

# Metodología e interpretación del coeficiente de Hurst<sup>1</sup>

**Diego Luengas Domínguez\*,  
Esperanza Ardila Romero,  
John Freddy Moreno Trujillo**

---

*Diego Luengas  
Docente  
Universidad Externado de Colombia.  
Magíster en finanzas.  
diego.luengas@uexternado.edu.co*

*Esperanza Ardila  
Docente  
Universidad Externado de Colombia.  
Magíster en finanzas.  
esperanza.ardila@uexternado.edu.co*

*John Freddy Moreno  
Docente investigador  
Universidad Externado de Colombia.  
Magíster en matemática aplicada.  
Estudios de doctorado en economía y estadística,  
Universidad del Rosario y Universidad Nacional de Colombia.  
john.moreno@uexternado.edu.co*

---

1 Este artículo es parte del trabajo desarrollado por Esperanza Ardila y Diego Luengas para optar por el título de magíster en finanzas en la Universidad Externado de Colombia.

\* Artículo recibido el 23 de septiembre de 2010. Aceptado el 14 de diciembre de 2010.



## Introducción

Comúnmente los modelos se desarrollan con base en datos históricos, asumiendo que en el futuro éstos seguirán comportándose de una forma similar, situación en la que los modelos financieros no son la excepción. La modelación de carácter estocástico en el campo de las finanzas ha evolucionado desde los estudios publicados por Louis Jean-Baptiste Alphonse Bachelier en 1900<sup>2</sup> (Ver [1]), los cuales posteriormente fueron retomados, analizados y generalizados por muchos otros autores.

La obra de Bachelier es el inicio del análisis moderno de los mercados financieros, pero originalmente no tuvo mucha trascendencia, debido a que el modelo propuesto permitía la existencia de precios negativos. A pesar de esto, se debe reconocer y resaltar en el trabajo de Bachelier el planteamiento de la hipótesis del paseo aleatorio, en la que las variaciones de los precios financieros en un instante determinado son estocásticas, de incrementos independientes y se distribuyen de acuerdo con un modelo gaussiano o normal.

Pero... *las intuiciones de Bachelier permanecieron mucho tiempo en*

*el olvido, hasta la gran quiebra de 1929, catástrofe que sirvió de acicate para que muchos economistas empezaran a intentar comprender los mercados financieros...* (tomado de Sierra J. Guillermo, ver [14]).

A pesar de esto,... *el nombre de Bachelier no volvería a la escena económica hasta 1956, esta vez como precursor reconocido en una tesis sobre los precios de las opciones, obra de un discípulo de Paul A. Samuelson...* (tomado de Sierra J. Guillermo, ver [14]).

En las décadas siguientes continuaban creciendo los aportes y la importancia de la matemática financiera, y en los años 70 Fisher Black y Myron Scholes (ver [4]), obtienen una fórmula para la determinación de los precios de opciones de tipo europeo cuando el subyacente no paga dividendos a partir de la construcción de una cartera hipotética de replicación, en la cual el riesgo de los activos que la conforman (acciones y opciones) se neutraliza y su rendimiento es equivalente al de un activo libre de riesgo. Esta fórmula es extendida posteriormente por Robert Merton (ver [9]), quien considera el caso de activos subyacentes que pagan dividendos y el caso en el que el precio del subyacente presenta saltos.

---

2 La tesis doctoral de Bachelier titulada: *Théorie de la Spéculation* es un trabajo pionero en el estudio de matemáticas financieras y los procesos estocásticos, siendo el primero en modelar el movimiento browniano y aplicarlo a la modelación financiera.

La fórmula desarrollada por Black, Scholes y Merton es construida a partir de conceptos como movimiento browniano geométrico, martingala y la integral estocástica de Itô, y desde su aparición produjo un impresionante auge en el uso de los derivados financieros, para diseñar estrategias de negociación que permiten protegerse del riesgo o especular con este tipo de activos en los mercados modernos, y aunque ha sido reconocida como una herramienta matemática capaz de generar rápidamente millones de dólares de rendimientos, también es culpada de grandes pérdidas en pequeños períodos de tiempo.

## Movimiento browniano y browniano fraccional

Como se expuso en los párrafos anteriores, el movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados para describir la evolución de una serie temporal de tipo financiero, considerando que la serie es una realización de este tipo de proceso estocástico. El movimiento browniano estándar  $\{B(t); t \geq 0\}$ , es un proceso estocástico con trayectorias continuas, que satisface:

1.  $B(0) = 0$ .

2. Los incrementos  $B(t) - B(s)$  para  $t > s$ , son independientes del comportamiento pasado, es decir, son independientes de  $B(u)$  con  $0 \leq u \leq s$ .

3. Los incrementos  $B(t) - B(s)$  para  $t > s$  tiene distribución normal con media 0 y varianza  $t - s$ .

Aunque el movimiento browniano apareció asociado a los precios de una acción por primera vez en la tesis de Bachelier, cobró mayor importancia cuando el premio Nobel en economía Paul A. Samuelson, basándose en la idea de trabajar con los logaritmos de los precios, propuso el movimiento *browniano geométrico o económico* en el cual los logaritmos de los precios son los que siguen un movimiento browniano con tendencia, y se caracterizan por:

- Incrementos estacionarios e independientes.

- La varianza en intervalos de duración constante está equidistribuida.

- La distribución de sus incrementos es gaussiana o normal.

- Siguen trayectorias continuas.

A pesar de que el movimiento browniano es uno de los modelos más utilizados en la descripción del comportamiento de datos financieros, éstos no necesariamente se ajustan a los supuestos que dicho modelo implica, es decir, los mercados no siempre son gaussianos, completos, eficientes y libres de arbitraje. Se pueden señalar algunas de las características de los datos financieros que en general no se ajustan al movimiento browniano:

- **No-estacionariedad.** La volatilidad de las series no es constante en

el tiempo, se ven períodos de baja volatilidad seguidos de períodos de alta volatilidad, o viceversa.

– **Dependencia a largo plazo.** En general los datos financieros presentan cierta relación que no desaparece sino muy lentamente.

– **Colas pesadas.** Las distribuciones de la variación de los datos financieros suelen ser leptocúrticas.

– **Discontinuidad en los comportamientos.** La sensibilidad de los mercados financieros a todo tipo de información, los vuelve muy volátiles, haciendo que se presenten saltos.

Entonces, y a pesar del fácil manejo que ha demostrado tener el movimiento browniano, lo que ha propiciado el desarrollo de muchos instrumentos y teorías útiles, aplicados hoy en los mercados financieros, éste no es una buena representación de la realidad.

Tratando de dar solución a estos problemas surgen otras corrientes para la modelación de los mercados financieros, como por ejemplo los modelos ARCH/GARCH y sus posteriores extensiones, que introducidos por Engle en 1982 y Bollerslev en 1986, son modelos gaussianos no lineales que incluyen el fenómeno de las colas pesadas y la concentración de la varianza.

No obstante, este tipo de modelos no están exentos de problemas, ya que están condicionados a varianzas constantes, estacionariedad y escala

temporal única (el investigador debe decidir una escala temporal adecuada, buscando una variable que ayude a explicar la volatilidad).

Adicional a lo anterior estos modelos no representan totalmente la dependencia de largo plazo, lo que el matemático polonés Benoit Mandelbrot denomina *memoria a largo plazo*. En los años sesenta Mandelbrot (Ver [2]) introduce un modelo que denomina *multifractal* basado en el movimiento browniano fraccional y los procesos estocásticos multifractales.

El movimiento browniano fraccional es un proceso gaussiano obtenido mediante una transformación de la integral estocástica del movimiento browniano unidimensional. Fue considerado por primera vez por el matemático ruso Andréi Nikoláyevich Kolmogórov 1940 y por Mandelbrot en 1965, posteriormente fue desarrollado y analizado en profundidad por Mandelbrot y Van Ness en 1968.

