logaritmo de la relación entre el precio de cierre y de inicio de un año dado. Aun así, la información disponible nos indica que durante los últimos 20 años (1990 - 2010) la media de los retornos ha sido positiva y, en algunos casos, muy importante.

### 2.2.2. Desviación estándar histórica de los retornos – muestra completa

Tener una medida de tendencia central es útil al momento de analizar los retornos. Como se vio en el inciso anterior, nos muestra que durante los últimos 20 años los retornos fueron positivos en promedio. Sin embargo, la Gráfica de precios que se observa en la parte 1 muestra que ha habido períodos de alza constante de los precios (durante las expansiones económicas) y períodos de caída de los precios (durante las recesiones). El promedio de retornos sólo entrega una parte, bastante sesgada, de la información que se requiere para una correcta comprensión del comportamiento de los activos.

Así, cobra particular importancia en el análisis de datos medir qué tan cerca o lejos están los retornos de esta media. Esto es lo que se conoce como una medida de dispersión. La más conocida medida de dispersión es la varianza, cuya expresión matemática para los retornos calculados anteriormente es (Wooldridge, 2002):

$$\text{Var}(r) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2 \quad (8)$$

La varianza mide las distancias desde cada una de las observaciones hasta el promedio y las eleva al cuadrado para eliminar el signo, pues de lo contrario, por las propiedades del promedio se cancelarían entre sí (Wooldridge, 2002). Posteriormente, lo divide por el número de observaciones como estandarización de la medida.

Sin embargo, esta medida tiene un problema de dimensión ya que está expresada, en este caso particular, como retornos al cuadrado. Esto, financieramente no tiene una interpretación clara. Por tanto, debemos recurrir a una segunda medida de dispersión, la desviación estándar, que sí se puede interpretar y permitirá obtener importantes resultados en secciones posteriores. Esta es simplemente la raíz cuadrada de la varianza de los retornos.

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_t - \bar{r})^2} \quad (9)$$

En la Tabla 3 se presenta la desviación estándar de muestra completa de las series de tiempo.

Tabla 3: Desviación estándar de los retornos por activos – muestra completa

Muestra completa	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Desviación (diario)	3.113%	1.719%	3.238%	2.200%	2.026%	2.643%
Desviación (anual)	49.414%	27.292%	51.405%	34.930%	32.170%	41.962%

Para pasar de desviaciones diarias a desviaciones anuales se usa el mismo principio que para la agregación de retornos en el tiempo. Sin embargo, dado que la desviación es la raíz cuadrada de la varianza, para agregar las desviaciones, éstas deben multiplicarse por la raíz cuadrada del número de días en un año.

Estas dos medidas estadísticas, por sí solas sirven varios propósitos siempre y cuando se asuma que los retornos se comportan como variables normalmente distribuidas de acuerdo con los siguientes parámetros:

$$r_t \sim N(\bar{r}, \sigma) \quad (10)$$

Bajo este supuesto se pueden construir intervalos de confianza alrededor de los retornos para saber, con diversos niveles de confianza, cuál es el rango dentro del cual podrán fluctuar los precios durante determinado período de tiempo. Esta metodología consiste en sumar o restar al promedio un número de desviaciones estándar de acuerdo con el nivel de confianza deseado (Wooldridge, 2002).

Dado que la desviación es también interpretable como un retorno, y mide la variabilidad de la serie de tiempo, se pueden obtener a través de la técnica descrita arriba los intervalos de confianza para los retornos de las seis acciones a un día. Estos datos se entregan en la Tabla 4.

Tabla 4: Intervalos diarios de los retornos de los activos para distintos niveles de confianza

□	Nivel de confianza	Citibank		British Petroleum		Apple		Home Depot		Disney		Ford Motors	
		Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
1	68.36%	-3.09%	3.13%	-1.69%	1.75%	-3.17%	3.30%	-2.14%	2.26%	-2.00%	2.05%	-2.63%	2.66%
2	95.44%	-6.21%	6.24%	-3.41%	3.47%	-6.41%	6.54%	-4.34%	4.46%	-4.03%	4.08%	-5.27%	5.30%
3	99.74%	-9.32%	9.36%	-5.13%	5.19%	-9.65%	9.78%	-6.54%	6.66%	-6.05%	6.11%	-7.91%	7.95%

Uno de los resultados esperados de este ejercicio es que la acción con la mayor variabilidad (deviación) es aquella que, por construcción, tiene el intervalo de confianza más amplio. Éste es uno de los motivos por los cuales en las finanzas modernas se utiliza la desviación estándar como una medida, si bien primitiva, del riesgo de un activo. La dimensión de la desviación estándar se relaciona directamente con la dimensión del riesgo en el que se incurre al comprar un activo.

### 2.2.3. Sesgo histórico de los retornos – muestra completa

En el momento de suponer normalidad para la distribución de los retornos históricos, el analista se encuentra con un problema mayúsculo. Si bien la distribución normal está completamente descrita por la media y la desviación estándar de los activos tal y como se muestra en (10), esto asume que hay simetría alrededor de la media. Otra forma de decir esto es que la media, la moda y la mediana,

que son las tres medidas de tendencia central, adoptan el mismo valor y que, por tanto, la masa de probabilidad a la derecha y a la izquierda de la media equivalen al 50%.

Para verificar que se cumpla este supuesto se utiliza el tercer momento estadístico que mide el sesgo de la distribución. Es decir, que indica si ésta tiene mayor concentración de probabilidad a la derecha de la media (sesgo positivo) o a la izquierda de la media (sesgo negativo). El sesgo, o coeficiente de asimetría, se calcula de la siguiente forma (Wooldridge, 2002):

$$\text{sesgo}(r) = \frac{\sum_{t=1}^n (r - \bar{r})^3}{n \cdot \sigma^3} \quad (11)$$

En la Tabla 5 se presenta el sesgo de muestra completa de cada una de las series de tiempo.

Tabla 5: Sesgo de los retornos por activo – muestra completa

	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Sesgo	-0.43	-0.43	-2.13	-0.64	0.04	0.04

En los resultados de la Tabla se puede observar que, a diferencia de lo que se esperaría de una distribución simétrica, los activos de la muestra tienen sesgo diferente de 0. En el caso de las acciones del Citibank, British Petroleum, Apple y Home Depot, hay mayor volumen de observaciones por debajo de la media de la Tabla 2, mientras que en las acciones de Disney y Ford Motors, hay mayor concentración de resultados a la derecha de la media.

Así, uno de los criterios para comparar entre activos es que, con todo lo demás constante, un inversionista debería elegir aquel que tenga sesgo positivo (mayor probabilidad de tener retornos superiores a la media), frente a aquel que tenga sesgo negativo (mayor probabilidad de tener retornos inferiores a la media).

#### 2.2.4. Curtosis histórica de los retornos – muestra completa

Otro de los grandes supuestos de la distribución normal de los retornos en su caracterización descrita en (10) es que hay una decadencia muy rápida de la probabilidad en las colas. Es decir, que omite la posibilidad de eventos raros más allá de las tres desviaciones estándar tanto a la derecha como a la izquierda de la media. Esto se puede evidenciar en la Tabla 4 donde, con tres desviaciones

estándar a ambos lados de la media, ya se observa, supuestamente, el 99.74% de los datos posibles.

A manera de ejemplo podemos anotar que, siguiendo la lógica de la distribución normal, solo en el 0.13% de los casos el rendimiento de la acción del Citibank podrá ser inferior al -9.32% en un día. Veremos más adelante cómo este supuesto se desvirtúa al realizar un gráfico de cuantil - cuantil. Uno de los más grandes críticos de la campana de Gauss, precisamente a causa de esta falencia, es Nassim Nicholas Taleb, quien en su libro *El cisne negro* la denomina “el gran fraude intelectual” (Taleb, 2007, 229-252).

Para evidenciar este hecho recurriremos al cuarto momento estadístico, la curtosis, que busca medir la presencia de colas pesadas. El valor de esta estadística aumenta a medida que hay más datos que se alejan de la media. Ésta se calcula de acuerdo con la siguiente fórmula (Wooldridge, 2002):

$$\text{curtosis}(r) = \frac{\sum_{t=1}^n (r - \bar{r})^4}{n \cdot \sigma^4} \quad (12)$$

Vale la pena anotar, en este punto que la curtosis de una distribución normal equivale a tres. En la Tabla 6 se presenta la curtosis de muestra completa de cada una de las series de tiempo.

Tabla 6: Curtosis de los retornos por activo – muestra completa

	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
<b>Curtosis</b>	40.62	13.15	57.73	16.65	10.04	16.76

Al ver los resultados presentados en la tabla anterior se puede apreciar que los valores de la curtosis se alejan, en algunos casos sensiblemente, del valor esperado para la distribución normal. Cuando los valores son mayores a tres la distribución implícita de los datos se llama leptocúrtica, lo que indica que presenta mayor número de datos que los esperados en las colas. Si el valor de la curtosis es inferior a tres se denomina platocúrtica. Así se comprueba, al menos para estos seis casos particulares, otra de las características mejor conocidas de los rendimientos de la mayoría de las acciones: hay una propensión importante por presentar “eventos raros” (*outliers*) (Taleb, 2007).

### 2.2.5. Matriz de correlaciones histórica de los retornos – muestra completa

Hasta este momento el análisis realizado ha versado sobre activos individuales. Sin embargo, la estadística nos provee una medida muy importante para el análisis conjunto de series de tiempo. La covarianza es una medida de asociación que indica qué tanto se mueve una variable en términos de otra. El cálculo de esta medida se realiza de la siguiente forma (Wooldridge, 2002):

$$\text{Cov}(r_{it}, r_{jt}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j) \quad (13)$$

De (13) se pueden deducir varias características de esta medida. En primer lugar es una medida contemporánea, lo que quiere decir que compara los retornos de los dos activos en un mismo momento. En segundo lugar, es una medida que, similar a la varianza, mide la distancia de cada retorno observado, frente al promedio de dichos retornos. La diferencia principal con la varianza radica en que esta medida puede tener signo negativo, lo que indica que las dos variables aleatorias se mueven en direcciones opuestas. Esta característica es básica en la teoría financiera para poder construir portafolios de cobertura (*hedging portfolios*). Sin embargo, presenta el mismo inconveniente de la covarianza en el sentido que, dada la dimensión de la medida, ésta es difícil de interpretar, pues está expresada como retornos al cuadrado.

Esta dificultad de interpretación hace relevante que se busque otra medida, con una dimensión más fácil de interpretar. De esta necesidad surge la aplicación a las finanzas del coeficiente de correlación, que se define como (Wooldridge, 2002):

$$\rho_{it,jt} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j)}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{it} - \bar{r}_i)^2} \cdot \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (r_{jt} - \bar{r}_j)^2}} = \frac{\text{Cov}(r_{it}, r_{jt})}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \quad (14)$$

El coeficiente de correlación se puede entender como una covarianza estandarizada. Es una medida adimensional de asociación de variables aleatorias. Sin embargo, tiene una característica sumamente deseable y es que se mueve en el rango  $[-1, 1]$ . La comprobación se hace a continuación:

Defínase la norma de una variable aleatoria  $r_i$ :

$$\|r_i\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n (r_i^2)} \quad (15a)$$

Defínase el valor esperado de  $r_i$ :

$$E[r_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i \quad (15b)$$

Entonces:

$$\rho_{it,jt} = \frac{E[(r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j)]}{\sqrt{E[(r_{it} - \bar{r}_i)^2]} \cdot \sqrt{E[(r_{jt} - \bar{r}_j)^2]}} \quad (15c)$$

$$\rho_{it,jt} \cdot \left[ \sqrt{E[(r_{it} - \bar{r}_i)^2]} \cdot \sqrt{E[(r_{jt} - \bar{r}_j)^2]} \right] = E[(r_{it} - \bar{r}_i) \cdot (r_{jt} - \bar{r}_j)] \quad (15d)$$

Asumiendo que los retornos promedio de los dos activos son 0:

$$\rho_{it,jt} \cdot \|r_i\|_2 \cdot \|r_j\|_2 = E[(r_{it}) \cdot (r_{jt})] \quad (15e)$$

Por un resultado bien conocido de la probabilidad conocido como la desigualdad de Schwartz:

$$\|r_i\|_2 \cdot \|r_j\|_2 \geq |E[(r_{it}) \cdot (r_{jt})]| \quad (15f)$$

Nótese que para que (15e) y (15f) se cumplan de forma simultánea,  $|\rho_{it,jt}| \leq 1$ .

Éste es un resultado muy poderoso para las finanzas, pues aunque el coeficiente de correlación no tiene unidad de medida su rango de variación está acotado. Así, cuando esta medida equivale a 1 se dice que las dos variables están perfecta y directamente correlacionadas, mientras que si equivale a -1 se dice que éstas están perfecta e inversamente correlacionadas. Además, el rango [-1,1] permite interpretarlo como un porcentaje de variabilidad conjunta de las variables.

En la Tabla 7 se presenta la matriz de correlaciones de muestra completa para las series de tiempo.



Tabla 7: Matriz de coeficientes de correlación entre los activos – muestra completa

	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Citibank	1.0000	0.2928	0.2291	0.3970	0.3744	0.3728
British Petroleum	0.2928	1.0000	0.1682	0.2444	0.2844	0.2399
Apple	0.2291	0.1682	1.0000	0.2628	0.2562	0.2007
Home Depot	0.3970	0.2444	0.2628	1.0000	0.4064	0.3356
Disney	0.3744	0.2844	0.2562	0.4064	1.0000	0.3219
Ford Motors	0.3728	0.2399	0.2007	0.3356	0.3219	1.0000

En la Tabla se ven varios resultados. El primero y más evidente es que la diagonal equivale a 1, hecho que se desprende de la misma definición de coeficiente de correlación. Esto se debe a que la covarianza del retorno de un activo consigo mismo es igual a la varianza del retorno. Además, la varianza del retorno equivale a su desviación estándar elevada al cuadrado. En segundo lugar, vale la pena resaltar que para esta muestra particular los coeficientes de correlación son todos positivos y en todos los casos, exceptuando la correlación entre Disney y Home Depot, inferiores a 0.35. Eso quiere decir que las acciones se mueven, en general, en la misma dirección aunque en el largo plazo (los 20 años de la muestra) la variabilidad conjunta de cada par de activos es baja.

Como ya se mencionó arriba, los resultados de esta sección no son particularmente informativos, pues se trata de resultados que agregan más de 20 años de información y dan el mismo peso a todos los datos de la muestra. Por eso se vuelve relevante, en la próxima sub - sección, realizar una discusión de los principales momentos estadísticos calculados haciendo uso de ventanas móviles.

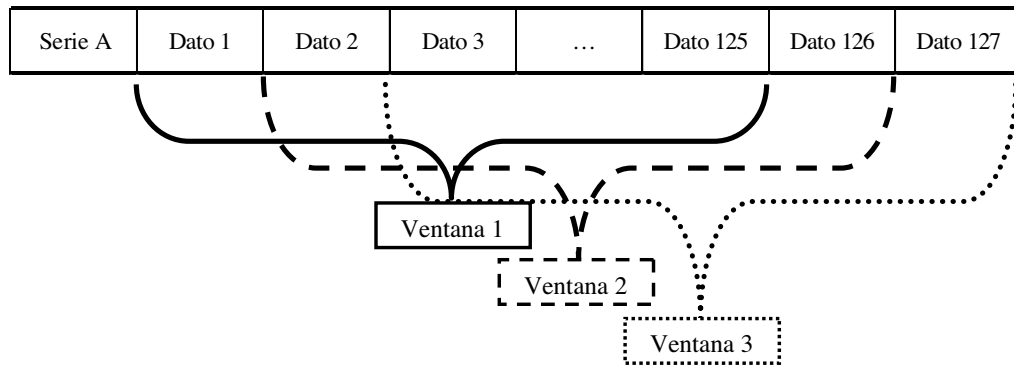
### 2.3. Cálculo de los principales momentos estadísticos – ventanas móviles

Una de las principales críticas de diversos autores que desarrollan el tema de econometría financiera consiste en decir que los momentos estadísticos antes descritos dan el mismo peso a todas las observaciones. Es poco razonable utilizar una serie de tiempo tan larga para tomar decisiones de inversión a corto plazo, mucho más si se le da el mismo peso a cada uno de los datos.

Así, antes de pensar en modelos sofisticados para cálculo de momentos estadísticos, por ejemplo, la desviación estándar, que utilicen pesos variables para los datos analizados, es prudente pensar primero en una herramienta más básica. Esta consiste en tomar una ventana de datos más corta, de tamaño constante,

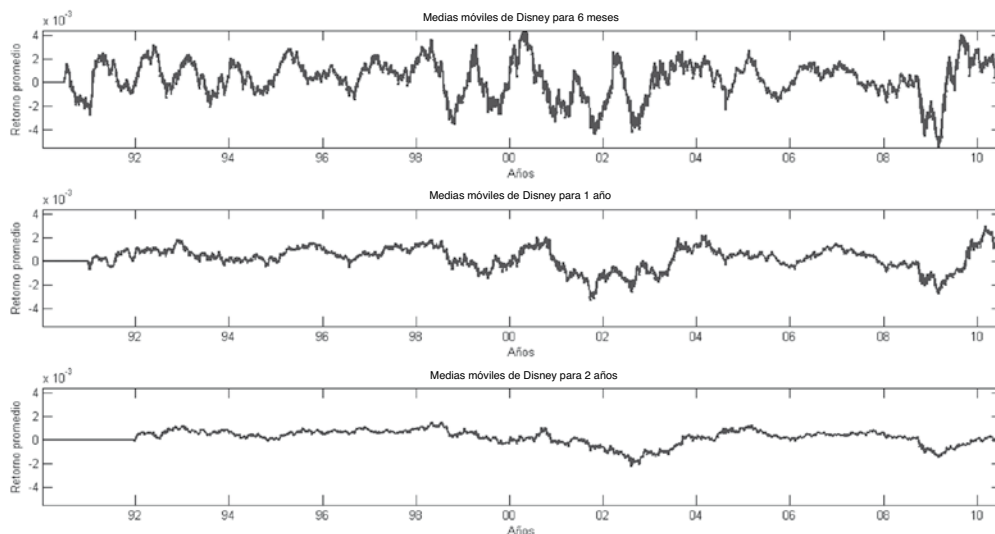
para calcular los momentos estadísticos importantes y moverlas a lo largo de la muestra como se ejemplifica en el siguiente gráfico:

Gráfico 3: Metodología de ventanas móviles



Esta metodología se utilizó para calcular medias, desviaciones estándar y las 15 correlaciones por pares de activos con ventanas de 125, 250 y 500 datos. Dado que la base de datos sólo contiene precios de negociaciones realizadas en días hábiles, esto equivale a ventanas de 6 meses, 1 año y 2 años de datos aproximadamente. En el Gráfico 4 se puede ver un ejemplo de la media de los retornos para la acción de Disney con las ventanas antes mencionadas.

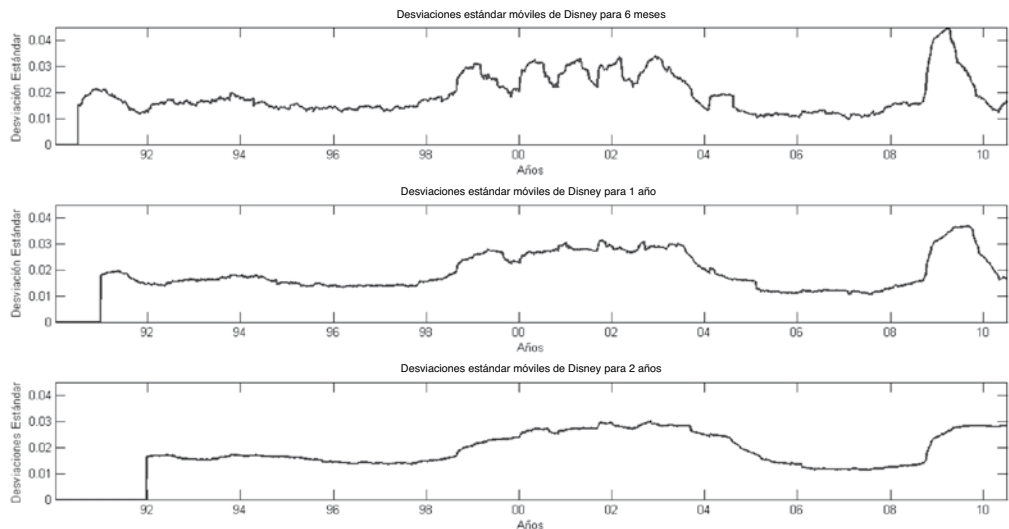
Gráfico 4: Diferencias en medias móviles para distintas ventanas de datos



Este Gráfico es particularmente ilustrativo sobre el efecto de privilegiar una ventana de datos sobre otra. Al tener en cuenta que en las tres gráficas el eje vertical maneja la misma escala, se puede notar que mientras menos datos haya en la ventana, más volátil es el comportamiento del momento estadístico. Así, se puede apreciar que a medida que se agregan datos en el tiempo, mucha de la información relevante se pierde.

Lo mismo sucede cuando se analiza el comportamiento de la desviación estándar para distintas ventanas de datos.

Gráfico 5: Diferencias en desviaciones estándar móviles para distintas ventanas de datos

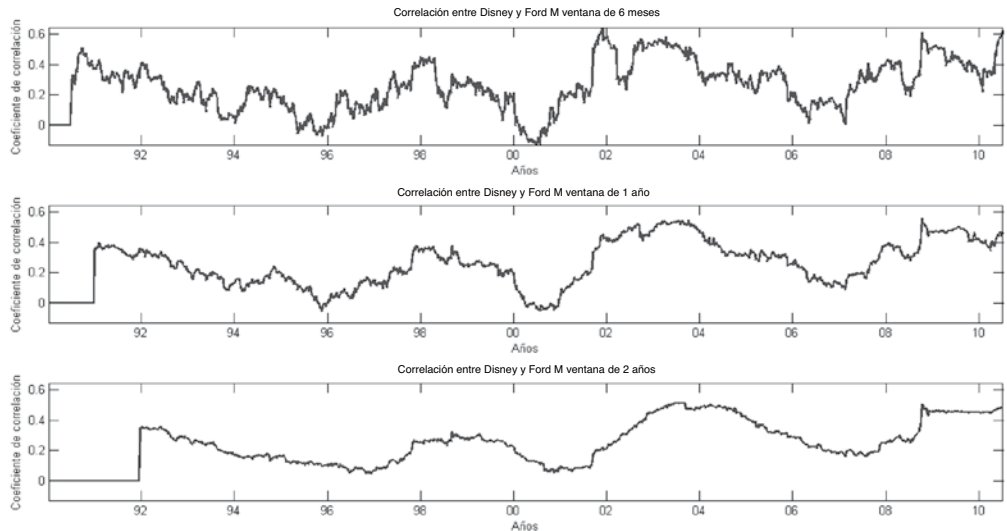


Cuando se observa el Gráfico 5 se ve que, a medida que se aumenta la cantidad de datos en la ventana, los valores de la volatilidad se reducen y, por tanto, se subestima el riesgo del activo. De ahí que sea importante usar otros modelos de series de tiempo, como los autorregresivos (ARMA, ARCH y GARCH bajo distintas especificaciones), para calcular la volatilidad esperada de las series de tiempo. Estos modelos dan más peso a la información reciente, lo que permite que predigan de mejor manera la volatilidad futura, al menos en el corto plazo.

Para terminar esta sección es importante tocar el tema de los coeficientes de correlación entre activos. Para ejemplificar se incluye solamente una Gráfica, del coeficiente de correlación entre los rendimientos de las acciones de Disney

y Ford Motors, aunque los resultados que de esta se extraen aplican para las 15 correlaciones entre cualquier par de activos dentro de la base de datos.

Gráfico 6: Diferencias en coeficientes de correlación móviles para distintas ventanas de datos



Del Gráfico 6 se pueden extraer varias conclusiones. En primer lugar, y guardando consistencia con los resultados anteriores, agregar información a la ventana de datos, aumentando su tamaño se traduce en una suavización de la serie de correlaciones lo que se evidencia en la menor presencia de picos y caídas para la serie con ventana de mayor tamaño. En segundo lugar, otro resultado importante para la gestión de riesgo indica que durante los períodos de crisis las correlaciones tienden a tomar un valor de 1. Esto se puede ver en las Gráficas si se observan los datos entre el año 2000 y 2004 o desde 2007 hasta el final de la serie.

En esta sección se han revisado algunos de los principales resultados de un primer análisis de estadísticas descriptivas de las series de tiempo. Sin embargo, desde (10) se ha venido asumiendo la normalidad de los retornos financieros. En la próxima sección se evaluará, a través de una prueba estadística y varios análisis gráficos, si dicha hipótesis se acepta o si se puede rechazar.

## 2.4. Prueba de normalidad estadística y gráfica para las series de datos

El supuesto de normalidad es uno de los más gruesos y debatidos a lo largo de los últimos 60 años de la literatura financiera. Ya se ha mostrado en secciones anteriores que las series de tiempo bajo estudio tienen sesgo diferente de cero y curtosis superior a tres. Sin embargo, estadísticamente las diferencias de estos datos con respecto a los valores de referencia para la distribución normal pueden no ser significativos.

En ese sentido cobra relevancia el buscar una prueba para aceptar o rechazar, estadísticamente, la normalidad de las series de tiempo. Por eso en esta subsección se implementará la prueba Jarque - Bera de normalidad. Ésta consiste en probar la hipótesis nula de que una serie de datos proviene de una distribución normal con media y varianza desconocidas. Es una prueba de ajuste de ambos lados de la distribución. Así, la estadística de la prueba se calcula de la siguiente forma (Jarque y Bera, 1987):

$$JB = \frac{n}{6} \left( S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right) \quad (16)$$

Donde  $S$  es el coeficiente de asimetría o sesgo calculado en (11) y  $K$  es la curtosis calculada en (12). Para muestras grandes, como en este caso, la estadística sigue una distribución Chi cuadrada con dos grados de libertad (Jarque y Bera, 1987).

Los resultados de la prueba se presentan en la Tabla 8.

Tabla 8: Resultado de la prueba de normalidad Jarque–Bera (1987) para cada serie de tiempo

Muestra completa	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Estadística	305,060.28	22,335.62	649,318.50	40,516.82	10,666.78	40,824.07
Valor crítico	5.98	5.98	5.98	5.98	5.98	5.98
Nivel de confianza	95%	95%	95%	95%	95%	95%
Valor P	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Acepta	No	No	No	No	No	No

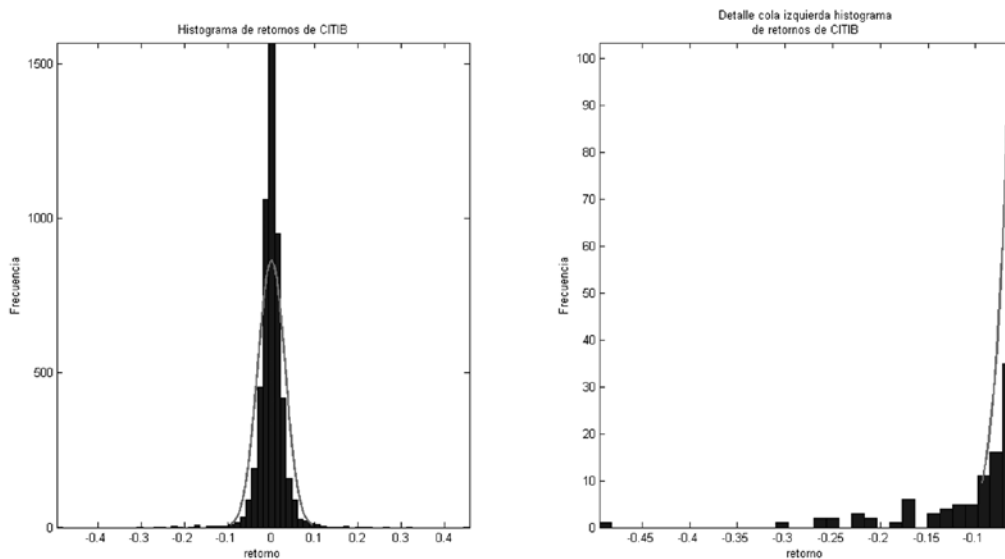
Los resultados de la prueba estadística son irrefutables. La probabilidad de aceptar la hipótesis nula, que indica que los retornos de los activos bajo estudio se comportan normales es inferior al 0.001%. Es decir, que en los seis casos no podemos aceptar la hipótesis de normalidad. Sin embargo, se asumirá que los activos se comportan normalmente, ya que este supuesto ha gobernado los desa-

rollos que se verán en lo que resta del artículo. De ahí que se advierta al lector que tenga cuidado con el efecto que puedan tener estos supuestos, tanto en la selección de portafolios como en la evaluación de riesgo. Asumir normalidad implica eliminar de las series de datos los eventos raros, cuyo efecto sobre el riesgo de un portafolio puede ser mayúsculo.

Aunque el análisis estadístico muestra resultados contundentes, es útil ver una presentación gráfica de los mismos. Para lograr este objetivo se cuenta con dos herramientas: el histograma con una distribución normal superpuesta y el gráfico cuantil - cuantil. El primero consiste en crear un gráfico de barras, cada una representando un rango, donde la superficie de las barras es equivalente al número de datos que representa y todas tienen rangos de tamaños iguales. Normalmente, para contar suficientes barras para permitir una correcta inspección visual se usan tantas barras como la raíz cuadrada del número de datos por graficar. Una vez se ha graficado el histograma se le superpone una distribución normal con parámetros de media y varianza equivalentes a aquéllos de la muestra completa.

En la siguiente Gráfica se presenta el histograma descrito de la acción del Citibank y el detalle a la cola izquierda donde se puede evidenciar la curtosis en la serie de retornos.

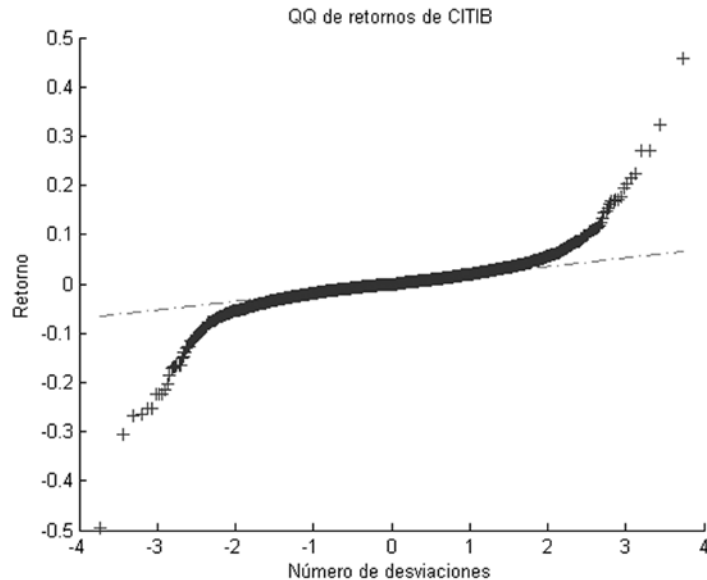
Gráfico 7: Histograma de la acción del Citibank con detalle de la cola izquierda



En la Gráfica 7 se evidencia la presencia de curtosis en las series de tiempo. El eje X en el panel de la derecha va desde el valor mínimo de la serie hasta la segunda desviación a la izquierda de la media, y se puede ver que hay bastantes datos a la izquierda de la normal superpuesta. Estos datos son aquellos que la función de distribución es incapaz de explicar y que revisten la mayor importancia en la evaluación de riesgo. Así, hay evidencia gráfica de la ausencia de normalidad en los retornos de los activos financieros.