Un movimiento browniano fraccional de índice  $H$ ,  $\{B_H(t); t \geq 0\}$  donde  $0 \leq H \leq 1$ , es un proceso estocástico que satisface:

1.  $B_H(0) = 0$

2.  $E[B_H(t)] = 0$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

3. La covarianza del proceso para dos instantes  $s, t \in \mathbb{R}$  está dada por la expresión:

$$C_H(t, s) = E[B_H(s)B_H(t)] = \frac{1}{2} [|s|^{2H} + |t|^{2H} - |s - t|^{2H}]$$

El índice  $H$  es llamado parámetro de Hurst, debido al científico británico Harold Edwin Hurst (1880-1978), y resulta ser una medida de la independencia de las series de tiempo y una forma de distinguir series fractales.

Es importante observar que el movimiento browniano estándar puede obtenerse del movimiento browniano fraccional si  $H = \frac{1}{2}$ , ya que en este caso particular se tiene la misma función de covarianza.

Este movimiento presenta una varianza cíclica no periódica en todas las escalas temporales, y tiene en cuenta la dependencia estadística a largo plazo, además de tener dos características típicas de los conjuntos fractales que le confieren una mayor variabilidad de comportamientos:

1. *La autoafinidad o autosimilaridad estadística.* Cuando se reduce la escala temporal para representar trayectorias del proceso, la apariencia de la serie es semejante a la de la serie en la escala original.

2. *El valor no entero de la dimensión.* Permite caracterizar el proceso al tener en cuenta que la dimensión está relacionada con las variaciones que se experimentan entre puntos próximos, de tal forma que cuanto mayor es el

valor de la dimensión mayor será la variación.

De acuerdo con esto, si una serie temporal tiene la propiedad de una alta dependencia, su modelación debería hacerse mediante movimientos brownianos fraccionales, que a diferencia del movimiento browniano tradicional, incorpora las características de independencia o dependencia propias de las series financieras, partiendo de prácticamente los mismos supuestos de los modelos desarrollados con el movimiento browniano tradicional.

## Series fractales y coeficiente de Hurst

Para diferenciar las series fractales se utiliza el análisis de rango reescalado  $(R/S)_n$ , que se explicará a continuación, y será utilizado para determinar el coeficiente Hurst ( $H$ ) asociado a una serie temporal.

Como una extensión del resultado de Albert Einstein (ver [7]) sobre movimiento browniano, el cual establece que la distancia cubierta por una partícula errática suspendida en un fluido se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo<sup>3</sup>, Hurst (ver[6]) desarrolló la

3 Si  $R$  denota la distancia cubierta por la partícula y  $T$  al tiempo, la fórmula de Einstein es  $R = \sqrt{T}$ , la cual es aplicada en finanzas para modelar el supuesto de que la dispersión de los rendimientos se incrementa con la raíz cuadrada del tiempo.

siguiente fórmula, aplicable a series de tiempo que no necesariamente sean movimientos brownianos.

$$(R/S)n = cn^H \quad (1)$$

donde :

–  $(R/S)$ : es la notación utilizada para el estadístico rango reescalado.

–  $c$ : es una constante de proporcionalidad.

–  $n$ : es el número de datos por intervalo.

–  $H$ : es el coeficiente de Hurst.

Es importante aclarar que  $(R/S)$  es un estadístico con media cero, expresado en términos de desviación estándar y cuyo análisis es de tipo no paramétrico, ya que no se requiere de una distribución específica.

El punto clave en este análisis es la determinación del coeficiente de Hurst. A continuación se describe la metodología utilizada para su cálculo:

1. Con la serie en el orden original, se genera la serie de retornos tomando las diferencias logarítmicas de los datos.

2. Se divide la serie de retornos en intervalos de igual número de datos, el número de intervalos lo llamaremos en adelante particiones, de tal forma que el número de particiones por el número de datos en el intervalo sea

igual al tamaño de la serie de retornos. Al variar el número de particiones se obtiene cada vez la serie dividida en intervalos de igual número de datos, si la serie tiene características autoafines, sin importar el tamaño de los intervalos, debe conservar las mismas características.

3. En cada partición, para cada uno de los intervalos:

a. Se halla la media y la desviación estándar.

b. Se determina la variación de cada dato con respecto a la media, y se van acumulando estas diferencias.

c. Se establece el rango restando del dato mayor el menor.

d. Se divide el rango por la desviación estándar, obteniendo el rango estandarizado.

Este proceso se ilustra con el siguiente ejemplo hipotético basado en el estudio realizado por Hurst en el río Nilo<sup>4</sup>.

En la columna 1 de la Tabla que se muestra a continuación aparecen los incrementos en la cantidad de agua en una presa para seis períodos consecutivos, en unidades adecuadas. Para este ejemplo se asume que la media es 1 y que la desviación estándar es 4,86.

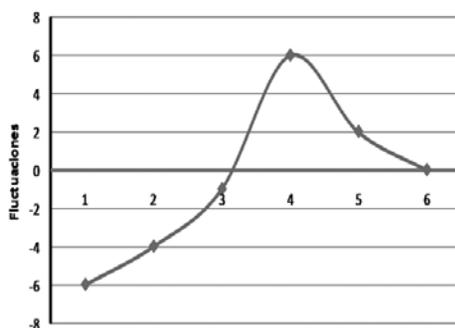
4 El nuevo método estadístico que inventó Hurst es el Rescaled Range Analysis o análisis  $R/S$ , corresponde a una medida de varianza, este proceso es descrito en detalle en el libro: *Long-Term Storage: An Experimental Study* (1965).

Se calcula la diferencia entre cada dato y la media (columna 2 de la Tabla) y se van acumulando las diferencias de los datos, como se observa en la columna 3. El primer dato corresponde a la primera diferencia, el segundo dato a la suma de las dos primeras diferencias y así sucesivamente.

Dato	Distancia del dato a la media	Distancia acumulada
-5	-6	-6
3	2	-4
4	3	-1
8	7	6
-3	-4	2
-1	2	0

La Figura 1. muestra el intervalo de fluctuación de las diferencias acumuladas en los seis períodos.

Figura 1



El Rango:  $6 - (-6) = 12$ , indica el intervalo en el cual varían las diferencias

acumuladas, esta distancia puede observarse en la Figura 1.

El rango estandarizado del intervalo es:

$$\frac{12}{4,86} = 2,47$$

4. Se halla el promedio de los rangos estandarizados, obteniendo el rango reescalado en cada partición.

5. Por propiedades de los logaritmos se tiene que:

$$(R/S)n = cn^H \quad (2)$$

$$\ln(R/S)n = \ln(cn^H) \quad (3)$$

$$\ln((R/S)n) = \ln(c) + H\ln(n) \quad (4)$$

Con la expresión loglineal determinada por el logaritmo del rango reescalado de todas las particiones que son posibles y el logaritmo del número de datos para cada partición (última de las ecuaciones anteriores), se realiza una regresión para establecer el coeficiente Hurst ( $H$ ), que corresponde a la pendiente de la recta de regresión. En esta ecuación  $c$  representa una constante de proporcionalidad relacionada con el factor de escala.

### Características del coeficiente Hurst

El valor del coeficiente Hurst estará en el intervalo  $[0,1]$ , hecho que se demuestra a partir de las definiciones y teoremas que se presentan a conti-

nuación, y según el valor que tome el coeficiente en el intervalo es posible determinar algunas características particulares del proceso al que corresponde dicho coeficiente.

Los teoremas que se presentan a continuación son tomados de Makoto Maejima (ver [8]) y son enunciados sin demostración. Para la demostración de los mismos y mayor información sobre procesos autosimilares invitamos al lector a referirse a esta fuente.

**Definición 1:** un proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$  se dice que es autosimilar si para cualquier  $a > 0$ , existe  $b > 0$  tal que

$$\{X(at)\} = \{bX(t)\} \tag{5}$$

donde la igualdad es en distribución para todas las distribuciones de dimensión finita del proceso.

**Definición 2:** un proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$  se dice estocásticamente continuo en  $t$ , si para cualquier  $\epsilon > 0$  se tiene que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} P [|X(t+h) - X(t)| > \epsilon] = 0 \tag{6}$$

**Definición 3:** un proceso estocástico  $\{X(t); t \geq 0\}$ , es llamado trivial si para cada  $t \geq 0$ ,  $P [X(t) = constante] = 1$ . En otro caso es llamado no trivial.

**Teorema 1:** si  $\{X(t); t \geq 0\}$  es no trivial, estocásticamente continuo en  $t=0$  y autosimilar, entonces existe un único exponente  $H > 0$  tal que  $b = a^H$ . Más  $H > 0$  si y solo si  $X(0) = 0$ , casi seguramente.

En adelante el hecho de que un proceso  $\{X(t); t \geq 0\}$  sea autosimilar, con incrementos estacionarios y de exponente  $H$ , será denotado diciendo que el proceso es  $H - ss$  para simplificar.

**Teorema 2:** sea  $\{X(t); t \geq 0\}$  un proceso no trivial y  $H - ss$  tal que  $E[|X(1)|^2] < \infty$ , entonces:

$$\begin{aligned} E[|X(t)X(s)|] &= \frac{1}{2}\{t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}\} \\ E[|X(1)|^2] & \tag{7} \end{aligned}$$

**Teorema 3:** Sea  $\{X(t); t \geq 0\}$  un proceso no trivial y  $H - ss$ . Si  $H > 0$ ,

1. si  $E[|X(1)|^\gamma] < \infty$ , para algún  $\gamma < 1$ , entonces  $H < \frac{1}{\gamma}$ .
2. si  $E[|X(1)|] < \infty$ , entonces  $H \leq 1$ .
3. si  $E[|X(1)|] < \infty$ , y  $0 < H < 1$ , entonces  $E[X(t)] = 0$ .
4. si  $E[|X(1)|] < \infty$ , y  $H = 1$ , entonces  $X(t) = tX(1)$ .

Sea  $\{X(t); t \geq 0\}$  es un proceso no trivial y  $H - ss$  con  $0 < H < 1$  y  $E[|X(1)|^2] < \infty$ . Definimos:

$$\xi(n) = X(n+1) - X(n) \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

$$r(n) = E[\xi(0)\xi(n)] \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9)$$

entonces:

$$r(n) \begin{cases} \sim H(2H-1)n^{2H-2}E[|X(1)|^2] & \text{cuando } n \rightarrow \infty, \text{ si } H \neq \frac{1}{2} \\ = 0 & \text{cuando } n \geq 1 \text{ si } H = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (10)$$

donde la notación  $a_n \sim b_n$  cuando  $n \rightarrow \infty$ , representa que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ . Este último resultado se puede deducir de los teoremas anteriores como sigue.

Del teorema 1 se tiene que  $X(0) = 0$  casi seguramente, y del teorema 2 se tiene que para  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned} r(n) &= E[\xi(0)\xi(n)] \\ &= E[(X(1) - X(0))(X(n+1) - X(n))] \\ &= E[X(1)(X(n+1) - X(n))] \\ &= E[X(1)X(n+1)] - E[X(1)X(n)] \\ &= \frac{1}{2} \{ (n+1)^{2H} - 2n^{2H} + n^{2H} \} E[|X(1)|^2] \end{aligned}$$

lo que implica el resultado.

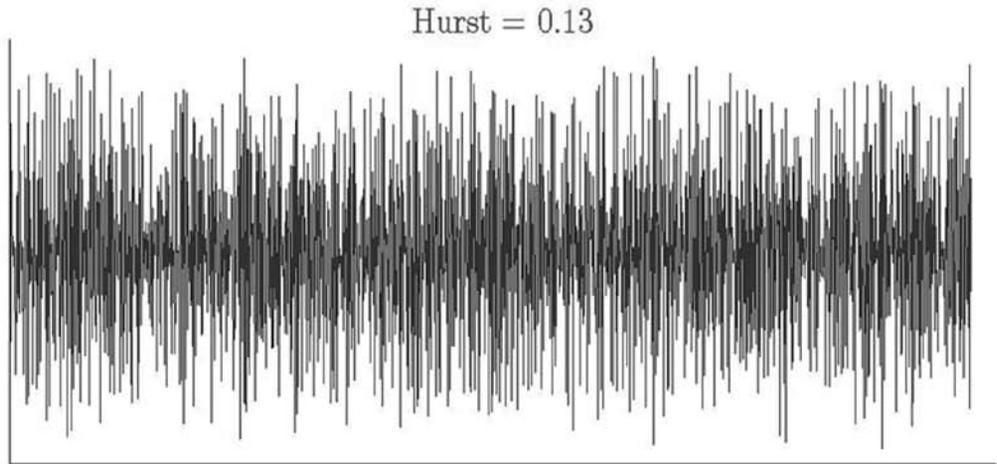
De los resultados anteriores se tiene que:

1. Si  $0 \leq H < \frac{1}{2}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |r_n| < \infty$ , correlación negativa.

Si  $0 \leq H < \frac{1}{2}$  se tienen series antipersistentes, a las que con frecuencia se les denomina con reversión a la media. Es decir, si la serie ha estado arriba de un determinado valor que hace las veces de media de largo plazo en el período anterior, es más probable que esté abajo en el período siguiente y

viceversa. Se considera que esta serie tiene ruido rosa, que es común en la naturaleza y está relacionado con procesos de relajación (equilibrio dinámico) y turbulencia. La Figura 2 ilustra este tipo de comportamiento para una serie hipotética con  $H = 0.13$ .

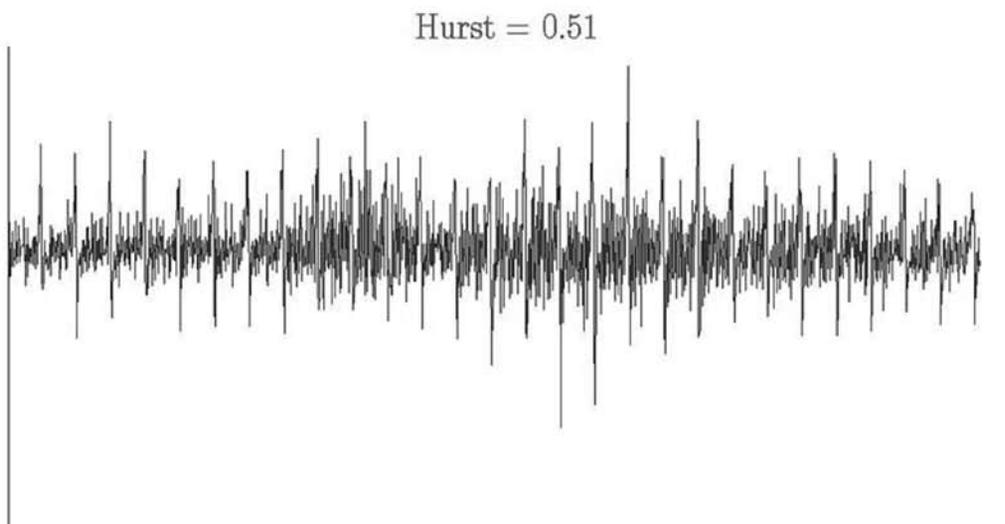
Figura 2. Serie antipersistente



2. Si  $H = \frac{1}{2}$ ,  $\{\xi(n)\}$  es no correlacionado.

Si  $H = 0.5$  los datos son independientes y decimos que no hay memoria. Se trata de una serie aleatoria que cumple con todas las características del movimiento browniano estándar, y se dice que tiene ruido blanco. La Figura 3 ilustra este tipo de comportamiento para una serie hipotética con  $H = 0.51$ .