El Gráfico de cuantil - cuantil (Q-Q), por otra parte, permite diagnosticar diferencias entre la distribución implícita de una serie de datos frente a una distribución teórica. En este caso, se tomarán los datos de la acción del Citibank y se comparará cada uno de sus percentiles con aquel que tendría una serie de datos distribuida normalmente con la media y varianza de la serie analizada. En el eje X se representa el número de desviaciones estándar alrededor de la media y en el eje Y el valor del retorno. La línea recta equivale a la distribución normal, y las marcas en cruz a cada uno de los datos en un Gráfico de Pareto. Mientras más distantes estén las marcas de la línea recta, menos normalmente se comporta la serie de retornos. Es importante anotar que las mayores diferencias se presentan en los valores extremos del retorno.

Gráfico 8: QQ de la acción del Citibank frente a la distribución normal



En el Gráfico anterior se puede evidenciar, una vez más, que los retornos de los activos financieros no se ajustan, como se asume tradicionalmente, al supuesto de normalidad. Estos resultados son extensibles a la mayoría de activos financieros. De ahí que cada día sea una empresa más complicada la correcta evaluación y gestión de riesgo asociada a la inversión de portafolio.

### 3. Pruebas de hipótesis de mercado eficiente

Tras haber atacado hasta la saciedad el supuesto de normalidad que inunda la literatura financiera de la segunda mitad del siglo XX, surge un tema de particular interés para el desarrollo del presente artículo. Este consiste en buscar evidencia que demuestre, al menos para la base de datos que se estudia, la veracidad de la hipótesis del mercado eficiente (HME). De acuerdo con Samuelson, en un mercado “informacionalmente eficiente ( ) los cambios en los precios deben ser impredecibles si se han anticipado de forma adecuada, v.gr., si incorporan completamente las expectativas e información de todos los participantes del mercado” (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997, 20). En palabras del autor, “esto quiere decir que no hay forma de obtener utilidades esperadas al extrapolar cambios pasados en el precio [del activo], por [métodos] gráficos o cualquier otra herramienta esotérica ya sea mágica o matemática” (Samuelson, 1965, 44).

Además de incorporar correctamente toda la información disponible, es importante anotar que la HME asume que el mercado es eficiente con respecto a un conjunto de información si, al revelarlo a todos los participantes del mercado, los precios no se ven afectados (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997). Una extensión natural de este supuesto consiste en decir que los cambios en los precios, aquí medidos como retornos logarítmicos, son aleatorios. Esto quiere decir que, siguiendo a Black, ante innovaciones en la información disponible, los precios se ajustan de forma tan rápida que es imposible obtener retornos anormales, beneficio directo de la información adicional. Así es preferible encontrar aleatoriedad y no determinismo en los movimientos de precios (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997, 23).

La relevancia de probar el correcto funcionamiento de la HME es mejor explicado en palabras de Merton: “Aunque [el hecho que los retornos] satisfagan la hipótesis de los mercados racionales claramente no es suficiente para asegurar la asignación eficiente [de recursos en portafolios de inversión], el rechazarla con pruebas amplias y suficiente es casi seguro un argumento suficiente para descartar asignaciones eficientes” (Merton, 1985, 2). Esto quiere decir que toda



la teoría de construcción de portafolios eficientes se fundamenta en el correcto funcionamiento de esta hipótesis, y como tal es muy relevante realizar un compendio de las pruebas que normalmente se realizan para su verificación.

### 3.1. Procesos de revelación de información y el dilema de la predictibilidad

Para poder continuar con la evaluación de series de tiempo es indispensable reconocer el papel que juega la revelación de información adicional en el proceso de formación de expectativas de los agentes.

Sea  $\Omega$  un conjunto con todos los valores posibles de una variable aleatoria.

Sea  $\mathcal{F}$  una  $\sigma$ -álgebra de subconjuntos de  $\Omega$  si cumple con las siguientes propiedades:

1.  $0 \in \mathcal{F}$
2. Si  $A \in \mathcal{F}$  entonces  $A^c \in \mathcal{F}$
3. Si  $A_1, A_2, A_3, \dots$  es una sucesión de conjuntos en  $\mathcal{F}$ , entonces la unión de éstos también se encuentran dentro de  $\mathcal{F}$ :  $U_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{F}$

Una filtración es una sucesión de  $\sigma$ -álgebras  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3, \dots, \mathcal{F}_n$  tal que cada  $\sigma$ -álgebra en la secuencia contenga todos los conjuntos presentes en la  $\sigma$ -álgebra anterior.

Si se sigue el ejemplo de Shreve sobre el lanzamiento de una moneda en tres ocasiones consecutivas (Shreve, 2005, 25-27), y si el resultado del lanzamiento da en cara se registrará una  $C$  y si resulta sello se registrará como  $S$ . Así los ocho resultados posibles son:

$$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, CSS, SCC, SCS, SSC, SSS\}$$

Si se describen las  $\sigma$ -álgebras desde antes de haber realizado el primer lanzamiento ( $t=0$ ) hasta después del tercer lanzamiento ( $t=3$ ) se obtiene la siguiente filtración:

$$\mathcal{F}_0 = \{ \Omega, 0 \}$$

$$\mathcal{F}_1 = \{ \Omega, 0, \{CCC, CCS, CSC, CSS\}, \{SCC, SCS, SSC, SSS\} \}$$

$$\mathcal{F}_2 = \{ \Omega, 0, \{CCC, CCS\}, \{CSC, CSS\}, \{SCC, SCS\}, \{SSC, SSS\} \}$$

$$\mathcal{F}_3 = \{ \Omega, 0, \{CCC\}, \{CCS\}, \{CSC\}, \{CSS\}, \{SCC\}, \{SCS\}, \{SSC\}, \{SSS\} \}$$

Como se puede ver, a medida que pasa el tiempo y se realizan lanzamientos, se va revelando más información acerca de los resultados posibles. Por ejemplo, si el primer lanzamiento sale cara, ya el agente sabe que en  $\mathcal{F}_1$  está dentro del conjunto  $\{CCC, CCS, CSC, CSS\}$ , si en el segundo lanzamiento sale sello, el agente sabe que en  $\mathcal{F}_2$  está dentro del conjunto  $\{CSC, CSS\}$ . Por tanto, la revela-

ción de información aumenta el conocimiento y reduce la falta de certeza. Así, en  $\mathcal{F}_0$ , asumiendo que la moneda es justa, la probabilidad del resultado  $\{CSC\}$  es  $1/8$  mientras que en  $\mathcal{F}_1$  la probabilidad aumenta a  $1/4$ , en  $\mathcal{F}_2$  es  $1/2$  y en  $\mathcal{F}_3$  es 1 o 0, es decir, que se conoce el resultado.

De la anterior definición se deduce la ley de esperanzas iteradas o ley de la esperanza total. Esta dice que si  $I_t$  y  $J_t$  son  $\sigma$ -álgebras y constituyen una filtración tal que  $I_t \in J_t$  (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$E[X|I_t] = E[E[X|J_t]|I_t] \quad (17a)$$

La comprobación de esta ley, en tiempo continuo es:

$$E[E[X|J_t]|I_t] = \int_{I_t} \int_{J_t} X \partial P_{J_t} \partial P_{I_t} \quad (17b)$$

Haciendo uso del teorema de Fubini:

$$E[E[X|J_t]|I_t] = \int_{I_t \cap J_t} X \partial P_{J_t} \quad (17c)$$

Dado que  $I_t \in J_t$  se debe integrar sobre la variable que menos información contiene:

$$E[E[X|J_t]|I_t] = E[X|I_t] \quad (17d)$$

Para lograr mayor facilidad en la interpretación se puede reescribir este resultado de la siguiente forma:

$$E[X - E[X|J_t]|I_t] = 0 \quad (17e)$$

Así, ante información limitada  $I_t$ , la mejor estimación que se puede hacer sobre el valor esperado de una variable si se tuviera información adicional  $J_t$  es el valor esperado condicional en la información  $I_t$  que se tiene. Como ejemplo, si en  $t_0$  un agente quiere predecir el precio de un activo en  $t_2$  condicional a la información disponible en  $t_1$ , su mejor estimación será el valor esperado condicional en la información disponible en  $t_0$  ya que la información que estará disponible en  $t_1$  aún no se ha revelado.

La interpretación más relevante que se puede hacer acerca de (17e) es, entonces, que los cambios en los precios de los activos son impredecibles condicionales en la información disponible en cualquier momento. De ahí que se diga que éstos se comportan como caminatas aleatorias.

### 3.2. Descripción y pruebas de los tres tipos de caminata aleatoria

Para probar la HME, al menos para la base de datos en estudio, hay que revisar si los retornos de los activos se comportan como caminatas aleatorias. Sin embargo, la definición de caminata aleatoria es muy amplia y deben definirse con claridad qué supuestos la caracterizan. Así, a lo largo de esta sección, se seguirá la taxonomía que sobre el tema realizaron Campbell, Lo y MacKinley.

El análisis de series de tiempo, en particular las pruebas que a este apartado atañen, busca encontrar los varios tipos de dependencia que pueden existir entre  $r_t$  y  $r_{t+k}$  en dos fechas  $t$  y  $t+k$ . Para revisar esto se eligen dos funciones arbitrarias  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  tal que (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$\text{Cov}[f(r_t), g(r_{t+k})] = 0 \quad (18)$$

Para todo  $t$  y  $k$  diferente de 0. Esto se conoce como la condición de ortogonalidad de los retornos.

#### 3.2.1. Descripción de los tipos de caminata aleatoria

Así, se definen tres tipos de caminata aleatoria que se pueden probar (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997, 28-33):

*Caminata aleatoria 1:* si  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones sin restricción alguna, los retornos son mutuamente independientes. En este caso los cambios en el precio se tratan como independientes e idénticamente distribuidos (iid). Es decir, que la dinámica de precios está dada por:

$$p_t = \mu + p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2) \quad (19)$$

Así,  $\mu$  mide la tendencia de los precios. El supuesto de distribución de  $\varepsilon_t$  indica que el juego es justo y que no hay ningún tipo de correlación entre los errores o funciones sobre los errores. Si en este caso se asume que la distribución de los errores es normal, el proceso describe el conocido *movimiento browniano aritmético*. Vale la pena anotar que se utilizan los logaritmos de los precios para evitar que se obtengan resultados negativos, ya que esto violaría la ley de no arbitraje tan conocida en las finanzas.

*Caminata aleatoria 2:* si  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones sin restricción alguna los retornos son mutuamente independientes. En este caso los cambios en el precio se tratan como independientes aunque no sean idénticamente distribuidos (iid). De hecho, el supuesto de errores idénticamente distribuidos a lo largo del tiempo

es improbable dados los cambios tecnológicos y los movimientos en el ciclo económico. Así, aunque la caminata aleatoria 1 es un caso particular de ésta, se incluyen muchos más casos. Dentro de los casos más importantes en que se habla de violaciones a la caminata aleatoria 2 están aquellos que hablan de heterocedasticidad condicional en los retornos.

*Caminata aleatoria 3:* si  $f(\cdot)$  y  $g(\cdot)$  son funciones lineales los retornos no tienen correlación serial. Así, la caminata aleatoria 1 y 2 son casos particulares de ésta, que es la forma más débil de todos los tipos de caminata aleatoria. Así, un buen ejemplo de este tipo de proceso es uno que cumpla con que  $\text{Cov}[\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k}] = 0$  para todo  $k$  diferente de cero, pero que pueda presentar  $\text{Cov}[\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-k}^2] \neq 0$ . Así, los incrementos no están correlacionados, pero tampoco son independientes (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997).

### 3.2.2. Prueba de caminata aleatoria 1

En esta parte del artículo se tratarán dos de las pruebas estadísticas para este tipo de caminata aleatoria. La primera consiste en encontrar secuencias y cambios en la dirección de los retornos. La segunda busca movimientos sucesivos del retorno en la misma dirección (corridas o *runs*) y los prueba contra una función de distribución teórica.

#### 3.2.2.1. Secuencias y cambios de dirección de los retornos

En la prueba de secuencias y cambios en la dirección se prueba, en primer lugar, la caminata aleatoria sin tendencia, es decir  $\mu=0$ .

$$p_t = p_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim \text{IID}(0, \sigma^2) \quad (20)$$

Para la serie de datos en estudio se asumirá una función indicadora de la siguiente forma:

$$I_t = \begin{cases} 1 & \text{si } r_t = p_t - p_{t-1} > 0 \\ 0 & \text{si } r_t = p_t - p_{t-1} \leq 0 \end{cases} \quad (21)$$

Así, se genera una secuencia de unos y ceros conocida como secuencia de golpes (*hit sequence*) que se convierte en el objeto de estudio de la serie. Esta secuencia lo único que indica es sí el retorno es positivo o negativo. Lo siguiente que se quiere verificar es cuántas secuencias (retornos positivos o negativos consecutivos) se presentan para compararlos con el número de cambios de dirección.

Así, el número de secuencias se encuentra usando (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997):

$$N_s = \sum_{t=1}^n Y_t, \quad Y_t = I_t I_{t+1} + (1 - I_t)(1 - I_{t+1}) \quad (22)$$

La variable  $Y_t$  es una función indicadora de secuencias. Si hay una sucesión de retornos positivos o negativos  $Y_t$  será igual a 1 y, si hay un cambio de dirección (un retorno positivo seguido por uno negativo o viceversa), será igual a 0. Así,  $N_s$  es el número de secuencias que se presentan en la serie. Por tanto, el número de cambios de dirección será:

$$N_r = N - N_s \quad (23)$$

Ahora, asumiendo que la distribución de los retornos es simétrica, sin ser necesariamente normal, se calcula la estadística Cowles - Jones (Cowles y Jones, 1937):

$$\frac{N_s}{N_r} = \frac{N_s/N}{N_r/N} = \frac{\hat{\pi}_s}{1 - \hat{\pi}_s} \xrightarrow{p} \frac{\pi_s}{1 - \pi_s} = \text{CJ}=1 \quad (24)$$

Tabla 9: Estadística Cowles—Jones sin tendencia para las series de datos

Cowles - Jones	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Estadística	1.020	1.060	0.961	0.988	1.009	0.928

El hecho de que en algunas de las series la estadística Cowles—Jones sea superior a 1 ha sido utilizado por varios autores para indicar que hay algún tipo de estructura en los mercados financieros. Esto se argumenta diciendo que hay más secuencias que cambios de dirección, rechazando lo que propuso Black acerca de los ajustes inmediatos de precios ante revelaciones de información.

Sin embargo, la pregunta más importante para responder aquí es si las estadísticas calculadas en la Tabla 9 son estadísticamente diferentes de 1. Si no lo son se puede decir que las series de datos se comportan de acuerdo con lo esperado por los supuestos de la caminata aleatoria 1 sin tendencia. Para lograr esto se debe asumir que la estadística CJ se comporta de acuerdo con la distribución normal (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997). Esto se puede argumentar diciendo que la variable  $Y_t$  se comporta como una sucesión de variables binomiales y que una suma de este tipo de variables en una muestra grande tiende asintóticamente a la normalidad. Los parámetros de la misma se obtienen a través de una expan-

sión de Taylor de primer grado sobre  $\widehat{CJ} = N_s/(n - N_s)$ , teniendo en cuenta que deben hacerse ajustes a la varianza ya que cualquier par de datos consecutivos, por construcción, son dependientes:

$$\widehat{CJ} \sim N\left(\frac{\pi_s}{1 - \pi_s}, \frac{\pi_s(1 - \pi_s) + 2(\pi^3 + (1 - \pi)^3 - \pi_s^2)}{N(1 - \pi_s)^4}\right) \quad (25)$$

Donde  $\pi = \Phi(\mu/\sigma)$  y  $\pi_s = \pi^2 + (1 - \pi)^2$ . De lo anterior se ve que el caso de caminata aleatoria sin tendencia es sólo un caso particular y que la presente prueba sirve para realizar pruebas incluyendo la tendencia. Obviamente el agregar una tendencia, cualquiera que ésta sea, implica asumir una estructura en los datos en que el número de secuencias debe ser superior al número de cambios de dirección en los retornos.