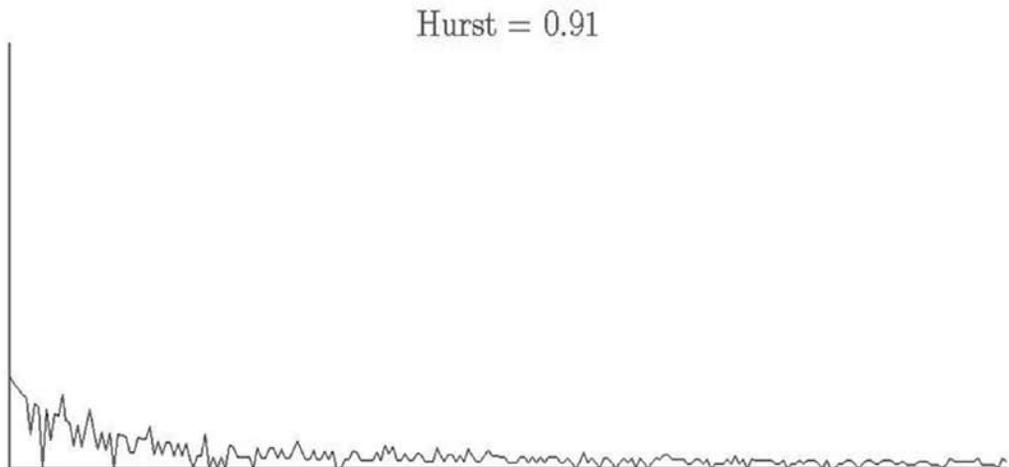
Figura 3. Serie sin memoria



3. Si  $\frac{1}{2} < H \leq 1$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |r_n| = \infty$ , correlación positiva.

Si  $0.5 < H \leq 1$ , la serie es persistente, refuerza la tendencia. Es decir, si la serie estaba arriba (o abajo) de su media de largo plazo en el período anterior, lo más probable es que continúe arriba (o abajo) en el período siguiente. Si  $H = 1$  la serie es determinística. En este intervalo el color de ruido es negro y aparece en procesos cíclicos de largo plazo, como el nivel de los ríos, el número de manchas solares, el cambio de precios de las bolsas de valores, entre otros. La Figura 4 ilustra este tipo de comportamiento para una serie hipotética con  $H = 0,91$ .

Figura 4. Serie persistente



La siguiente sección hace referencia a la dimensión fractal, presentando una explicación más extensa de la propiedad del movimiento browniano fraccional que hace referencia al valor no entero de la dimensión.

### Dimensión fractal ( $D$ )

Es el número que refleja la medida topológica de un conjunto fractal a es-

calas distintas y se puede determinar por diferentes métodos:

– *A partir del exponente Hurst ( $H$ ) como:  $D = 2 - H$ .* En particular esta forma de establecer la dimensión permite que en una gráfica de retornos de cualquier serie pueda visualizarse la dimensión fractal, lo que dará una idea del valor del coeficiente Hurst.

El movimiento browniano tiene una dimensión fractal de 1.5, es de-

cir  $H = 0.5$ . Si  $H > 0.5$  la dimensión fractal disminuirá y la representación gráfica de la serie asociada tenderá a acercarse a una recta, en el caso contrario si  $H < 0.5$  la dimensión fractal aumentará y la representación gráfica se acercará a una superficie.

– *Utilizando recuento por cajas:* surge cuando al estudiar el comportamiento del número mínimo de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a un conjunto se observa que para valores decrecientes de  $\delta$  este número crece proporcionalmente a  $\delta^{-D}$ .

De forma general, si se tiene que  $(X, d)$  es un espacio métrico<sup>5</sup> y  $F \subseteq X$  un compacto no vacío en dicho espacio, y denotando por  $N(\delta, F)$  el número de conjuntos de diámetro  $\delta$  necesarios para recubrir a  $F$ , se define la dimensión por recuento de cajas como:

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\ln(N(\delta, F))}{-\ln(\delta)} \quad (11)$$

En el caso particular de un subconjunto plano (cuya representación se puede contener en un espacio 2 dimensional), se obtiene una definición de dimensión equivalente si consideramos que  $N(\delta, F)$  el número de cuadrados de una  $\delta$ -malla que intersecan al conjunto, lo que hace que el procedimiento para el cálculo empírico de

la dimensión comience por su representación gráfica en un rectángulo. A continuación se consideran sucesiones de la forma  $\delta_k = \frac{B}{2^k}$  y se toman los valores de  $\delta$  comprendidos dentro de un rango de escalas que queda determinado al elegir unos valores mínimos y máximos para  $k$ .

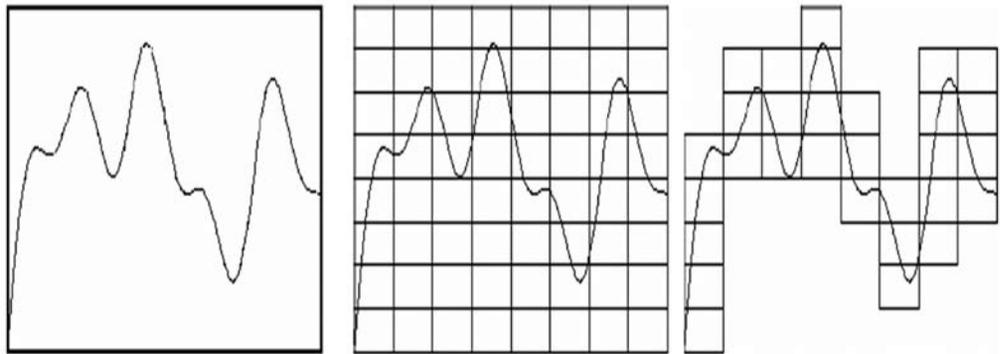
Para cada uno de estos valores se divide el rectángulo en cajas de lado  $\delta$  formando una  $\delta$ -malla sobre la que se cuenta el número de cajas que cortan al conjunto,  $N(\delta, F)$ . Si este conjunto tiene dimensión  $D$ , cuando  $\delta$  tiende a cero el número de cajas de la  $\delta$ -malla que cortan al conjunto crece proporcionalmente a  $\delta^{-D}$ , es decir,  $N(\delta, F) \approx c\delta^{-D}$ , al tomar logaritmos en esta expresión:

$$\ln(N(\delta, F)) \approx \ln(c) - D \ln(\delta) \quad (12)$$

Se puede entonces obtener la dimensión como la pendiente de la recta que aproxima, en el sentido de los mínimos cuadrados, a los pares  $(\ln(\delta), \ln(N(\delta, F)))$ . La siguiente Figura ilustra esta metodológica (La Figura 5, así como la definición de dimensión por recuento de cajas, son tomadas de [10]).

5 Un espacio métrico es un par  $(X, d)$  donde  $X$  es un conjunto no vacío y  $d$  es una función de distancia.

Figura 5. Dimensión por recuento de cajas



Fuente: (Movimiento browniano y geometría fractal: El IBEX 35, Muñoz J.)

En la siguiente sección se presenta la metodología desarrollada en MATLAB para la determinación del coeficiente de Hurst, como aporte de los autores<sup>6</sup> para la caracterización del comportamiento de series financieras colombianas.

## Metodología en MATLAB para el cálculo de coeficiente Hurst

A continuación se describirá la metodología desarrollada en MATLAB para hallar el coeficiente Hurst, en esta descripción se muestra cómo está implementado el programa y las funciones necesarias sin GUI<sup>7</sup>.

Para lograr este objetivo, se ingresa la serie, se calculan los retornos, se halla el rango reescalado, se realiza la regresión y se hace la prueba de comportamiento fractal utilizando el proceso empírico de reordenamiento propuesto por Peters (ver [11]).

Se debe ingresar la serie desde un archivo de Excel, los datos deben encontrarse en la columna A de la hoja 1.

```
datos=xlsread(dirección);
```

Con la ayuda del programa *Cálculo del coeficiente Hurst* se obtienen los retornos logarítmicos:

```
ret=diff(log(datos(:,1)));
```

```
N=size(ret,1);
```

<sup>6</sup> El código que se presenta a continuación fue desarrollado por Esperanza Ardila y Diego Luengas como parte de su tesis de maestría, de la cual el profesor John Moreno es tutor.