Con esta información podemos calcular el valor  $p$  para la hipótesis nula que la estadística no es estadísticamente diferente de 0. Así, los resultados completos se presentan en la Tabla 10.

Tabla 10: Estadística y valor P para  $H_0: CJ = 1$

Cowles - Jones	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Estadística	1.020	1.060	0.961	0.988	1.009	0.928
Valor P	23.25%	1.58%	8.21%	33.91%	36.87%	0.50%

Así, con el 95% de confianza, no se puede aceptar la hipótesis que los retornos de British Petroleum y Ford Motors se comportan como caminata aleatoria 1 sin tendencia. Si se aumenta la significancia al 10%, tampoco se podría aceptar la hipótesis para los retornos de Apple. Estos resultados parecen contraintuitivos para aquéllos que operan en el mercado de valores, pues da evidencia de que en la mitad de las series en estudio se comportan como caminatas aleatorias en la versión más fuerte que asume retornos independientes y normalmente distribuidos con varianza constante. Esto implica, pues, que no se puede encontrar una estructura en los retornos del 50% de los activos financieros bajo estudio. Esto desvirtuaría el funcionamiento de metodologías de análisis como el análisis técnico que se basa precisamente en la dependencia temporal de los retornos y de los precios. Una extensión importante para futuros trabajos consistirá en evaluar la solidez de la prueba CJ en términos de error tipo I, pues puede estar aceptando hipótesis falsas.

### 3.2.2.2. Pruebas de corrida (*runs*)

La segunda prueba para realizar es la prueba de corridas (*runs*). En ésta se evalúa el número de secuencias de retornos positivos o negativos y se compara con el número esperado de corridas, usando una distribución teórica (Harlemont, 2008). Este es el mismo tipo de prueba que se utiliza para verificar el desempeño del Valor en Riesgo (VaR). En este contexto se pueden hacer tres pruebas diferentes. La primera es la de cobertura incondicional en la que se busca saber si los retornos cumplen con lo que se esperaría de una secuencia que cumpla con la caminata aleatoria 1. Así, se debe volver a construir una secuencia de golpes (*hit sequence*) haciendo uso de (21). Para realizar la prueba se debe hacer uso de la siguiente función de verosimilitud (Harlemont, 2008):

$$V(\pi) = \prod_{i=1}^n (1 - \pi)^{N_0} \pi^{N_1} \quad (26)$$

Donde  $N_0$  y  $N_1$  son el número de ceros y unos en la secuencia de forma tal que  $N_0 + N_1 = N$ . Donde  $N$  es el número de retornos en la muestra. La estimación de probabilidad  $\pi$  se puede hacer a través de  $\hat{\pi} = N_1 / N$ , lo que permite reescribir (26) como (Harlemont, 2008):

$$V(\hat{\pi}) = \left(\frac{N_0}{N}\right)^{N_0} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{N_1} \quad (27)$$

Bajo la hipótesis nula de cobertura condicional que indica que  $\pi = p$  donde  $p$  corresponde al nivel esperado de retornos positivos se obtiene una función de verosimilitud:

$$V(p) = (1 - p)^{N_0} p^{N_1} \quad (28)$$

Para probar la hipótesis nula se puede usar la siguiente razón de verosimilitud (Harlemont, 2008):

$$V(C) = -2 \ln \left[ \frac{V(p)}{V(\hat{\pi})} \right] \sim \chi_1^2 \quad (29)$$

Así, podremos calcular el valor  $p$  asociado al valor de la estadística:

$$p = 1 - F_{\chi_1^2}(V(C)) \quad (30)$$

Este valor  $p$  nos indica la probabilidad con la que se puede aceptar la hipótesis nula que indica que hay tantos valores positivos y negativos como se esperaría,

de acuerdo con un valor de probabilidad dado. Como se quiere probar que los retornos se comportan como una caminata aleatoria sin tendencia, y se asume una distribución simétrica, se va a suponer que la mitad de los retornos serán positivos (1 en el *hit sequence*) y la mitad serán negativos (0 en el *hit sequence*). Por tanto, se asumirá que  $p$  en (28) es 0.5.

Tabla 11: Valores  $p$ ,  $H_0$  = hay tantos retornos positivos y negativos como se espera de una caminata aleatoria 1 sin tendencia

Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
<u>0.0009</u>	0.6867	0.2372	0.3373	<u>0.0093</u>	<u>0.0000</u>

Los datos subrayados muestran aquellos rangos en los que no se puede aceptar la hipótesis nula al 95% de confianza. Así, la serie con peor comportamiento es la de Ford Motors, mientras que la de mejor comportamiento es la de British Petroleum. Aun así, es importante resaltar que el número de retornos positivos y negativos está de acuerdo con lo esperado para una caminata aleatoria tipo 1 en el 50% de las series que se estudian.

La segunda prueba de corridas que se puede realizar ya no tiene que ver con la cantidad de rendimientos positivos y negativos sino con la independencia de éstos. Es decir, que busca revisar, de acuerdo con lo propuesto por Black y discutido más arriba, que no haya muchos rendimientos positivos o negativos consecutivos. Así, al tratarse la secuencia de golpes como una secuencia de variables binomiales, se buscará saber si cada una de estas secuencias se distribuye siguiendo una función de distribución de Bernoulli.

Para realizar esta prueba se puede asumir que la secuencia de retornos es dependiente en el tiempo y que se puede describir como un proceso de Markov de primer orden con una matriz de probabilidades de transición que se describe como sigue (Harlemont, 2008):

$$\pi = \begin{bmatrix} \pi_{00} & \pi_{10} \\ \pi_{01} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (31a)$$

Donde  $\pi_{10}$  es la probabilidad de un retorno negativo después de un retorno positivo, según se describió en la creación de la secuencia de golpes (*hit sequence*). Además, se debe anotar que  $\pi_{00} = 1 - \pi_{01}$  y que  $\pi_{10} = 1 - \pi_{11}$ . Por tanto, la matriz se puede reescribir:

$$\pi = \begin{bmatrix} 1 - \pi_{01} & 1 - \pi_{11} \\ \pi_{01} & \pi_{11} \end{bmatrix} \quad (31b)$$



La función de verosimilitud del proceso de Markov de primer orden sería:

$$V(\pi_1) = \pi_{00}^{N_{00}} \pi_{01}^{N_{01}} \pi_{10}^{N_{10}} \pi_{11}^{N_{11}} \quad (32a)$$

$$V(\pi_1) = (1 - \pi_{01})^{N_{00}} \pi_{01}^{N_{01}} (1 - \pi_{11})^{N_{10}} \pi_{11}^{N_{11}} \quad (32b)$$

Tomando la primera derivada de (32b) con respecto a  $\pi_{01}$  y  $\pi_{11}$  se obtienen los estimadores de máxima verosimilitud (Harlemont, 2008):

$$\widehat{\pi}_{01} = \frac{N_{01}}{N_{00} + N_{01}} \text{ y } \widehat{\pi}_{11} = \frac{N_{11}}{N_{10} + N_{11}} \quad (33)$$

De acuerdo con la notación que aquí se sigue,  $N_{i0} + N_{i1} = N_i$ , lo que permite simplificar la matriz de estimadores de probabilidad (31b) de la forma siguiente:

$$\widehat{\pi}_1 = \begin{bmatrix} N_{00}/N_0 & N_{01}/N_0 \\ N_{10}/N_1 & N_{11}/N_1 \end{bmatrix} \quad (34)$$

La prueba de independencia consiste en buscar que no haya una diferencia estadísticamente significativa entre la probabilidad de que un retorno positivo sea seguido por otro retorno positivo y la probabilidad de que un retorno positivo sea seguido por un retorno negativo. Si  $\widehat{\pi}_{11} \gg \widehat{\pi}_{10}$  ó  $\widehat{\pi}_{00} \gg \widehat{\pi}_{01}$ , entonces hay evidencia estadística de que los retornos tienen algún tipo de estructura y son diferentes de una caminata aleatoria.

Así, la prueba de independencia, se realiza con la siguiente relación de funciones de verosimilitud (Harlemont, 2008):

$$V(I) = -2 \ln \left[ \frac{V(\widehat{\pi})}{V(\pi_1)} \right] \sim \chi_1^2 \quad (35)$$

Donde  $V(\widehat{\pi})$  es el resultado de (27) y  $V(\pi_1)$  es el resultado de (32a) o (32b). Para calcular el valor  $p$  de la estadística se seguirá el resultado obtenido en (30).

Los valores  $p$  para la muestra completa se encuentran en la Tabla 12.

Tabla 12: Valores  $p$ ,  $H_0$  = Los retornos son independientes linealmente

Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
0.7076	<u>0.0371</u>	0.1502	0.6668	1.0000	<u>0.0029</u>

Los datos subrayados muestran aquellas series de datos para las que no se puede aceptar la hipótesis nula con un 95% de confianza. Así, mientras que al igual que en la prueba anterior la acción con peor desempeño en la prueba fue Ford

Motors, también aparece incumpliendo con uno de los criterios importantes para la caminata aleatoria 1 la acción de British Petroleum.

Dado que la caminata aleatoria incluye los dos criterios, es posible desarrollar una tercera prueba estadística en la que se evalúan las dos anteriores de forma conjunta. En ese sentido será transparente realizar la siguiente estadística (Harlemont, 2008):

$$V(\text{Conjunta}) = V(C) + V(I) \sim \chi_2^2 \quad (36)$$

Los valores  $p$  para esta prueba se presentan en la Tabla 13.

Tabla 13: Valores  $p$  prueba conjunta de corridas

Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
<u>0.0037</u>	0.1050	0.1766	0.5752	<u>0.0355</u>	<u>0.0000</u>

Los valores subrayados son aquéllos que no permiten aceptar la hipótesis nula conjunta con un 95% de confianza. Así, Ford, Citibank y Disney presentan malos resultados, indicando que sus series de retornos no se comportan como caminatas aleatorias tipo 1. Vale la pena resaltar que hay inconsistencias entre los resultados de la estadística Cowles-Jones y las pruebas de corridas. Mientras en la primera se rechaza la caminata aleatoria para British Petroleum, en la segunda se acepta la hipótesis nula. Asimismo, la primera acepta que Citibank y Disney se comportan como caminatas aleatorias 1 mientras que la segunda las rechaza.

Aunque un resultado sorprendente es que la mitad de los activos en estudio cumplan con los principios de la caminata aleatoria tipo 1, las evidentes contradicciones en las pruebas nos obligan a tomar estos resultados con beneficio de inventario. De lo contrario, se podría decir que cualquier intento de realizar análisis técnico sobre series de precios o retornos estaría condenada al fracaso, pues habría un carácter de impredecibilidad de las series financieras, aseveración que los gestores de portafolio y especuladores saben que no aplica en la realidad.

### 3.2.3. Prueba de caminata aleatoria 2

Como se ha mencionado antes, la caminata aleatoria 2 asume que los retornos son independientes entre sí mas no idénticamente distribuidos. Así, lo que implica es que, dado que los retornos serían variables aleatorias independientes, es imposible utilizar su historia para predecir el futuro de forma significativa (Fama

y Blume, 1966). Esto tiene sentido sobre todo si se tiene una serie tan larga como la que en este artículo se utiliza. Durante 20 años, la distribución implícita de los activos puede cambiar a causa de variaciones en la tecnología de negociación y de transmisión de información, la cantidad de operadores de mercado y la globalización de los mercados financieros entre otros factores (Campbell, Lo y MacKinlay, 1997). Así, es difícil intentar realizar pruebas estadísticas cuando no se asume una distribución constante. De hecho, realizar inferencia estadística bajo este supuesto es una empresa imposible.

Por tanto, siguiendo la técnica de filtro de Sidney S. Alexander, lo que se hará es generar un operador autómatas con una regla sencilla en la que si se presenta un rendimiento superior a  $X\%$  en el día  $t$  deberá comprar el activo en el día  $t+1$  y si se presenta un rendimiento menor a  $-X\%$  en el día  $t$  deberá vender el activo en el día  $t+1$  hasta quedar corto en el mismo. Siguiendo a Fama y Blume, una posición se mantiene abierta hasta que el precio del activo baje (suba)  $X\%$  para una posición abierta larga (corta). Incrementos (reducciones) adicionales de  $X\%$  en el retorno no generan compras (ventas) adicionales para no generar problemas de dimensionalidad en la evaluación de resultados (Fama y Blume, 1966). Esta técnica supone que los precios de los activos sí tienen estructura, pero ésta es opacada por el ruido diario de pequeños ajustes (Alexander, 1961).

Black, en su artículo *Noise* del *Journal of Finance*, refuerza la hipótesis que Alexander planteó un cuarto de siglo antes. Tal vez si se elimina el ruido de dimensión  $X$  en el modelo de Alexander, se pueda encontrar una tendencia subyacente, una estructura, en el proceso de generación de los retornos de activos financieros. Así, aunque en las gráficas de precios diarios la mayoría de lo que se aprecia puede llegar a ser ruido, si éste se corrige podría aparecer la estructura subyacente (Black, Noise, 1986). Si no aparece una estructura, habrá un argumento a favor del supuesto de caminata aleatoria 2.

La regla de filtro, que se constituye en un mecanismo de *trading*, revelará si hay o no independencia de los retornos. El resultado final de la estrategia de trading en un mercado que siga una caminata aleatoria 2 sin tendencia debería ser muy cercano a cero. Incluso si la caminata aleatoria tiene tendencia, el resultado final de la estrategia debería ser inferior a la rentabilidad de comprar y mantener el activo para que se justifique el supuesto antes mencionado. Aunque esto puede parecer poco técnico y sus resultados cuestionables por una falta de rigor científico, las reglas de filtro tienen una ventaja importante sobre la inferencia estadística pura. “Las herramientas estadísticas comunes no pueden medir los tipos de dependencia que [el profesional de mercado] encuentra en los datos. Por

ejemplo, las simples relaciones lineales que subyacen al modelo de correlación serial son muy poco sofisticadas para identificar los ‘patrones’ que el ‘chartista’ ve en los precios de las acciones” (Fama y Blume, 1966, 227)

Metodológicamente vale la pena hacer varias precisiones. En primer lugar, reviste particular importancia el hecho que las series de datos ya estén corregidas por dividendos para que esto no agregue ruido adicional al ejercicio. En segundo lugar, se calculó la utilidad de las operaciones de negociación en dólares corrientes, y ésta se expresó como rentabilidad anualizada, usando tres precios de referencia del activo: el precio máximo de la serie, el precio mínimo de la serie y el precio promedio de la serie. Por tanto, se presentarán tres tablas que contienen la información calculada para varios niveles de  $X$ . Finalmente, es importante anotar que lo que importa en la estrategia de trading es el valor absoluto de la rentabilidad. El hecho de que la estrategia de trading arroje resultados negativos no quiere decir que no haya estructura en los datos financieros, de hecho se podría seguir una estrategia que apueste a la autocorrelación negativa y no a la autocorrelación positiva de los retornos y debería arrojar resultados positivos y significativos (Lo, 2007).