<sup>7</sup> GUI-Interface gráfica de usuario de MATLAB.

Para observar el comportamiento de las series se realizan las gráficas de los datos originales y de los retornos, con respecto al tiempo en las unidades en las que se encuentra la serie (días, semanas, etc.). Hay que recordar que entre más datos el cálculo del coeficiente es mejor.

```
grafica_series (tiempo, datos,1:N,ret);
```

En teoría deberían tomarse para cada partición todos los datos, pero debido a que el número de datos correspondiente a los retornos, puede no tener suficientes divisores, se da la opción al usuario de indicar el porcentaje máximo de datos para descartar por partición, el programa descartara los datos de los más antiguos.

```
alfa=input('Indique el porcentaje máximo de datos que se pueden descartar =');
```

Ahora utilizando la función *datos\_reescalados* (ver adelante) se obtiene  $X = \ln(n)$  y  $Y = \ln(R/S)$  que son los logaritmos de las distintas submuestras y del rango reescalado para cada una de ellas.

```
[X,Y,b]=datos_reescalado(N,ret,alfa);
```

Luego usando la función *regresión* (ver adelante) se halla la regresión lineal de  $X$ ,  $Y$  de donde la pendiente de la recta es el coeficiente Hurst.

```
[my,by,ry,R2]=regresión(X,Y);
disp(['El coeficiente de Hurst es = '
num2str(my)])
```

Para ver el resultado anterior gráficamente

```
Gráfica_Regresión(X,Y);
```

Se da la opción de hacer la prueba de si el cálculo del coeficiente es fractal o no con la idea de reordenamiento de Peters (ver [11]) usando la función reordenar.

```
son=menu('Reordenar','Si','No');
if son==1
    r=input('Cuántas veces desea reordenar la serie para verificar el coeficiente Hurst');
    if r~=0
        ordena(1)=my;
        for i=1:r
            ret=reordenar(ret,N);
            [X,Y,b]=datos_reescalado(N,ret,alfa);
            my=regresión(X,Y);
            ordena(i+1)=my;
        end
        disp(' ')
        disp(['El intervalo es: '
        num2str(min(ordena)),
        ...',num2str(max(ordena)),']]);
    end
end
debido a que hacer este reordenamiento y cálculo se torna demorado
```

se dará máximo la opción de hacer 10 reordenamientos.

Por último, se genera un archivo en Excel llamado Analisis.xls en donde se encuentra una tabla con los datos de los procedimientos realizados.

```
salva=(cat(2,b,[X,Y]));
txt = { 'Particiones',
'Submuestras(n)', 'R/S', 'Ln
(n)', 'Ln(R/S)', 'no uso' };
xlswrite('Analisis', txt, 'Rango
Reescalado');
xlswrite('Analisis', salva, 'Rango
Reescalado', 'a2').
```

### **Función rango reescalado**

Para calcular el rango reescalado, utilizando el procedimiento antes explicado, se programa en MATLAB la función *datos\_reescalados*

```
function [X,Y,b]=datos_
reescalado(N,ret,alfa)
```

Se consideran divisores hasta la parte entera de  $N/2$ .

```
k=floor((N/2));
```

Se calcula cuántos datos se pueden dejar de utilizar

```
r=alfa*N;
```

```
while i<k
```

Para realizar la partición

```
P= floor(N/i);
```

Hallar el total de datos que se tomarían de la muestra con la partición  $i$

```
d=P*i;
```

```
tam=N-d;
```

Definir cuándo es relevante el valor de  $n$

```
if tam>r
```

```
i=i+1;
```

Se generan las submuestras de tamaño  $N/i$ , esto es, se divide la base de los retornos en grupos correspondientes a intervalos temporales contiguos de tamaño  $P$  para cada  $i$ .

```
else
```

```
while tam<N
```

```
c=cat(2,c,ret(tam+1:tam+P));
```

```
tam=tam+P;
```

```
end
```

Para cada submuestra se calcula la media y la desviación estándar

```
promedio=mean(c);
```

```
desv=std(c);
```

Luego se calculan las diferencias y las diferencias acumuladas de cada observación con respecto a la media en cada submuestra.

```
X=cumsum(c-medias);
```

Se identifica la máxima y la mínima diferencia acumulada en cada grupo y se genera el rango de cada submuestra.

```
Rango=max(X)-min(X);
```

Se normaliza cada rango dividiéndolo por la desviación típica y el promedio de tales rangos será el valor de  $R/S$  y que junto con el tamaño de la partición ( $P$ ) constituye el par de datos para la regresión

```
Reescalado=Rango./desv;
```

```
dato=mean(Reescalado,2);
```

```
i=i+1;
```

```

        final=(cat(1,final,[size(c,2),dat
o]));
    end
end
Z=floor(N./final(:,1));
b=(cat(2,final,Z));
Calculamos  $Ln(n)$  y  $Ln(R/S)$  así:
X=log(b(:,3));
Y=log(b(:,2)).

```

### La función de regresión

La función de regresión es la regresión típica por el método de mínimos cuadrados

```

function [my,by,ry,smy,sby,R2]=
regresión(X,Y)
n = length(X);
Se calculan las sumas
Sx = sum(X);
Sy = sum(Y);
Sx2 = sum(X.^2);
Sxy = sum(X.*Y);
Sy2 = sum(Y.^2).

```

Y se calcula el numerador y el denominador de las expresiones usadas en la regresión.

```

num = n * Sxy - Sx * Sy;
den = n * Sx2 - Sx^2;
Calcula  $my$ ,  $by$ ,  $ry$ ,  $s2$ ,  $smy$  y  $sby$ 
my = num / den;
by = (Sx2 * Sy - Sx * Sxy) / den;

```

Calcula el coeficiente de correlación

```

ry = num / (sqrt(den) * sqrt(n *
Sy2 - Sy^2));
y = by + my .* X;
diff = Y - y;
s2 = sum(diff .* diff) / (n-2);
smy = sqrt(n * s2 / den);
sby = sqrt(Sx2 * s2 / den).

```

Calcula error cuadrático medio corregido

```
R2=sqrt(sum((diff).^2)/(n-2));
```

### La función reordenar

```

function z=reordenar(v,t)
q=rand(t,1);
o=[];
while sum(q)~=10*t
m=min(q);
r=(q==m);
for i=1:t
if r(i)~=0
b=i;
end
end
q(b)=10;
o=cat(1,o,b);
end
z=v(o).

```

### Cálculo del coeficiente de Hurts para series colombianas

El objetivo de la presente sección es determinar si en las series estudiadas el supuesto de independencia se cum-

ple, para esto se hallará el coeficiente Hurst, con la metodología antes explicada.

Las series objeto de estudio, fuente Banco de la República y DANE, son las siguientes:

1. TRM diaria (3 de enero de 2000-18 de marzo de 2010).

2. M1 semanal y mensual (9 de enero de 1982 - 26 de febrero de 2010).

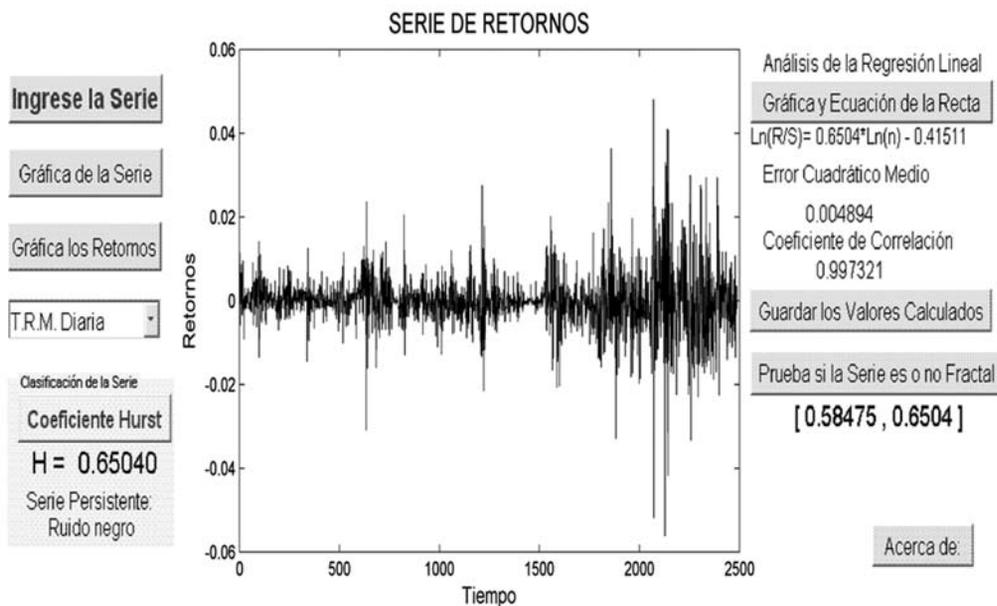
3. M2 mensual (8 de enero de 1984-26 de febrero 2010).