La rentabilidad de comprar el activo en la primera fecha y venderlo en la última de la serie, expresada en términos efectivos anuales, se presenta en la Tabla 14a:

Tabla 14a: Rentabilidad de una estrategia de comprar y mantener

	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
<b>Precio inicio</b>	1.52	7.16	8.76	1.52	8.13	4.22
<b>Precio final</b>	4.04	34.05	259.62	28.26	33.75	10.85
<b>Rentabilidad</b>	4.88%	7.90%	17.96%	15.31%	7.18%	4.71%

Estos resultados son muy importantes, pues deben contrastarse con los valores absolutos de las estrategias de trading planteadas como filtro. Los resultados del proceso de filtro antes descrito se presentan en las Tablas 14b (rentabilidad anualizada del autómata para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio mínimo de la serie), 14c (rentabilidad anualizada del autómata para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio máximo de la serie) y 14d (rentabilidad anualizada del autómata para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio promedio de la serie):

Tabla 14b: Rentabilidad anualizada del autómata para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio mínimo de la serie

Rango X	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
0.50%	<u>59.90%</u>	<u>46.35%</u>	<u>-51.09%</u>	<u>55.56%</u>	<u>-45.44%</u>	<u>-65.59%</u>
1.00%	<u>55.05%</u>	<u>35.36%</u>	<u>-47.12%</u>	<u>52.28%</u>	<u>40.82%</u>	<u>-62.66%</u>
1.50%	<u>52.69%</u>	<u>-38.98%</u>	<u>-40.56%</u>	<u>52.15%</u>	<u>-42.56%</u>	<u>-59.06%</u>
2.00%	<u>-28.68%</u>	<u>30.44%</u>	<u>-51.58%</u>	<u>44.53%</u>	<u>-41.43%</u>	<u>-53.88%</u>
2.50%	<u>-40.82%</u>	<u>-38.93%</u>	<u>-22.58%</u>	<u>-43.29%</u>	<u>-40.69%</u>	<u>-45.43%</u>
3.00%	<u>-25.35%</u>	<u>-35.76%</u>	<u>-39.93%</u>	<u>37.09%</u>	<u>-30.99%</u>	<u>-46.46%</u>
3.50%	<u>-37.22%</u>	<u>-17.58%</u>	<u>27.69%</u>	<u>-33.04%</u>	<u>-27.98%</u>	<u>-44.62%</u>
4.00%	<u>28.88%</u>	<u>-3.42%</u>	<u>-35.68%</u>	<u>41.94%</u>	<u>-27.08%</u>	<u>33.30%</u>
4.50%	<u>42.30%</u>	<u>-21.68%</u>	<u>24.73%</u>	<u>38.77%</u>	<u>26.76%</u>	<u>-38.16%</u>
5.00%	<u>43.82%</u>	<u>-20.63%</u>	<u>37.61%</u>	<u>36.38%</u>	<u>26.08%</u>	<u>31.45%</u>
6.00%	<u>-33.33%</u>	<u>-16.98%</u>	<u>-28.90%</u>	<u>-27.58%</u>	<u>10.32%</u>	<u>30.94%</u>
7.00%	<u>38.73%</u>	<u>-18.93%</u>	<u>25.31%</u>	<u>-35.10%</u>	<u>-20.20%</u>	<u>-32.55%</u>
8.00%	<u>-33.25%</u>	<u>-16.54%</u>	<u>17.78%</u>	<u>-31.86%</u>	<u>-20.53%</u>	<u>23.69%</u>
9.00%	<u>-28.43%</u>	<u>-18.44%</u>	<u>21.18%</u>	<u>-27.14%</u>	<u>-16.74%</u>	<u>25.79%</u>
10.00%	<u>-28.70%</u>	<u>-16.32%</u>	<u>24.75%</u>	<u>-23.82%</u>	<u>-11.34%</u>	<u>26.51%</u>

En la Tabla anterior, los resultados subrayados son aquéllos en los que el filtro de dimensión X genera una rentabilidad, como porcentaje del valor mínimo del activo, superior a la estrategia de comprar y mantener para el activo. El hecho de usar el mínimo hace que los filtros se comporten mejor que la estrategia en 88 de 90 casos posibles. Sin embargo, se podría argumentar que usar el mínimo precio de la acción sesga los resultados positivos del filtro al alza. De ahí que se busquen las rentabilidades como proporción del precio máximo de cada activo.

Tabla 14c: Rentabilidad anualizada del autómata para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio máximo de la serie

Rango X	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
0.50%	<u>31.57%</u>	<u>29.38%</u>	<u>-21.57%</u>	<u>29.83%</u>	<u>-32.86%</u>	<u>-42.38%</u>
1.00%	<u>27.59%</u>	<u>19.77%</u>	<u>-18.31%</u>	<u>27.11%</u>	<u>28.69%</u>	<u>-39.85%</u>
1.50%	<u>25.67%</u>	<u>-22.75%</u>	<u>-12.76%</u>	<u>27.00%</u>	<u>-30.23%</u>	<u>-36.75%</u>
2.00%	<u>-4.00%</u>	<u>15.56%</u>	<u>-21.98%</u>	<u>20.72%</u>	<u>-29.19%</u>	<u>-32.29%</u>
2.50%	<u>-15.57%</u>	<u>-22.71%</u>	<u>7.11%</u>	<u>-19.41%</u>	<u>-28.51%</u>	<u>-24.98%</u>
3.00%	<u>0.53%</u>	<u>-19.86%</u>	<u>-12.21%</u>	<u>14.73%</u>	<u>-19.55%</u>	<u>-25.88%</u>
3.50%	<u>-12.42%</u>	<u>-1.21%</u>	<u>5.08%</u>	<u>-10.35%</u>	<u>-16.73%</u>	<u>-24.28%</u>
4.00%	<u>7.38%</u>	<u>1.31%</u>	<u>-8.35%</u>	<u>18.61%</u>	<u>-15.88%</u>	<u>14.93%</u>
4.50%	<u>17.28%</u>	<u>-6.33%</u>	<u>3.65%</u>	<u>16.06%</u>	<u>16.04%</u>	<u>-18.63%</u>
5.00%	<u>18.49%</u>	<u>-5.15%</u>	<u>11.44%</u>	<u>14.17%</u>	<u>15.45%</u>	<u>13.44%</u>
6.00%	<u>-8.84%</u>	<u>-0.29%</u>	<u>-0.75%</u>	<u>-4.84%</u>	<u>3.48%</u>	<u>13.03%</u>
7.00%	<u>14.48%</u>	<u>-3.08%</u>	<u>3.91%</u>	<u>-12.26%</u>	<u>-9.12%</u>	<u>-13.60%</u>
8.00%	<u>-8.76%</u>	<u>0.45%</u>	<u>1.39%</u>	<u>-9.24%</u>	<u>-9.46%</u>	<u>7.60%</u>
9.00%	<u>-3.71%</u>	<u>-2.43%</u>	<u>2.30%</u>	<u>-4.33%</u>	<u>-5.35%</u>	<u>9.08%</u>
10.00%	<u>-4.03%</u>	<u>0.82%</u>	<u>3.66%</u>	<u>0.11%</u>	<u>2.64%</u>	<u>9.61%</u>

En este caso el filtro funciona mejor que la estrategia en 55 de 90 casos posibles. Si se tiene en cuenta que se utiliza el valor máximo de cada activo durante el período de observación, se puede decir que estos resultados están sesgados a favor del funcionamiento de la estrategia de comprar y mantener. Aun así, en más del 60% de los casos hay evidencia de algún tipo de estructura subyacente a los datos financieros.

Tabla 14d: Rentabilidad anualizada del automático para distintos niveles de filtro como porcentaje del precio promedio de la serie

Rango X	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
0.50%	37.79%	34.59%	-33.64%	36.01%	-36.87%	-49.53%
1.00%	33.61%	24.53%	-30.12%	33.15%	32.54%	-46.88%
1.50%	31.59%	-27.77%	-24.28%	33.04%	-34.16%	-43.63%
2.00%	-10.22%	20.06%	-34.07%	26.40%	-33.09%	-38.95%
2.50%	-21.23%	-27.72%	-7.42%	-25.22%	-32.39%	-31.30%
3.00%	-6.86%	-24.78%	-23.71%	19.99%	-23.22%	-32.24%
3.50%	-18.06%	-7.17%	13.36%	-16.07%	-20.35%	-30.57%
4.00%	11.62%	3.67%	-19.90%	24.16%	-19.49%	20.48%
4.50%	22.70%	-11.42%	10.96%	21.42%	19.40%	-24.71%
5.00%	24.00%	-10.37%	21.82%	19.38%	18.78%	18.85%
6.00%	-14.56%	-6.51%	-13.66%	-10.98%	5.27%	18.40%
7.00%	19.68%	-8.62%	11.42%	-17.94%	-12.80%	-19.57%
8.00%	-14.49%	-6.01%	5.90%	-14.99%	-13.13%	12.17%
9.00%	-9.99%	-8.10%	8.25%	-10.54%	-9.29%	13.93%
10.00%	-10.25%	-5.76%	10.97%	-7.18%	-3.17%	14.55%

Al calcular la rentabilidad anualizada como proporción del precio promedio del activo durante toda la ventana de observación se obtiene que hay una estructura subyacente para 70 de los 90 casos (más del 75%).

Así, se puede concluir que las series financieras de la base de datos en estudio no cumplen con el supuesto de caminata aleatoria 2 con tendencia en la mayoría de los casos. Además, tampoco se puede aceptar la hipótesis nula que indica que los retornos son generados por una caminata aleatoria 2 sin tendencia. Es decir, que debe existir un proceso subyacente que genera los datos financieros lo que confirma la perspectiva de los profesionales del mercado, además de ratificar los resultados de Alexander, Fama y Blume.

Una posible extensión de este trabajo consistiría en cambiar la estrategia del operador automático pues la mayoría de rentabilidades de su estrategia son negativas. De acuerdo con Lo, las autocorrelaciones de los retornos pueden ser positivas, lo que implicaría que después de un retorno grande positivo es posible que se presente otro retorno positivo anormalmente grande, o negativa lo

que implica que un retorno positivo es seguido por uno negativo (reversión a la media) (Lo, 2007). La estrategia de negociación operada hasta ahora supone una autocorrelación positiva de los retornos. Una estrategia diferente podría ser que después de un retorno superior a  $X\%$  en  $t$  el operador venda el activo en  $t+1$ , quedando corto, y lo recompre en  $t+1$  después de un retorno negativo de  $-X\%$  en  $t$ , estrategia en la que se le estaría apostando a la reversión a la media de los retornos. El resultado esperado sería obtener estrategias de filtro que generan resultados positivos y que confirman, al igual que la estrategia aquí utilizada, que no se puede aceptar la hipótesis de caminata aleatoria 2.

La aplicación de esta estrategia en el mercado real reviste dos problemas esenciales. El primero consistiría en estimar en qué momento la autocorrelación serial de los retornos es positiva o negativa para determinar qué estrategia debería seguir el autómata sin perder dinero. El segundo radica en que ante la existencia de costos de transacción, como lo demuestran Fama y Blume, las rentabilidades de los portafolios del autómata tienden a cero y, por tanto, habría que adicionar este costo de transacción a cualquier filtro que se quiera aplicar lo que reducirá la frecuencia de operaciones y, por ende, la utilidad esperada (Fama y Blume, 1966).

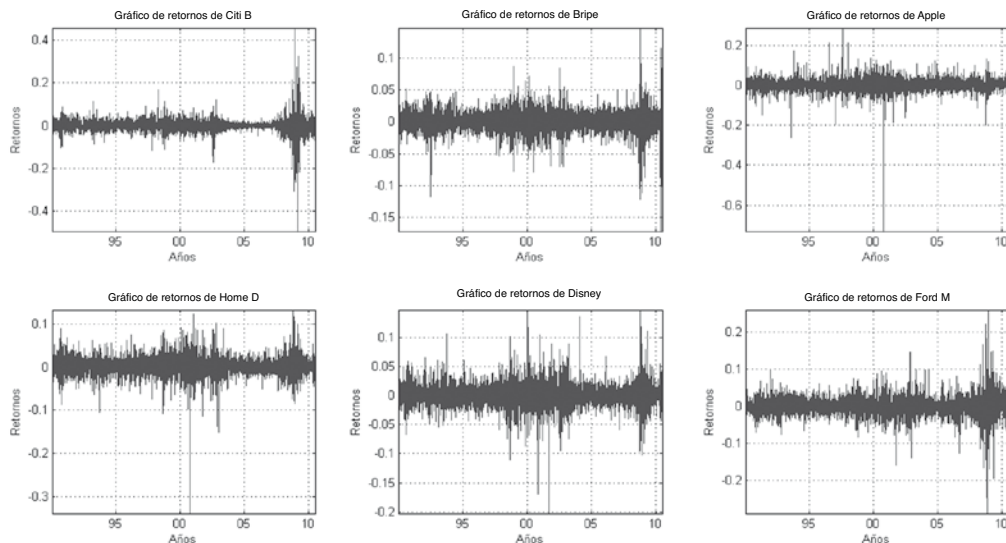
### 3.2.4. Prueba de caminata aleatoria 3

El tercer tipo de caminata aleatoria implica que no hay correlación serial de los retornos. Esto quiere decir que si se calcula el coeficiente de correlación de la serie de datos frente a sí misma de forma no contemporánea (incluyendo un número  $k$  de retrasos entre una serie y otra) el valor de dicho coeficiente debería ser muy cercano a cero. Esto busca determinar si los datos históricos tienen alguna relación –léase poder predictivo– sobre los datos futuros.

En primer lugar, vale la pena hacer una inspección gráfica de los retornos, pues sus gráficas son sumamente ilustrativas. En ellas se evidencia uno de los resultados más importantes de las finanzas, tanto para la valoración de derivados como para la medición y gestión del riesgo financiero: las agrupaciones temporales de volatilidad (*clusters*).

En el Gráfico 9 se presentan seis paneles, cada uno de los cuales contiene el gráfico de la serie de retornos de los activos financieros en la base de estudio.

Gráfico 9: Retornos de los activos

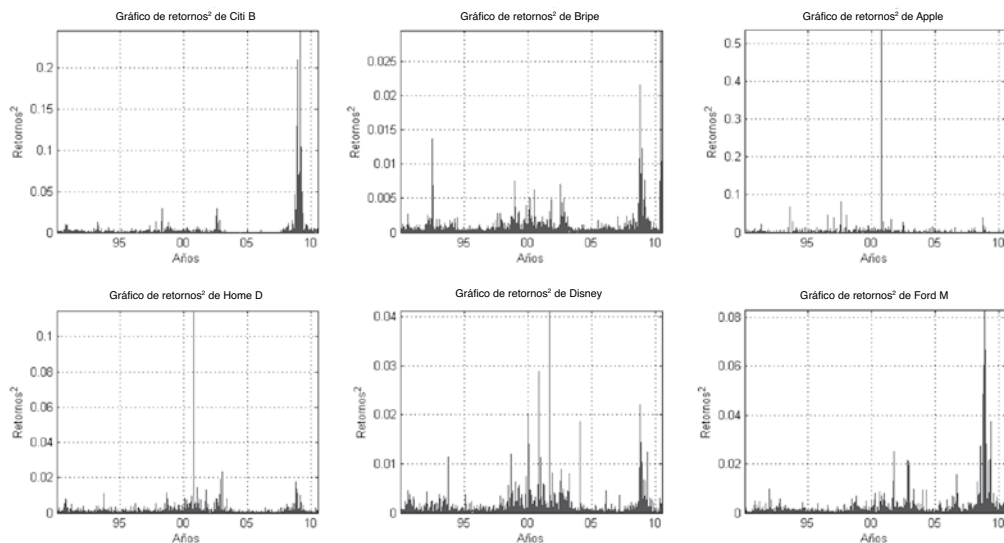


Lo primero que vale la pena anotar es que todas las gráficas tienen escalas diferentes en el eje Y lo que hace que no sean comparables entre sí. Sin embargo, dentro de cada una de las gráficas se pueden ver períodos de altas volatilidades (retornos significativamente positivos o negativos) seguidos por períodos de bajas volatilidades (retornos pequeños ya sean positivos o negativos). Estas agrupaciones de volatilidad están asociadas con momentos del ciclo económico. Si se retoma lo que se dijo en la sección uno del presente artículo, los períodos de 1990-1999 y de 2004-2006 se caracterizaron por ser de expansión económica. Esto se tradujo en retornos pequeños y estables en el tiempo. Por el contrario, los períodos de 2000-2004 y de 2007-2010 fueron de crisis financiera (la burbuja de las compañías de internet y la crisis hipotecaria en Estados Unidos). En estos períodos se ven agrupaciones (*clusters*) de alta volatilidad en los retornos, en algunos casos presentando retornos superiores (inferiores) al 10% (-10%).

Una forma estándar de poner en evidencia estas agrupaciones de volatilidad consiste en calcular los retornos de los activos elevados al cuadrado. Esto elimina el signo e incrementa la dimensión lo que hace que los retornos pequeños pierdan relevancia frente a los retornos de mayor tamaño en la presentación gráfica. Estos se incluyen en el Gráfico 10.



Gráfico 10: Retornos de los activos al cuadrado

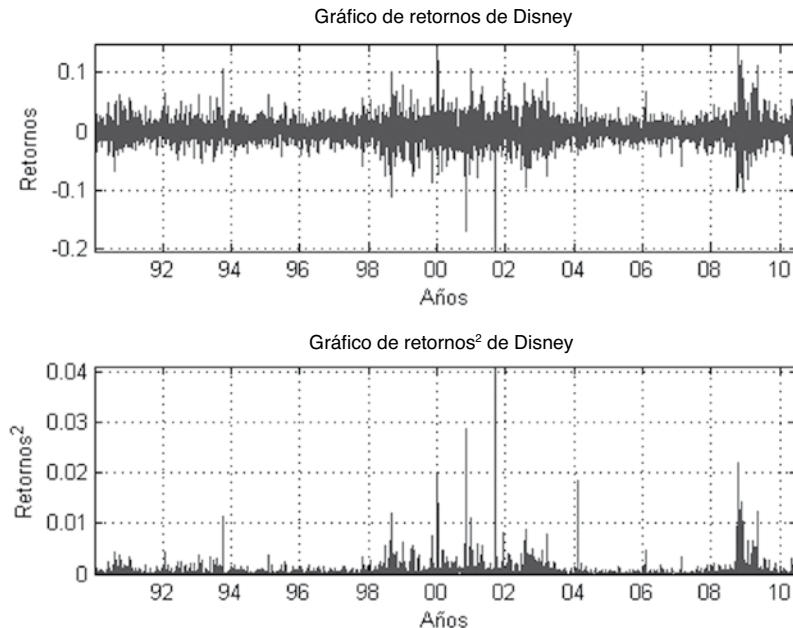


En estas gráficas se ven de forma mucho más clara las agrupaciones de volatilidad. Éstas dan una primera señal en contra de la hipótesis de ausencia de correlación de los retornos de los activos financieros, pues se puede inferir que después de un día de un retorno inusualmente grande (ya sea positivo o negativo) vendrá otro día con un retorno inusualmente grande. Sin importar que se pueda o no determinar la dirección del retorno una inspección a la gráfica genera una primera “corazonada” en contra del supuesto de caminata aleatoria 3.

Para poder apreciar con más claridad la relación entre la Gráfica de retornos y de retornos al cuadrado se presentan las dos conjuntas, para la acción de Disney, en la Gráfica 11.

Así, en la Gráfica 11 se pueden identificar varios períodos de alta volatilidad y varios períodos de calma en el retorno. Es precisamente este tipo de análisis el que ha demostrado que las series de tiempo no son homoscedásticas y, por tanto, han servido para atacar también el supuesto de normalidad, ya que ésta asume una varianza constante de la variable aleatoria. Hasta hace unos años eran raros los modelos que incluían un parámetro de varianza estocástica en la distribución. Sin embargo, es evidente en las gráficas anteriores que hay heterocedasticidad en las series de tiempo y, por tanto, ésta debe modelarse correctamente.

Gráfico 11: Retornos y retornos al cuadrado de Disney



Después de realizar la inspección gráfica de los retornos procederemos a realizar una formalización estadística de la misma. Utilizando la definición de correlación de la ecuación (14) se puede escribir la correlación serial como (Tsay, 2002):

$$\rho_{r_t, r_{t+k}} = \frac{E[(r_t - \bar{r}) \cdot (r_{t+k} - \bar{r})]}{\sqrt{E[(r_t - \bar{r})^2]} \cdot \sqrt{E[(r_{t+k} - \bar{r})^2]}} \quad (37)$$

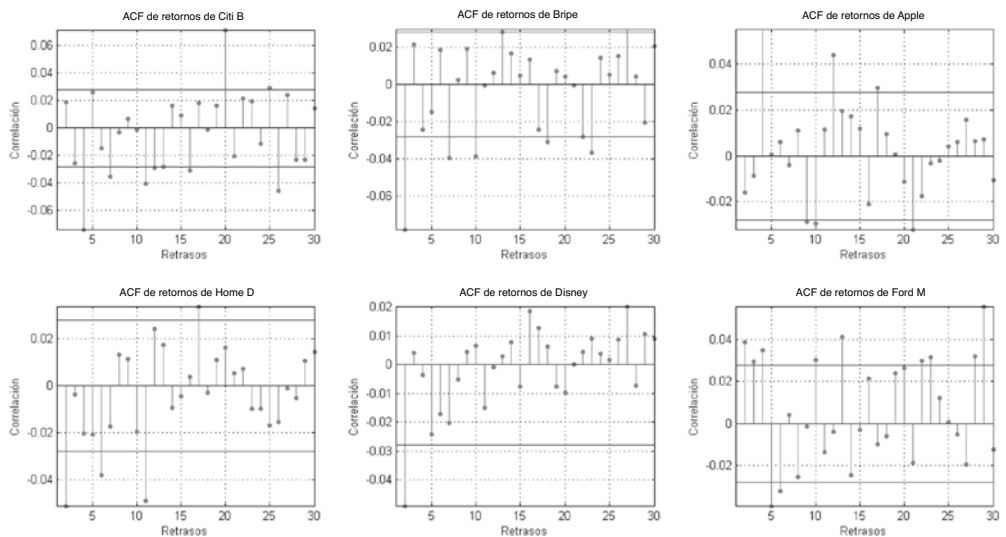
Es decir, que como se indicó al comienzo de esta sección se corre una correlación de la serie frente a sí misma, pero con retraso. El valor del retraso puede ser variable y así se identifica si algún número de datos en el pasado tiene poder predictivo consistente sobre el valor futuro del retorno. Aquí, siguiendo la metodología implementada para los momentos estadísticos, primero se hará un análisis de las autocorrelaciones de muestra completa para luego verificar si los resultados son consistentes en el tiempo.

### 3.2.4.1. Autocorrelaciones de los retornos y de los retornos al cuadrado – muestra completa

Como se sabe por desarrollos previos en este artículo, el coeficiente de correlación se mueve dentro del rango  $[-1,1]$ . Así, evidentemente el coeficiente de autocorrelación cuando  $k$  es igual a 0 será de 1 por construcción. Por tanto, en las gráficas que se presentan a continuación el eje Y se ha ajustado para evitar mostrar esta correlación trivial, pues permite mostrar de forma más clara la dimensión de los coeficientes cuando  $1 \leq k \leq 30$ .

En la siguiente Gráfica se presentan los coeficientes de autocorrelación para  $1 \leq k \leq 30$ .

Gráfico 12: Coeficientes de autocorrelación de los retornos para todos los activos – muestra completa



En el Gráfico 12 se pueden apreciar los coeficientes de autocorrelación de los retornos para distintos valores del retraso  $k$ . Es importante anotar que las líneas horizontales que aparecen en los gráficos muestran dos desviaciones estándar del error en el estimador por encima y por debajo de cero, constituyendo así un intervalo de confianza. Si el coeficiente de autocorrelación está dentro del intervalo de confianza, no se puede rechazar la hipótesis de que su valor sea estadísticamente diferente de 0.

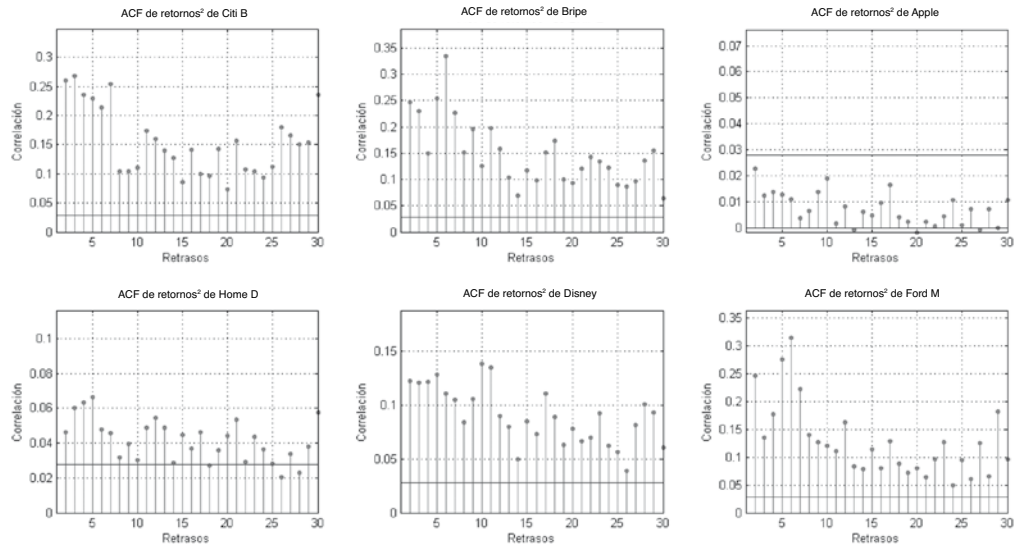
Podemos dividir los activos de la serie en dos grupos. En primer lugar Citibank, British Petroleum, Home Depot y Disney presentan dentro de los primeros cinco retrasos al menos un coeficiente de autocorrelación significativo y negativo. Esto, siguiendo la lógica de la prueba de caminata aleatoria 2 puede ser evidencia de autocorrelación serial negativa en el corto plazo (Lo, 2007). Así, hay evidencia en los retornos de un fenómeno de reversión a la media. Por otra parte, las acciones de Apple y Ford Motors, presentan dentro de los primeros cinco retrasos al menos un coeficiente de autocorrelación significativo y positivo. Esto indicaría que hay correlación serial positiva.

Aunque estos resultados podrían leerse a primera vista como evidencia en contra de la HME, es importante anotar que el mayor valor de los coeficientes de autocorrelación es de -0.08 para el primer grupo y de 0.06 para el segundo grupo. Esto, aunque excede el rango del intervalo de confianza, parece ser despreciable. De hecho Franco Modigliani decía sobre estos valores tan cercanos a los límites de un intervalo de confianza: “Si, para un gran número de observaciones usted debe consultar las tablas para verificar si su estadística  $t$  es significativa, entonces no es significativa” (Merton, 1985, 9). Es decir, que para poder rechazar el supuesto de caminata aleatoria 3, deberíamos esperar que los coeficientes de autocorrelación fueran estadísticamente significativos más allá de cualquier duda. Esto no sucede tan claramente en los datos que se presentan en el Gráfico 12, aunque dentro del rigor estadístico de un purista la evidencia en contra de la hipótesis nula se encuentra ahí.

Una verificación gráfica adicional que es tradicional realizar en el análisis de series de tiempo consiste en inspeccionar la autocorrelación de los retornos al cuadrado para distintos retrasos. Esto se puede apreciar en el Gráfico 13.

Aquí los resultados son mucho más dicentes que los obtenidos en la Gráfica 12. Para todos los activos, exceptuando la acción de Apple, hay valores altos del coeficiente autocorrelación de los retornos al cuadrado para la mayoría de retrasos. Esto nos permite inferir que para esos cinco activos al menos el valor absoluto del retorno del día  $t$  tiene poder predictivo sobre el valor absoluto del retorno para las fechas  $t+1$ ,  $t+2$ ,  $t+3$ , ...,  $t+k$ . Sin embargo, aunque este análisis revela una estructura, ésta no contradice el supuesto de caminata aleatoria 3 que asume que no hay correlación serial de los retornos. Al evaluar los retornos elevados al cuadrado se está incluyendo una no linealidad que no hace parte del supuesto que se quiere probar. Aun así, se incluye este análisis por considerarlo altamente ilustrativo.

Gráfico 13: Coeficientes de autocorrelación de los retornos al cuadrado para todos los activos –muestra completa



### 3.2.4.2. Prueba Ljung—Box—Pierce para coeficientes de autocorrelación de retornos y retornos al cuadrado

Los resultados del inciso anterior muestran que para cada una de las series de tiempo hay al menos un coeficiente de autocorrelación estadísticamente diferente de cero, pues se ubica fuera del intervalo de confianza. Así, Disney sólo tiene un coeficiente de autocorrelación diferente de 0, mientras que Ford Motors tiene 11. En este punto, más allá de presentar los resultados de la inspección gráfica, se implementará una prueba estadística para evaluar la hipótesis nula que todos los coeficientes de autocorrelación son estadísticamente iguales a 0.

Esta prueba fue propuesta por Box y Pierce en 1970 y su estadística se define como (Tsay, 2002):

$$Q^*(m) = N \sum_{k=1}^m \hat{\rho}_{r_t, r_{t+k}}^2 \quad (38)$$

Para lograr que la estadística en (38) funcione correctamente se debe asumir que los retornos siguen una caminata aleatoria 1 con parámetro de media igual a la media de la serie. Es decir, que se debe asumir que los retornos son independien-

tes e idénticamente distribuidos. En tal caso, la estadística tenderá asintóticamente a una distribución Chi cuadrada con  $m$  grados de libertad.

En 1978 Ljung y Box modificaron la prueba para incrementar su poder frente a muestras pequeñas. Así, la estadística de Ljung—Box es la siguiente:

$$Q^*(m) = N \cdot (N + 2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_{r_t, r_{t+k}}^2}{N - k} \quad (39)$$

Esta prueba debe realizarse para varios valores de  $m$ . Sin embargo, estudios empíricos y de simulación han demostrado que el valor óptimo de  $m \approx \ln(N)$  (Tsay, 2002). En la Tabla 15a se presentan los valores  $p$  para la hipótesis nula que indica que los coeficientes de autocorrelación son conjuntamente iguales a 0. Esta estadística se calculó para diversos valores de  $m$  teniendo en cuenta el  $\ln(5171) \approx 9$ .

Tabla 15a: Valores  $p$   $H_0$  = coeficientes de autocorrelación de los retornos son conjuntamente iguales a 0

M	Resultados	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
5	Valor P	0.00%	0.00%	0.27%	0.08%	0.39%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	NO	NO
9	Valor P	0.00%	0.00%	0.54%	0.02%	1.18%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	NO	NO
10	Valor P	0.00%	0.00%	0.19%	0.02%	1.84%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	NO	NO
15	Valor P	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	7.85%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	SÍ	NO
20	Valor P	0.00%	0.00%	0.02%	0.00%	13.70%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	SÍ	NO
25	Valor P	0.00%	0.00%	0.02%	0.02%	32.98%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	SÍ	NO
30	Valor P	0.00%	0.00%	0.08%	0.02%	39.84%	0.00%
	Acepta	NO	NO	NO	NO	SÍ	NO

En la Tabla se puede observar que se rechazan todas las pruebas, exceptuando las de la acción de Disney para  $m > 10$ . Este resultado se presenta porque Disney sólo tiene un coeficiente de autocorrelación estadísticamente significativo, para  $k=1$ . Los demás coeficientes de autocorrelación son cercanos a cero y muy pequeños por lo que a medida que  $m$  aumenta el valor de la estadística tiende a reducirse y el del valor crítico de la función de distribución tiende a aumentar. Aun así, es importante ver que para el número óptimo  $m=9$  la prueba de Ljung Box no se puede aceptar para todos los activos con un nivel de confianza del 95%.