4. M3 semanal (9 de enero 9 de 1982 - 26 de febrero 26 de 2010).

5. IPC mensual (enero de 1954 - febrero de 2010).

Para cada una de las series se presentarán las siguientes gráficas, obtenidas con el programa para el cálculo de coeficiente Hurst:

Figura 6. GUI generado por el programa para el cálculo del coeficiente de Hurst



**Serie de tiempo:** gráfica de los datos de la serie original y la escala de tiempo correspondiente.

**Serie de retornos:** la gráfica representa la serie de retornos, obtenida de la serie original, realizando las diferencias logarítmicas, y el tiempo en la escala correspondiente.

**Regresión lineal:** esta gráfica es el resultado de la regresión realizada para el cálculo del coeficiente Hurst, y en ella se aprecia el diagrama de dispersión, la recta de regresión ajustada y la ecuación de la recta correspondiente. La pendiente de la recta en

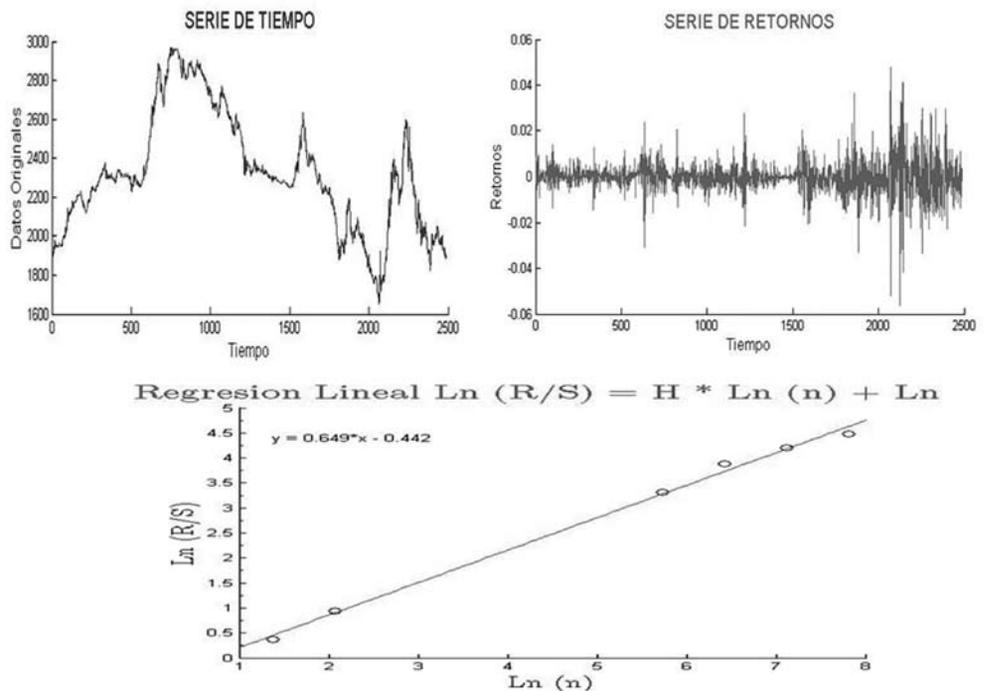
la ecuación corresponde al coeficiente Hurst.

**Prueba si la serie es o no fractal:** utilizando la propuesta de Peters se reordena aleatoriamente la serie de los retornos y se obtiene el intervalo que confirma la tendencia de la serie.

A continuación se realizará la explicación del proceso realizado, utilizando como ejemplo la serie TRM, las demás series se evaluarán de la misma forma.

**1. TRM:** Tasa representativa de mercado-cambio dólar peso.

Figura 7. Análisis para la TRM



En la siguiente Tabla se presentan los valores calculados por el programa para la serie de retornos obtenida con cada partición, tal que:

**Particiones:** consideradas tomando sólo los divisores exactos.

**Submuestras:** indican la cantidad de datos en cada intervalo.

Como resultado de este análisis se tiene que el coeficiente Hurst es 0.65, lo que significa que la TRM colombiana es una serie persistente, tiene ruido negro.

Particiones	Submuestras(n)	(R/S)	$Ln(n)$	$Ln[(R/S)]$
1	2488	87.940	7.819	4.477
2	1244	67.073	7.126	4.206
4	622	48.336	6.433	3.878
8	311	27.623	5.740	3.319
311	8	2.579	2.079	0.947
622	4	1.461	1.386	0.379

Siguiendo la propuesta de Peters (ver [11]), se realizan 10 reordenaciones aleatorias, lo que permite obtener el intervalo de [0.55476, 0.6504] para el valor del coeficiente de Hurst, lo que confirma la persistencia de la serie.

Esto significa que la serie tiene memoria de largo plazo, luego el supuesto de independencia utilizado para las proyecciones no se cumple.

**2. M1:** es uno de los componentes de la oferta monetaria y está conformada por las monedas, el papel moneda y todos los depósitos a la vista. Este es el dinero definido en sentido estricto.

a. M1 semanal 1464 datos.

– El coeficiente de Hurst es = 0,54761.

– El intervalo es: [0.54761, 0.62185].

b. M1 mensual.

– El coeficiente de Hurst es = 0,45692.

– El intervalo es: [0.45692, 0.66989].

Para el caso de la serie mensual el comportamiento es aleatorio según el valor del coeficiente Hurst, mientras que la serie semanal es una serie persistente. Esto muestra que la cantidad de datos en la serie afecta el resultado; teniendo en cuenta la teoría, es más confiable la serie semanal, pues contiene mayor número de datos y refleja mejor el comportamiento.