La prueba de Ljung—Box también se realizó para las autocorrelaciones de los retornos elevados al cuadrado. Los resultados están consignados en la Tabla 15b.

Tabla 15b: Valores  $p$   $H_0$  = coeficientes de autocorrelación de los retornos al cuadrado son conjuntamente iguales a 0

M	Resultados	Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
5	Valor P	0.00%	0.00%	11.58%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
9	Valor P	0.00%	0.00%	29.33%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
10	Valor P	0.00%	0.00%	24.65%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
15	Valor P	0.00%	0.00%	58.01%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
20	Valor P	0.00%	0.00%	75.67%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
25	Valor P	0.00%	0.00%	91.28%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO
30	Valor P	0.00%	0.00%	97.03%	0.00%	0.00%	0.00%
	Acepta	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO

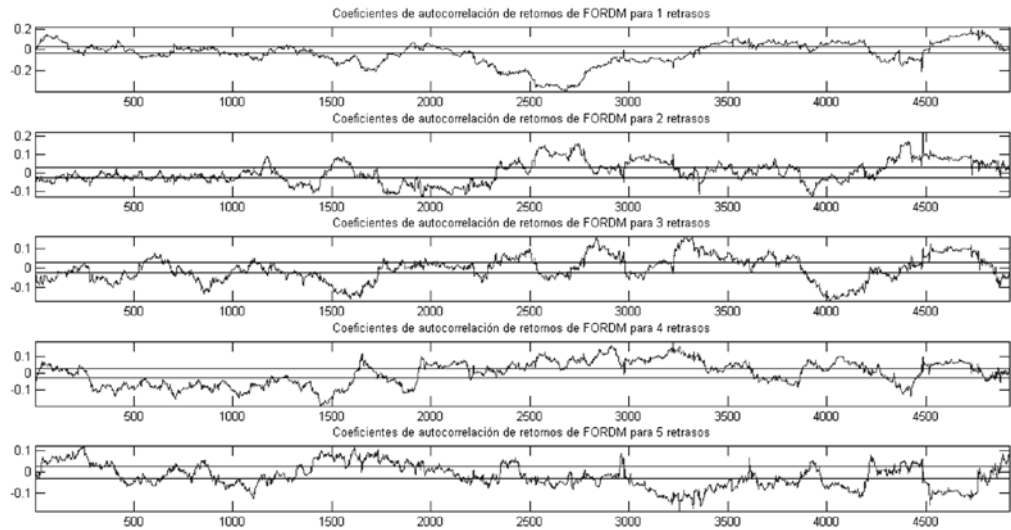
Así, exceptuando la acción de Apple, todas las acciones exhiben coeficientes de autocorrelación de los retornos al cuadrado estadísticamente significativos tanto individual como conjuntamente. Esto es altamente relevante para la estimación del riesgo y es de hecho, el fundamento de los modelos de volatilidad heterocedástica tales como los ARCH y GARCH bajo diversas especificaciones.

### 3.2.4.3. Autocorrelaciones de los retornos y los retornos al cuadrado – ventanas móviles

Como se ha discutido durante toda esta sección, los momentos estadísticos, incluidas las medidas de asociación, ya sea la covarianza o el coeficiente de correlación, son variables aleatorias en función del tiempo. De ahí que sea importante evaluar el comportamiento de los coeficientes de autocorrelación de los retornos y de los retornos al cuadrado con ventanas móviles, en este caso de 250 datos.

En el Gráfico 14 se analizan los coeficientes de autocorrelación para los primeros cinco retrasos de la acción de Ford Motors. Las dos líneas rectas corresponden al límite superior e inferior del intervalo de confianza que determina si el valor es estadísticamente diferente de cero.

Gráfico 14: Coeficientes de autocorrelación móviles de los retornos de Ford Motors



De esta Gráfica se pueden extraer varias conclusiones. Primero, en la sección que atañe a los coeficientes de autocorrelación para muestra completa se señaló que éstos no están muy lejos de los límites del intervalo de confianza. Sin embargo, cuando se realiza el análisis de ventanas móviles podemos observar que los datos se distancian de forma importante de dichos límites en diferentes momentos del tiempo. Así, la diferencia en los resultados encontrados en el análisis de muestra completa frente al de medias móviles puede corresponder al tamaño de la base de datos. Es decir, que aunque el supuesto de la caminata aleatoria se cumple en el largo plazo, esto no implica que lo haga también en el corto plazo.

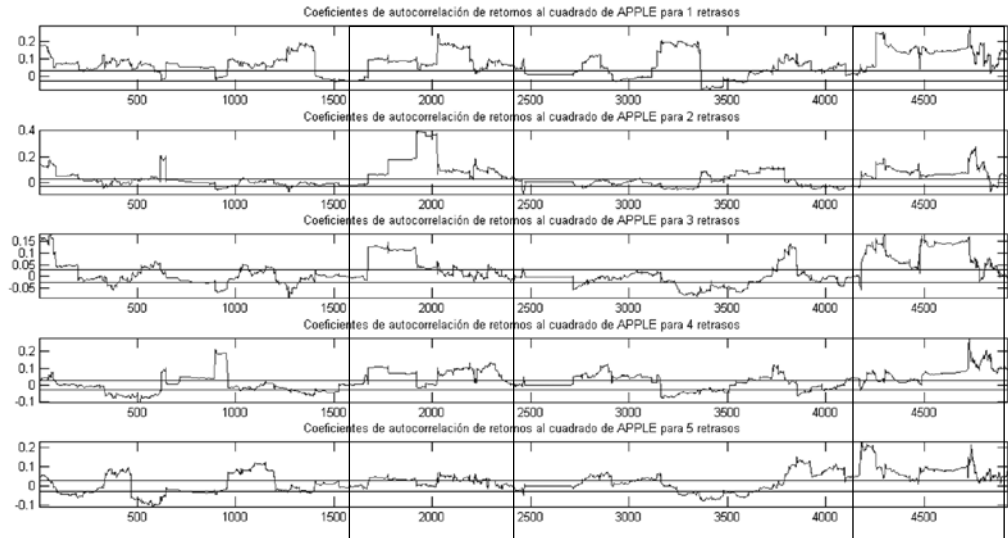
En segundo lugar, vale la pena anotar que los coeficientes de autocorrelación fluctúan entre valores positivos y negativos. Es decir, que según el momento puede haber evidencia de correlación serial positiva o negativa para los retornos de un mismo activo. Esto está directamente relacionado con la dificultad de implementar una estrategia de negociación basada en el filtro de Alexander que se discute al final de la sección que concierne a la prueba de la caminata aleatoria 2.

El mismo ejercicio que se acaba de presentar con los coeficientes de autocorrelación de los retornos se puede presentar para los coeficientes de autocorrelación de los retornos al cuadrado. Así se utilizará el caso de la acción de Apple, pues en la prueba de Ljung - Box es la única que aprueba la hipótesis nula en



todos los retrasos estudiados. Sería importante ver si ese fenómeno se sostiene a través del tiempo.

Gráfico 15: Coeficientes de autocorrelación móviles de los retornos al cuadrado de Apple



En los dos recuadros se señalan períodos donde con certeza la estadística  $Q^*(5)$  será superior al valor crítico para un 95% de confianza, pues las correlaciones son positivas y superiores a los límites superiores del intervalo en la mayoría de los casos. Así, se presenta el mismo fenómeno que en el estudio de los coeficientes de autocorrelación móviles de los retornos. En el largo plazo, para Apple no hay evidencia de autocorrelación de los retornos al cuadrado, sin embargo, hay períodos de tiempo de más de 500 días (2 años) en los que se presentan autocorrelaciones importantes en los retornos al cuadrado. Cuando se presenta este tipo de evento, tanto el gestor de portafolio como el analista de riesgo deben tener plena conciencia para poder realizar correctamente sus funciones.

#### 4. Resultados, conclusiones y extensiones

El objetivo del presente artículo era recopilar y realizar algunas de las pruebas más conocidas de normalidad de los retornos así como de la hipótesis de mercado eficiente para una base de datos particular, aportando como producto final un

código en MATLAB® aplicable a cualquier serie financiera. En la Tabla 16 se presentan los principales ejercicios realizados con sus resultados activo por activo y en el Anexo A se presenta el código.

Tabla 16: Resultados de las pruebas realizadas

SUPUESTO / PRUEBA		Citibank	British Petroleum	Apple	Home Depot	Disney	Ford Motors
Retorno simple = Logarítmico		Diferencias superiores al 10% en 1 de cada 10,000 casos					
Normalidad de los retornos		No se puede aceptar la hipótesis en ninguno de los casos					
Caminata aleatoria 1	Secuencias y cambios de dirección	SÍ	NO	NO	SÍ	SÍ	NO
	Corridas	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO
	Independencia	SÍ	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO
	Corridas + Independencia	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO
	Conjuntas	NO	NO	NO	SÍ	NO	NO
Caminata aleatoria 2	Filtro Alexander - Fama - Blume	27%	53%	80%	53%	20%	0%
	C>50%	NO	SÍ	SÍ	SÍ	NO	NO
Caminata aleatoria 3	Autocorrelación de los retornos muestra completa Q*(9)	NO	NO	NO	NO	NO	NO
	Autocorrelación de los retornos ventanas móviles	La autocorrelación significativa de los retornos, ya sea positiva o negativa, es un fenómeno que se presenta durante cortos períodos de tiempo. Esto implica que en el largo plazo se cumple el supuesto de caminata aleatoria 3 mas no necesariamente en el corto plazo					

En la primera parte se evidenció que, aunque el cálculo de retornos logarítmicos es una buena aproximación del retorno simple para pequeños cambios en los precios, una vez estos cambios se vuelven significativos, el retorno logarítmico subestima el retorno real de los activos financieros. Esto tiene implicaciones serias para la gestión de riesgos toda vez que modelos como el VaR se preocupan principalmente por evaluar y predecir precisamente estos eventos de grandes cambios en los precios. Sin embargo, la utilización de los retornos logarítmicos sirve dos propósitos. En primer lugar, permite la aditividad simple en vez de la forzada utilización de procesos multiplicativos. En segundo lugar, permite suponer que los precios se distribuyen lognormalmente y, por tanto, los retornos, como función logarítmica de los precios, deben distribuirse normalmente. Esto facilita el diseño de modelos de valoración de activos y de gestión de riesgos. Sin embargo, éstos nacen con un sesgo en lo más fundamental de su construcción.

Para confirmar las fallas en el supuesto de normalidad se realizó una descripción estadística de las series de tiempo. En primer lugar, en las estadísticas de muestra completa se evidenció que los retornos de los activos financieros sujetos

al análisis no cumplen con los supuestos de normalidad. Éstos presentan distribuciones implícitas asimétricas y leptocúrticas. Al realizar la prueba de normalidad de Jarque - Bera, la hipótesis nula se rechazó en todos los casos.

El supuesto de normalidad de los retornos inunda la teoría financiera desde hace más de medio siglo. Sin embargo, la omisión de características como el coeficiente de asimetría negativo y las colas pesadas de la distribución de los retornos sólo genera sesgos adicionales en los modelos que se construyen a partir de dicho supuesto. Además, asumir normalidad por lo general implica asumir media y varianza constantes, cuando son en realidad variables aleatorias cuyo valor fluctúa en el tiempo, como se pudo ver en las gráficas de los momentos estadísticos móviles.

Lo anterior es ampliamente conocido en la academia y ha redundado, soportado por la incrementada capacidad computacional disponible, en modelos cada vez más sofisticados tanto de valoración de activos como de medición de riesgos. Así, ya existen modelos de valoración que incluyen volatilidad estocástica con saltos y que emplean la distribución implícita del activo más allá de usar una función de distribución conocida.

En la segunda parte se presentó la hipótesis de mercado eficiente como un concepto capital de las finanzas en el sentido de ocupar el centro del debate, no sólo de los beneficios (reales o no) de la información asimétrica sino de la predictibilidad de los retornos. Luego se mostró como ésta culmina en el supuesto que los retornos son generados por caminatas aleatorias con o sin tendencia. El caso más general y más débil de la caminata aleatoria es aquella que sólo asume que no hay correlación serial de los retornos (caminata aleatoria 3). Un grupo de casos particulares de este caso general propone que los retornos de los activos financieros siguen una caminata aleatoria en la que los incrementos son linealmente independientes (caminata aleatoria 2). Finalmente un caso particular de la caminata aleatoria 2 es aquel en el que los incrementos de los retornos son independientes e idénticamente distribuidos (caminata aleatoria 1). Probar este último caso equivaldría a probar la HME en su versión más fuerte y restrictiva.

Aquí se presentarán los resultados desde el caso más general al más particular de la HME. Para la muestra completa se demostró que no se puede asumir que los coeficientes de autocorrelación de las series de retornos sean, conjuntamente, estadísticamente insignificantes. Sin embargo, este resultado es sólo una falacia matemática, pues los valores de la estadística están muy cerca de los valores críticos. Además, los valores de los coeficientes son muy pequeños por lo que no permitirían generar una predicción sistemática del comportamiento futuro del

activo. No obstante, se demostró que hay correlación no serial de los retornos al realizar el análisis de autocorrelación para los retornos al cuadrado. Esto explica precisamente la existencia de aglomeraciones de volatilidad donde un retorno de gran magnitud tiende a ser seguido por otro retorno de gran magnitud sin importar la dirección del mismo.

Para probar si los retornos cumplen con el principio de independencia (caminata aleatoria 2) se generó un operador automático que compraba y vendía el activo financiero siguiendo una sencilla regla. Un resultado muy importante de esta prueba consistió en demostrar que sí hay una estructura subyacente a los retornos y que, por tanto, sólo en algunos casos se podría aceptar la hipótesis nula. Así, en la Tabla 16 los porcentajes que atañen a la caminata aleatoria 2 indican en qué proporción de los casos hubiera sido más rentable (en valor absoluto) comprar el activo el primer día de la serie y liquidarlo al precio del último día. Aunque se tomó un valor arbitrario de 50% de los casos para dictaminar si había pasado la prueba, la evidencia estadística es irrefutable en sólo uno de seis casos, en que la estrategia de comprar y mantener da más rentabilidad que el filtro en el 80% de los casos.

Aquí, de forma similar al caso que se presenta en la caminata aleatoria 3, se evidencia que hay una estructura subyacente al proceso de generación de retornos. Sin embargo, es difícil identificar el origen de dicha estructura y mucho menos utilizarla para hacer dinero en el mercado financiero. Así que aunque la evidencia estrictamente estadística no confirma ni desmiente la HME en esta versión, es claro que si el mercado no es eficiente en el sentido de la caminata aleatoria 2, no hay herramientas estadísticas, matemáticas o analíticas que permitan generar ganancias, aprovechando esta anomalía, sin incurrir en riesgos adicionales.

Para, finalmente, comprobar la HME en su versión más fuerte, se recurrió a tres tipos de prueba. En la primera, dado que se asume que los incrementos de los precios son independientes e idénticamente distribuidos, se busca que haya tantas secuencias de retornos positivos o negativos, como momentos de cambio de dirección. Ésto asume que el proceso generador de retornos es una caminata aleatoria sin tendencia. Lo contradictorio de los resultados frente a las pruebas que se corrieron posteriormente invita a que en un futuro documento se investigue el poder de la prueba realizada y, sobre todo, su propensión a caer en el error tipo I.

Luego se realizó una prueba de corridas en los retornos, identificando los cuatro casos posibles en los que se podrían presentar los retornos en una secuencia de golpe (*hit sequence*). Esta prueba, al igual que la de las secuencias y

cambios de dirección, arrojó que se aceptaría la hipótesis nula sólo para el 50% de los activos. Sin embargo, sólo un activo pasa las dos pruebas.