Figura 8. Análisis para la M1 semanal

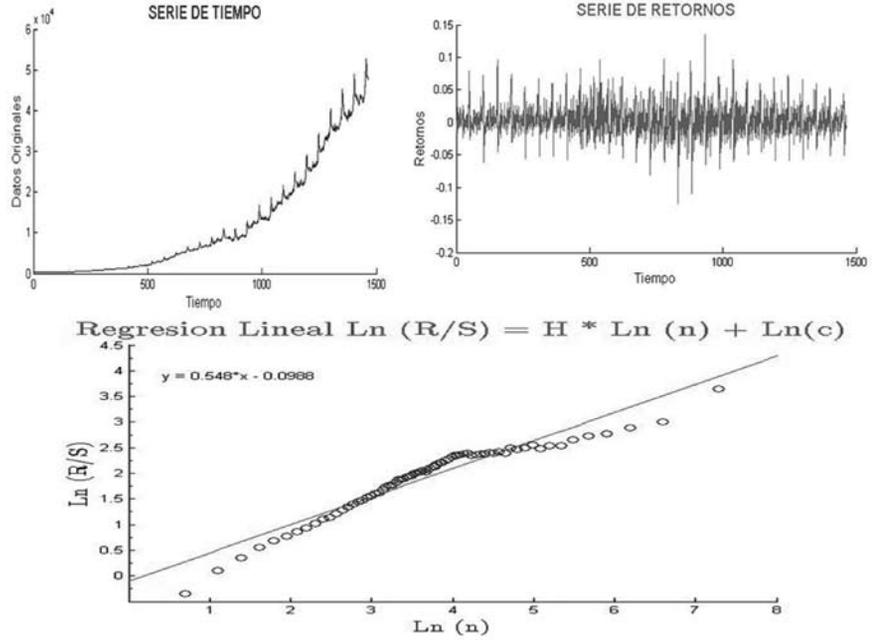
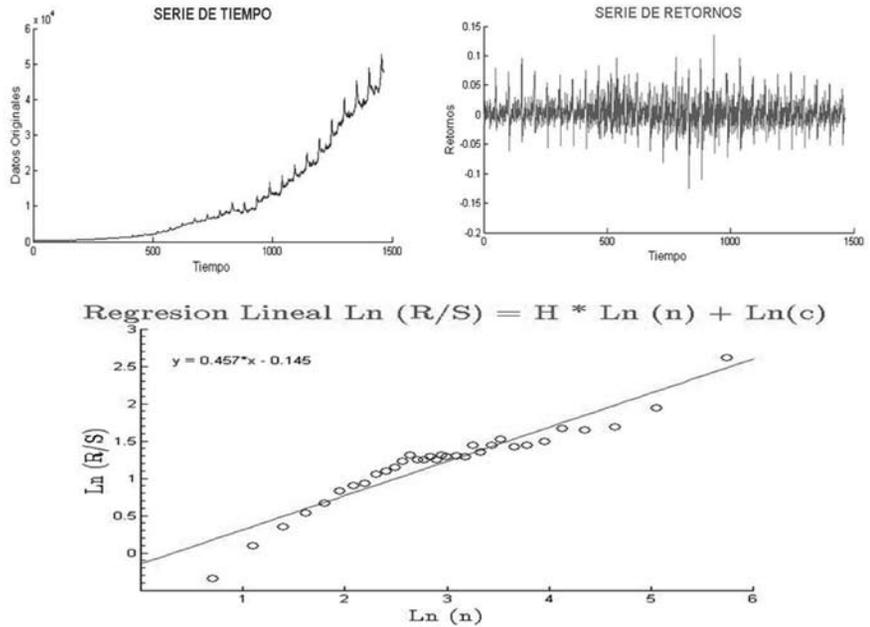


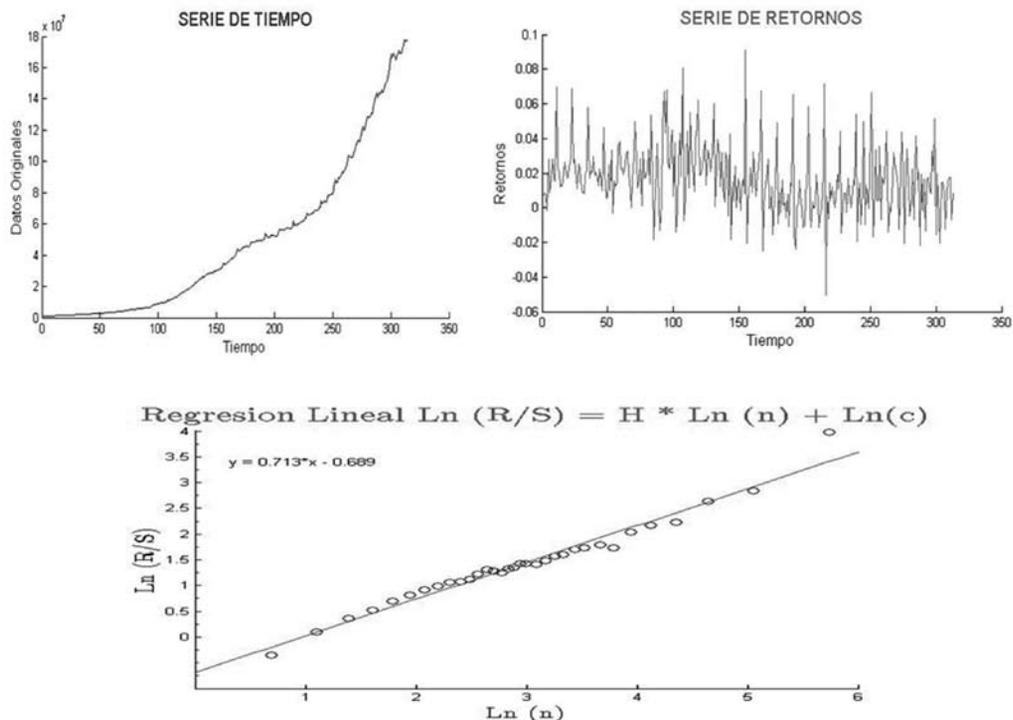
Figura 9 Análisis para la M1 mensual



**3. M2 mensual:** es la oferta monetaria definida en un sentido más amplio: incluye todos los componentes de M1, más algunos activos líquidos o cuasidineros.

- El coeficiente de Hurst es = 0,71317.
- El intervalo es: [0.60825, 0.71317].

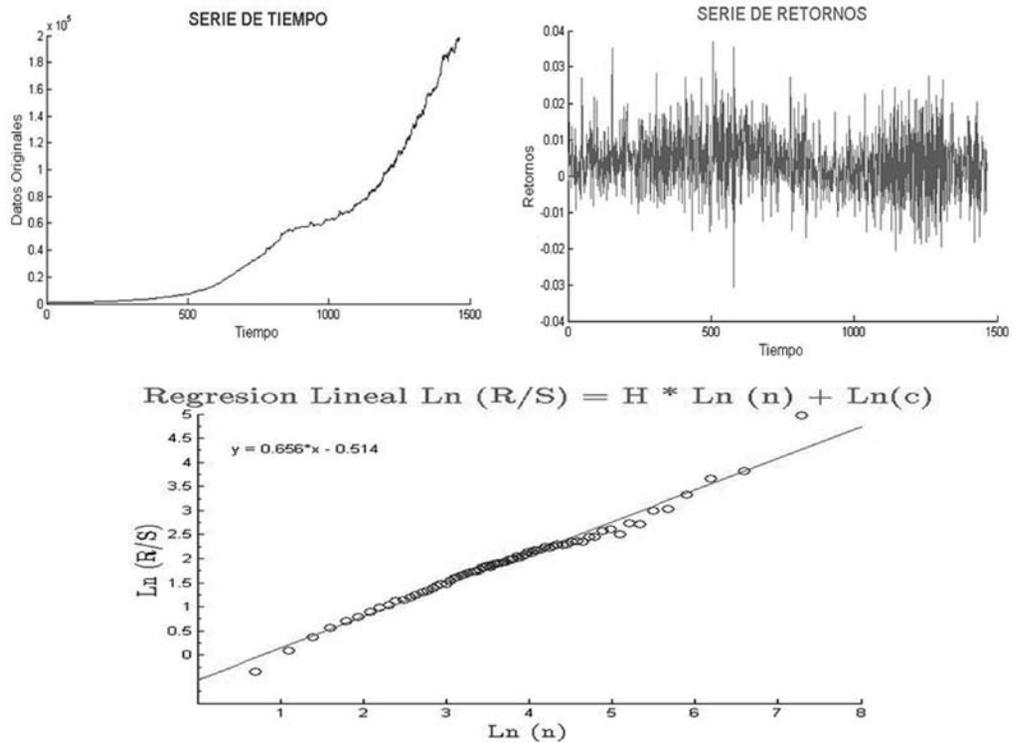
Figura 10. Análisis para la M2 mensual



**4. M3 semanal:** el agregado M3 es una forma de representar la cantidad de dinero en circulación. Como definición amplia de dinero no solo incluye el metálico y las cuentas corrientes, sino otras formas de dinero.

- El coeficiente de Hurst es = 0,65632.
- El intervalo es: [0.53581, 0.65632].