Después se realizó una prueba de independencia de los retornos asumiendo una distribución implícita. Para este caso, en particular, no se asumió una tendencia en el proceso generador de retornos. Aun así ésta es la prueba más exitosa, pues se acepta la hipótesis nula para cinco de los seis activos. Cuatro de estos activos también pasan la prueba de la caminata aleatoria 2 lo que es una señal de consistencia en los resultados. Finalmente, se realizó una prueba conjunta de corridas e independencia. En esta prueba, nuevamente, sólo se puede aceptar la hipótesis nula para la mitad de los activos. Es importante anotar que sólo un activo pasó las cuatro pruebas de la caminata aleatoria 1 (Home Depot).

Queda un mal sabor de boca al realizar la verificación de la hipótesis del mercado eficiente. En primer lugar, los resultados de algunas pruebas no son concluyentes en el sentido de tener valores  $p$  que están muy cercanos al nivel de significancia deseado. Es decir, que el rechazo de la HME, sobre todo en el caso de la caminata aleatoria 3, es un tema más de interpretación de la estadística. Por otra parte, aunque el desempeño de los activos frente a las diferentes definiciones de caminata aleatoria deja mucho que desear, ese cumplimiento apenas parcial de los supuestos planteados por Samuelson (1965) no da espacio para generar utilidades anormales o para realizar estrategias de portafolio que consistentemente generen más retornos que el mercado. Así, la evidencia empírica para esta base de datos no es concluyente en ninguno de los dos sentidos.

Dentro de las extensiones de este trabajo hacia el futuro está principalmente realizar una caracterización similar de todos los activos que se negocian en la Bolsa de Valores de Colombia. Esto implica que hay que contar con una base de datos similar a la aquí utilizada, en la que los precios estén corregidos para eventos de la firma tales como: dividendos, *splits*, *reverse splits*, fusiones y escisiones de las empresas. Una vez se tenga esta base de datos sería interesante probar la HME no sólo para retornos diarios sino, como es estándar en la literatura, para retornos semanales y mensuales. Esto podría corregir, en parte, el problema del ruido que se discutió ampliamente en la prueba de caminata aleatoria 2.

Otra extensión importante consiste en realizar las mismas pruebas aquí adelantadas sobre índices amplios de mercado en los que se cuente con beneficios de diversificación y de cancelación de eventos específicos de la firma. Así, tratándose de un “activo” que replica la economía se podrá realizar mejor una prueba sobre predictibilidad del ciclo económico.

## 5. Bibliografía

- Alexander, Sidney S. (1961). "Price Movements in Speculative Stock Markets: Trends or Random Walks". *Industrial Management Review* 2: 7-26.
- Black, Fischer. (1986) "Noise". *Journal of Finance* 41, n° 3: 529 - 543.
- Black, Fischer, y Myron Scholes. (1973) "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". *Journal of Political Economy*, 637-654.
- Campbell, John Y., Andrew W. Lo, y A. Craig MacKinlay. (1997). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton, Pinceton University Press.
- Cowles, A., y H. Jones. (1937). "Some a Posteriori Probabilities in Stock Market Action". *Econometrica*, 280-294.
- Fama, Eugene F, y Marshal E Blume. (1966). "Filter Rules and Stock-Market Trading". *The Journal of Business* 39, n° 1: 226-241.
- Harlemont, Daniel. (2008). "Backtesting Value at Risk". [www.yats.com](http://www.yats.com). 29 de 05, <http://www.yats.com/doc/r-trading-tp-020-statements.pdf> (último acceso: 17 de 04 de 2009).
- Jarque, C. M. & Bera, A. K. (1987). "A Test for Normality of Observations and Regression Residuals" *International Statistical Review* 55 (2), 163-172.
- Lo, Andrew W. (2007). "Where Do Alphas Come From?: A New Measure of the Value of Active Investment Management". *NBER Working Paper* (MIT Sloan School of Management; National Bureau of Economic Research (NBER)), 05: 1-40.
- Merton, Robert C. (1985). "On the Current State of the Stock Market Rationality Hypothesis". [www.mit.edu](http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/2125/SWP-1717-12868260.pdf?sequence=1). 10 de 1985. <http://dspace.mit.edu/bitstream/handle/1721.1/2125/SWP-1717-12868260.pdf?sequence=1> (último acceso: 04 de 08 de 2010).
- Neftci, Salih N. (2000). *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*. San Diego: Academic Press.
- Samuelson, Paul. (1965). "Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly". *Industrial Management Review* 6, n° 2: 41-49.
- Shreve, Steven. (2005). *Stochastic Calculus for Finance I: The binomial Asset Pricing Model*. New York, Springer Financa.
- Taleb, Nassim Nicholas. (2007). *The Black Swan*. London, Penguin Books.

Tsay, Ruey S. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. New York: John Wiley & Sons.

Wooldridge, Jeffrey M. (2002). *Introductory Econometrics: A Modern Approach*. Michigan: South Western College Publishings.

## Anexo A: Código completo para MATLAB®

Los comentarios al código se encuentran en cursiva.

### PARTE 1

#### Cargue de datos

`g=input('1 si desea ver gráficos 0 si no: ');` *1 si se quieren gráficos 0 si no. De aquí en adelante antes de cada gráfico hay una referencia, a través de un if a la variable g*  
`precios=importdata('MATLAB2.txt');` *Se carga un archivo plano sólo con los datos de precios de las acciones*

`fechasxls=importdata('fechasmatlab2.txt');` *Carga un vector de fechas en formato de excel*  
`nombres=['CITIB'; 'BRIPE'; 'APPLE'; 'HOMED'; 'DISNE'; 'FORDM'];` *Columnas 1 a 6: Citibank, British Petroleum, Apple, Home Depot, Disney, Ford Motors.*

`[obs act]=size(precios);` *Estas dos variables indican cuántas observaciones de precios y cuántos activos hay.*

#### Conversión de fechas de formato de Excel a Formato MATLAB®

`fechasm=fechasxls+693960;` *Suma la constante necesaria para pasar del consecutivo de excel al de matlab*

### PARTE 2

#### PARTE 2.1

##### Cálculo de retornos continuos

`retornos=diff(log(precios));` *calcula los retoños como  $\ln(p1)-\ln(p0)=\ln(p1/p0)$*

##### Cálculo de retornos simples bucle

`retornossloop=zeros(obs-1,act);` *define una matriz con tantas columnas como activos y una fila menos que el número de precios*

`for i=1:obs-1;`

`for j=1:act;`

`retornossloop(i,j)=((precios(i+1,j)/precios(i,j))-1);` *calcula los retornos de forma simple  $(p1/p0)-1$*

```
end
end
```

### **Cálculo de diferencias en retornos simples y continuos**

difs=retornosloop-retornos; *calcula las diferencias entre los retornos calculados de forma simple y de forma logarítmica*

```
if g==1
figure(2)
for i=1:act
plot(difs2(:,i),'w.','MarkerEdgeColor','k','MarkerFaceColor','k'), hold on; realiza gráfica en 2D con un punto por cada diferencia calculada.
end
hold off
axis tight
title('Diferencias entre retornos simples y continuos')
xlabel('Días')
ylabel('Diferencias')
end
```

## **PARTE 2.2.**

### **Momentos estadísticos de los retornos muestra completa**

media=mean(retornos); *calcula el retorno promedio*  
desviacion=std(retornos); *calcula la desviación de los retornos*  
sesgo=skewness(retornos); *calcula el sesgo de los retornos*  
curtosis=kurtosis(retornos); *calcula la curtosis de los retornos*  
estadisticas=[media;desviacion;sesgo;curtosis] *presenta las estadísticas en una tabla.*  
correlaciones=corr(retornos); *calcula la matriz de correlaciones muestra completa*

## **PARTE 2.3.**

### **Momentos estadísticos móviles**

vp=125; *ventana de 6 meses*  
vm=250; *ventana de 1 año*  
vg=500; *ventana de 2 años*

### **Matrices vacías para medias móviles**

mp=zeros(obs-1,act); *medias móviles 6 meses*  
mm=zeros(obs-1,act); *medias móviles 1 año*  
mg=zeros(obs-1,act); *medias móviles 2 años*

### **Matrices vacías para desviaciones estándar móviles**



```

dp=zeros(obs-1,act); desviaciones móviles 6 meses
dm=zeros(obs-1,act); desviaciones móviles 1 año
dg=zeros(obs-1,act); desviaciones móviles 2 años

```

### Matrices vacías para correlaciones en tres dimensiones

```

cp=zeros(act,act,obs-1); correlaciones móviles 6 meses
cm=zeros(act,act,obs-1); correlaciones móviles 1 año
cg=zeros(act,act,obs-1); correlaciones móviles 2 años

```

### Matrices vacías para correlaciones en dos dimensiones

```

cppl=zeros(obs-1,c);
cmpl=zeros(obs-1,c);
cgpl=zeros(obs-1,c);

```

### Ventana 6 meses

```

for i=1:obs-1-vp
for j=1:act
mp(i+vp,j)=mean(retornos(i:i+vp,j)); calcula la media
dp(i+vp,j)=std(retornos(i:i+vp,j)); calcula la desviación estándar
end
end

for i=1:obs-vp-1
cp(:,i+vp)=corr(retornos(i:i+vp,:));
end

```

### Ventana 1 año

```

for i=1:obs-1-vm;
for j=1:act;
mm(i+vm,j)=mean(retornos(i:i+vm,j));
dm(i+vm,j)=std(retornos(i:i+vm,j));
end
end

for i=1:obs-vm-1;
cm(:,i+vm)=corr(retornos(i:i+vm,:));
end

```

### Ventana 2 años

```

for i=1:obs-1-vg;
for j=1:act;
mg(i+vg,j)=mean(retornos(i:i+vg,j));
dg(i+vg,j)=std(retornos(i:i+vg,j));
end
end

```

```

for i=1:obs-vg-1;
    cg(:,i+vg)=corr(retornos(i:i+vg,:));
end

```

## PARTE 2.4.

### Prueba de normalidad Jarque – Bera (1980)

```

h=zeros(1,act); matriz para el resultado de la prueba
p=zeros(1,act); matriz para el valor p
jb=zeros(1,act); matriz para la estadística JB
vc=zeros(1,act); matriz para el valor crítico
for i=1:act
    [h(i),p(i),jb(i),vc(i)]=jbtest(retornos(:,i),0.05);
end

```

## PARTE 3

### PARTE 3.2.2.1

#### Pruebas de caminata aleatoria 1 (Campbell, Lo y Mackinlay)

##### Prueba de secuencias y cambios de dirección

```

hits=retornos>0; es una matriz lógica con valor 1 si es cierto o 0 si es falso
secuencias=zeros(obs-2,act);
for i=1:obs-2;
    for j=1:act;
        secuencias(i,j)=(hits(i,j)*hits(i+1,j))+((1-hits(i,j))*(1-hits(i+1,j)));
    end
end
Ns=sum(secuencias);
Nr=(ones(1,act)*(obs-2))-Ns;
CJ=Ns./Nr;
mu=0; aquí se indica el valor de la media que se asume en el proceso
pri=normcdf(mu); este es el valor estimado de pi
prisubs=(pri^2)+((1-pri)^2); este es el estimador de la probabilidad de una secuencia
varCJ=(prisubs*(1-prisubs)+2*(pri^3+(1-pri)^3-prisubs^2))/((obs-2)*((1-prisubs)^4)); esta es la varianza del estimador Cowles - Jones
desvCJ=sqrt(varCJ); esta es la desviación estándar del estimador Cowles - Jones

```

**PARTE 3.2.2.2****Prueba de corridas muestra completa**

$N1 = \text{sum}(\text{hits})$ ; *indica cuántos unos hay en el hit sequence*  
 $N = ((\text{obs}-1) * \text{ones}(1, \text{act}))$ ;  
 $N0 = N - N1$ ; *indica cuántos ceros hay en el hit sequence*  
 $\text{pesperada} = 0.5$ ; *indica la probabilidad de ocurrencia esperada para un uno en el hit sequence*

**Prueba de independencia muestra completa**

$\text{ind} = \text{zeros}(\text{obs}-2, 4, \text{act})$ ; *matriz tridimensional. Contendrá cuatro secuencias de unos y ceros para cada activo. La primera es uno si dos datos consecutivos en el hit sequence son cero (dos retornos negativos seguidos). La segunda indica si después de un retorno negativo hay un retorno positivo, la tercera indica si después de un retorno negativo hay uno positivo y la cuarta indica si hay dos retornos positivos consecutivos.*

```

for i=1:obs-2;
for j=1:act;
if hits(i,j)==0 && hits(i+1,j)==0;
ind(i,1,j)=1;
elseif hits(i,j)==0 && hits(i+1,j)==1;
ind(i,2,j)=1;
elseif hits(i,j)==1 && hits(i+1,j)==0;
ind(i,3,j)=1;
elseif hits(i,j)==1 && hits(i+1,j)==1;
ind(i,4,j)=1;
end
end
end
N00=zeros(1,act);
N01=zeros(1,act);
N10=zeros(1,act);
N11=zeros(1,act);
N0=N00+N01;
N1=N10+N11;
N=N0+N1;

```

**PARTE 3.2.4****PARTE 3.2.4.1****Funciones de autocorrelación**

```

acf=zeros(31,act);

```

```

for i=1:act
    acf(:,i)=autocorr(retornos(:,i),30);
end

acfcuadrados=zeros(31,act);
for i=1:act
    acfcuadrados(:,i)=autocorr(retornoscuadrados(:,i),30);
end

```

### PARTE 3.2.4.2

#### Prueba Ljung Box H0 autocorrelaciones de los retornos = 0

```

lags=[5 9 10 15 20 25 30]';
l=size(lags,1);
h=zeros(l,act);
p=zeros(l,act);
q=zeros(l,act);
cv=zeros(l,act);
for i=1:act
    for j=1:l
        [h(j,i),p(j,i),q(j,i),cv(j,i)]=lbqtest(retornos(:,i),lags(j),0.05);
    end
end

```

#### Prueba Ljung Box H0 autocorrelaciones de los retornos al cuadrado = 0

```

for i=1:act
    for j=1:l
        [h(j,i),p(j,i),q(j,i),cv(j,i)]=lbqtest(retornoscuadrados(:,i),lags(j),0.05);
    end
end

```

### PARTE 3.2.4.3

#### Autocorrelaciones ventanas móviles

retrasos=5; *determina el número máximo de retrasos que se van a evaluar*  
 acfmovil=zeros(retrasos+1,act,obs-vm-1); *crea una matriz de tres dimensiones para guardar cada una de las matrices de autocorrelaciones para cada ventana de datos analizada.*

```

ACF=zeros(retrasos+1,act);
lagss=zeros(retrasos+1,act);
intervalo=zeros(1,2);
for i=1:act

```

[ACF(:,i) lagss(:,i) intervalo(1,:)] = autocorr(retornos(:,i),retrasos); *esto se utiliza para encontrar el intervalo que define si la variable es estadísticamente igual a cero con el 95% de confianza.*

end

for i=1:obs-vm-1;

for j=1:act;

acfmovil(:,j,i) = autocorr(retornos(i:i+vm-1,j),retrasos);

end

end

acfmovilcuadrados = zeros(retrasos+1,act,obs-vm-1);

ACF = zeros(retrasos+1,act);

lagss = zeros(retrasos+1,act);

intervalo = zeros(1,2);

for i=1:act

[ACF(:,i) lagss(:,i) intervalo(1,:)] = autocorr(retornos(:,i),retrasos); *esto se utiliza para encontrar el intervalo que define si la variable es estadísticamente igual a cero con el 95% de confianza.*

end

for i=1:obs-vm-1;

for j=1:act

acfmovilcuadrados(:,j,i) = autocorr(retornoscuadrados(i:i+vm-1,j),retrasos);

end

end