Figura 11. Análisis para la M3 semanal



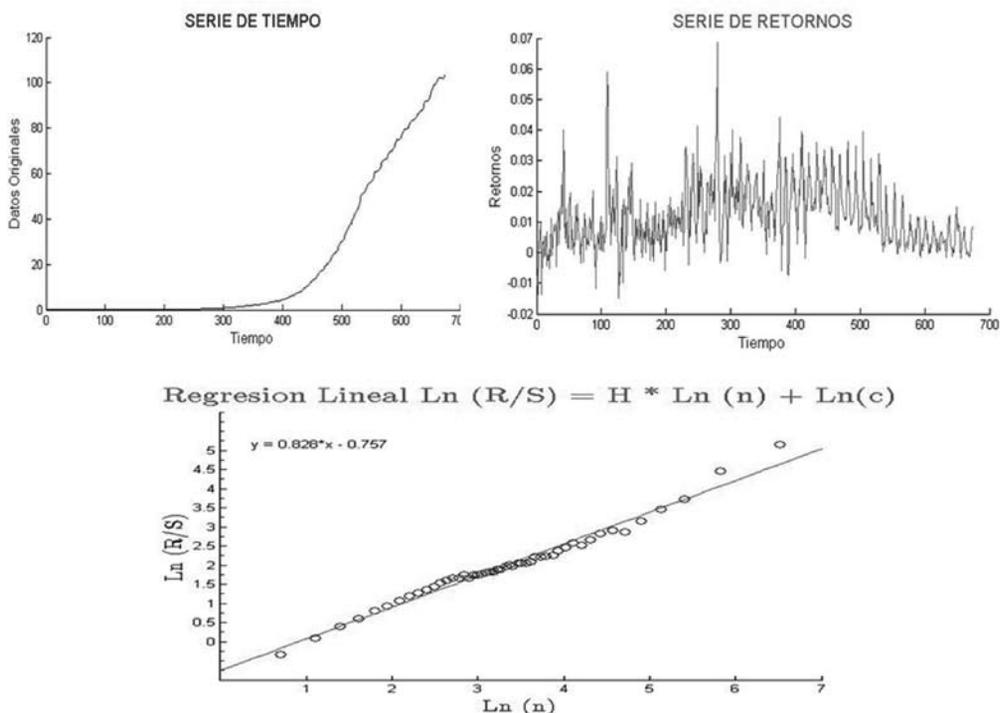
**5. IPC:** hasta diciembre de 1978 corresponde al empalme realizado por el DANE, tomando el promedio ponderado del Índice de Precios al Consumidor de ingresos medios (33%) e ingresos bajos (67%). En adelante se refiere al Índice de Precios al Consumidor Total Nacional Ponderado, publicado por el DANE, el cual ha cambiado de base en tres oportunidades: diciembre de 1988, diciembre de 1998 y la base actual diciembre 2008 = 100.

A partir de enero de 2009, el DANE produce el nuevo IPC con base Diciembre 2008 = 100, el cual incluye un nuevo sistema de ponderaciones y nueva canasta de bienes y servicios.

- El coeficiente de Hurst es = 0,82799

- El intervalo es: [0.58963, 0.82799].

Figura 12. Análisis para el IPC



En las series M2, M3 e IPC; el valor del coeficiente Hurst muestra memoria de largo plazo (es mayor que 0.5). Esto indica que las series son persistentes, es decir, no se cumple el supuesto de independencia utilizado para realizar los análisis con los modelos tradicionales.

## Conclusiones

Para analizar una serie de tiempo es recomendable primero establecer el valor del coeficiente Hurst, el cual dará una idea de si el supuesto de indepen-

dencia de los modelos tradicionales se cumple, es decir, si el valor del coeficiente Hurst es aproximadamente 0.5, indica un movimiento browniano, la serie no tiene memoria de largo plazo; o si, por el contrario, cualquier evento futuro se verá afectado por los datos anteriores.

Para el cálculo del coeficiente Hurst se ha observado que el porcentaje de datos descartados, para la formación de los intervalos, no afecta la tendencia de la serie, pero la cantidad de datos es un factor importante al momento de realizar la regresión; a mayor cantidad de datos el ajuste li-

neal es más exacto, esto puede verse en el análisis de M1, en el presente trabajo.

Al observar las gráficas de los retornos se puede apreciar la relación existente entre el espacio ocupado por la gráfica y la dimensión fractal, a más espacio, mayor dimensión fractal y menor valor del coeficiente Hurst.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo indican que el análisis realizado actualmente para las series de tiempo, parte de supuestos que no siempre se cumplen y si se parte de bases falsas las conclusiones pueden no ser válidas.

Aunque este tipo de análisis en las series financieras es relativamente nuevo, da visos que en las proyecciones de las series de tiempo se están cometiendo errores a la hora de analizarlas, por lo tanto, los modelos basados en dichos supuestos pueden no ser confiables, por ejemplo, para las series estudiadas se puede ver que en todos los casos, excepto en el del M1, no se cumple el supuesto de independencia, es lo que muestra el coeficiente Hurst ( $H$ ).

En todas las series estudiadas se puede apreciar, utilizando el coeficiente de correlación, que la aproximación de recta de regresión es confiable, por lo tanto, el valor del coeficiente Hurst es válido estadísticamente.

Esta metodología tiene los inconvenientes típicos de las predicciones,

muchas de las pruebas realizadas son empíricas, pero aun así, ofrece una visión de la tendencia que tienen los datos observados en relación con la independencia de los mismos, y aunque el coeficiente Hurst puede llegar a ser una buena herramienta antes de estudiar una serie, puede resultar poco práctico a la hora de realizar proyecciones.

Se ve que hay necesidad de encontrar modelos que incorporen las dependencias que se presentan en las series, y un camino para ello puede estar en el análisis fractal para quitar el supuesto de independencia.

Los modelos tradicionalmente utilizados para el análisis de series de tiempo han pronosticado, en forma adecuada, el comportamiento futuro en épocas *tranquilas*, pero en tiempos de crisis han mostrado su inoperancia, debido a que no se tienen en cuenta los eventos poco probables, la teoría fractal incorpora a los análisis estos cambios y, por lo tanto, en el momento de realizar el análisis se ajustarían mejor a la realidad.

## Bibliografía

- [1] Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*, Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, 3 (17): 21-86.
- [2] Benoit, Mandelbrot y Richard, L.

- Hudson. (2006). *Fractales y finanzas. Una aproximación matemática a los mercados: arriesgar, perder y ganar.* } Metatemas.
- [3] Benoit, Mandelbrot. (1988). *Los objetos fractales*, Tusquets Editores 8.
- [4] Black, F. y Scholes, M. (1976). *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81: 637-659.
- [5] Gerald, E. (1992). *Measure, Topology and Fractal Geometry*, Springer Verlag.
- [6] Hurst, H. E. (1951). *The Long-term storage capacity of reservoirs*, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 116: 770-808.
- [7] Einstein, A. (1956). *Investigations on the Theory of Brownian Movement*, New York, Dover.
- [8] Maejima, M. (1983). *On a class of self-similar processes*, Probability Theory and Related Fields, 62-2: 235-245.
- [9] Merton, R. (1976). "Option Pricing when the Underlined Stock Returns are Discontinuous", *Journal of Financial Economics*, 3: 125-144.
- [10] Muñoz, J. (2001). *Movimiento browniano y geometría fractal: El IBEX35*, Universidad de Sevilla, Primeras jornadas matemáticas de la economía.
- [11] Peters, E. (1991). *Chaos and Order in the Capital Markets: A new view of cycles, prices, and markets volatility*, John Wiley & Son, Inc.
- [12] Peters, E. (1993). *Fractal Markets Analysis: Applying Chaos Theory to Investment and Economics*, John Wiley & Son, Inc.
- [13] Quezada, A. (2006). *Fractales y opinión pública: una aplicación del exponente de Hurst al estudio de la dinámica de la identificación ideológica*, Barcelona.
- [14] Sierra, J. Guillermo. (2007). *Proceso Hurst y movimiento browniano fraccional en mercados fractales: valuación y aplicaciones a los derivados y finanzas*, Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey.