Teoría estocástica de Portafolio, [TEP]: algunas aplicaciones al mercado accionario colombiano

Diego Fernando Ochoa Cuervo*

diego8acuervo@gmail.com

* Gerente de estructuración y estrategia de la Compañía Profesionales de Bolsa. Candidato a Magister en Finanzas de la Universidad Externado de Colombia.

Introducción

Las crisis financieras de 1987, 1997-98, 2001 y 2008 han puesto de presente la necesidad de revisar la sostenibilidad de algunos axiomas modernos en finanzas como la eficiencia del mercado en la asignación de precios y recursos, la racionalidad y sabiduría de los agentes, los modelos de equilibrio en formación de precios y la validez del pronóstico económico como fundamento en la toma de decisiones financieras. El estudio de la dinámica del mercado en un contexto menos normativo y más descriptivo que el propuesto por la economía financiera clásica es un elemento imprescindible en la creación de una nueva arquitectura financiera, más sólida y segura, que requiere un enfoque diferente al observado hasta ahora. La teoría estocástica de portafolio, [TEP], propuesta por Fernholz (1982) incorpora un elemento ampliamente ignorado por las teorías precedentes: la diversidad como determinante del comportamiento del mercado accionario.

La capitalización bursátil del mercado accionario puede considerarse como una variable aleatoria que dependerá tanto de la variación de las acciones componentes del mercado como de la distribución del capital entre las especies. La diversidad en el mercado accionario es mayor si el capital se distribuye de forma uniforme entre las acciones y será menor entre más concentrado esté el mercado en algunas especies. El grado de diversidad y el mecanismo re-distribuidor del capital entre las acciones, que permite que la capitalización bursátil no colapse, es determinante en el comportamiento del precio de las especies.

En la siguiente sección se presentan definiciones básicas de la teoría estocástica de portafolio desarrollada por Fernholz (2002) que serán requeridas más adelante. Después se describen brevemente algunas métricas alternativas de la diversidad y, finalmente, la evaluación del desempeño de un portafolio funcionalmente generado por entropía, frente al índice COLCAP, permitiría inferir que el grado de diversidad del mercado colombiano y el desempeño de portafolios ponderados por entropía y diversidad, están relacionados con algunos factores de mercado específicos al caso local, lo que resulta en observaciones diferentes a las planteadas por Fernholz para mercados desarrollados.

Teoría estocástica de portafolio: definiciones básicas

Se considera el mercado colombiano como un mercado con n acciones en el cual, durante el intervalo de tiempo relevante $[0,T)$ de comparación no se presentan fusiones, *Splits,* ni adquisiciones y ninguna compañía nueva entra al mercado o sale de él. En este sentido suponemos el número de especies estable en el tiempo. Este es un supuesto fuerte que podremos relajar más adelante explorando las implicaciones pertinentes o sustituyendo este supuesto por otros menos restrictivos. Se asume que no hay pago de dividendos y que por cada compañía solamente existe una acción que representa la totalidad de la capitalización bursátil de las compañías 1,…, *n* y que no existe problema alguno con la divisibilidad de las acciones, sin que esto implique pérdida significativa de generalidad. En este mercado los procesos de precio de las acciones $X_1, \ldots X_n$ que satisfacen las n ecuaciones estocásticas diferenciales:

$$d \ln X_i(t) = \gamma_i(t)\,dt + \sum_{v=1}^{n} \xi_{iv}(t)\,dW_v(t), t \in [0,\infty) \tag{1}$$

O en forma exponencial:

$$X(t) = X_0 \exp \int_0^t \gamma(s)\,ds + \int_0^t \sum_{v=1}^{t} \xi_{iv}(t)\,dW_v(t) \ , t \in [0,\infty) \tag{2}$$

Para $i = (1, \ldots, n)$ donde $(W1, \ldots, Wn)$ es un movimiento browniano multivariado que representa las n fuentes de incertidumbre o volatilidad para la acción y definido en el espacio de probabilidad $\{\ \ ,\Im_t, P\}$ donde $\Im_t$ es la aumentada bajo P de la filtración natural $\{\Im_t^W = \sigma(W(s); 0 \le s \le t)\}$. Los procesos γ_i y $\xi_{i\nu}$ con $i, \nu = (1, \ldots, n)$ son medibles, adaptados y satisfacen condiciones generales de regularidad. El proceso γi se denomina la *tasa de crecimiento de la especie* .Este parámetro se relaciona con la representación aritmética de la tasa de retorno de la especie a través de:

$$\alpha_i(t) = \gamma_i(t) + \frac{\sigma_i^2(t)}{2}, \ t \in [0,\infty), \ c.s.$$

Como puede observarse en (1) se trata de una representación logarítmica del proceso de precios donde $d\ln X_i(t)$ representa el log-retorno o retorno continuo de X_i en un periodo infinitesimalmente pequeño de tiempo, sin que ello implique ningún tipo de preferencia por funciones de utilidad logarítmica que no juegan ningún papel dentro de la TEP. En una construcción de este tipo, γ_i es la tasa esperada de cambio del logaritmo del precio de la acción i en el tiempo t. El proceso $\xi_{i\nu}$ representa la sensibilidad de la acción X_i a la ν-ésima fuente de volatilidad o incertidumbre W_ν.

El proceso de covarianza entre las acciones *Xi* y *Xj* se definen:

$$\alpha_{ij}(t) = \sum_{v=1}^{n} \xi_{iv}(t)\xi_{jv}(t),\ t \in [0,\infty) \tag{3}$$

El proceso de la varianza puede, entonces, notarse $\sigma_i(t) = \sigma_{ij}(t)$ y es común asumir que la matriz de covarianzas $\sigma_{ij}(t)$ es no singular, invertible y sus valores propios se alejan de 0.

Un portafolio (π) es un subconjunto de especies del mercado M y se representa por su *proceso de ponderación relativa* π, $\pi(t) = [\pi_1(t),\ldots,\pi_n(t)]$ donde $\pi_i(t)$ para $i =$ 1,…,n; es la proporción (%) del portafolio invertido en la especie X_i en el momento t y su sumatoria desde $i = 1$ hasta $i = n$ debe ser 1 en cualquier momento del tiempo t. El proceso vector π es medible, adaptado y casi seguramente tiene variación finita para $t \in [0,\infty)$. Es importante anotar que el experimento (y la teoría estocástica de portafolio) se centra en la evaluación de la dinámica endógena del mercado accionario y de los portafolios factibles con las especies del mercado accionario, por tanto la existencia de un activo libre de riesgo es irrelevante.

El valor del capital invertido en el portafolio π en el momento del tiempo t se nota $Z\pi(t) > 0$. Por tanto, el porcentaje del capital invertido en la acción i puede notarse $Z\pi(t)\pi_j(t)$ y se dice que el portafolio tiene posición en i si π es diferente a 0. En el sentido que i aportará retorno al portafolio $Z\pi(t)$ en proporción a su variación logarítmica y a su participación relativa en el portafolio $\pi_j(t)$, el cambio total en el portafolio es un proceso que obedece a:

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\frac{dX_i(t)}{X_i(t)} \tag{4}$$

Que corresponde a un promedio ponderado del retorno logarítmico individual de cada una de las especies contenidas en el portafolio, toda vez que las especies del portafolio sigan (2) y sus retornos sigan (1). El proceso logarítmico del capital invertido en este portafolio corresponde a

$$d\ln Z_\pi(t) = \gamma_\pi(t)dt + \sum_{i,v=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{iv}(t)dW_v(t);\ \forall t \in [0,\infty)c.s. \tag{5}$$

Donde

$$\gamma_\pi(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\gamma_i + \frac{1}{2}\ \sum_{i-1}^{n} \pi_i\sigma_{ii}(t) - \sigma_{\pi\pi}(t) \tag{6}$$

Representa *el proceso de la tasa de crecimiento del portafolio* π *en el momento t*. Las propiedades de γ_i, π_i y ξ_{iv} aseguran que $\ln Z_\pi$ sea una semi-martingala continua. El proceso $\sigma_{\pi\pi}$ se denomina el proceso de covarianza del portafolio π y es equivalente a la sumatoria ponderada sobre i,j de las covarianzas entre las acciones componentes del portafolio:

$$\sigma_{\pi\pi}(t) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i(t)\pi_j(t)\sigma_{ij}(t) \tag{7}$$

Se asume que el proceso de varianza es equivalente al proceso de co-variación cuadrática de π con π para todo *t* en [0,∞), es decir:

$$\langle \ln Z_\pi \rangle = \int_0^t \sigma_{\pi\pi}(t)$$

y aplicando la integral de Itô se obtiene que

$$\frac{dZ_\pi(t)}{Z_\pi(t)} = d\ln Z_\pi(t) + \frac{1}{2}\sigma_{\pi\pi}(t)$$

El proceso γ_π^* se denomina la *tasa de exceso de crecimiento del portafolio* y se define por

$$\gamma_\pi^* = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} \pi_{ii}(t) - \sigma_{\pi\pi}\right)$$

que puede entenderse, de forma conceptual, como el grado de eficiencia con el cual el portafolio reduce la volatilidad del retorno del portafolio vía diversificación frente a lo que sería la volatilidad relativa de las especies componentes. Es comúnmente aceptado que la diversificación reduce la volatilidad del portafolio, pero en el contexto de la TEP, se hace un énfasis mayor en el grado en el cual la diversificación incrementa la tasa de crecimiento del portafolio.

Se puede redefinir (5) como

$$\ln Z_{\pi}(t) = \gamma_{\pi}(t)dt + \gamma_{\pi}^{*} + \sum_{i,v=1}^{n} \pi_i(t)\xi_{iv}(t)dW_v(t);\ \forall t \in [0,\infty)c.s. \tag{8}$$

Se define el mercado [M] como un conjunto o familia de especies de acciones, cada una de ellas siguiendo un proceso como el definido en (1) y cuya matriz de covarianzas puede representarse por $\sigma(t)$ positiva y definida para todo t en el intervalo $[0,\infty)$c.s. El mercado M se dice no degenerado en tanto su proceso de capitalización bursátil y los valores propios de la matriz varianza covarianza no convergen a 0 en el intervalo $[0,\infty)$c.s. Dicho mercado, como conjunto, observa una varianza finita y su proceso en el tiempo es cuadrado-integrable[1]. Las pruebas de los supuestos anteriores pueden detallarse en la monografía de Fernholz (2002).

Es de natural interés para el propósito de este documento, definir el proceso por el cual se caracteriza el exceso/defecto de retorno de un activo/portafolio frente a un portafolio referente que comúnmente se asocia a un Índice de mercado. Para una acción X_i, y un portafolio η el proceso

$$\ln {}^{X_i(t)}\!/_{Z_{\eta}(t)}\ ,\ t \in [0,\infty) \tag{9}$$

Se denomina el *proceso de retorno relativo de la acción X_i frente al portafolio η*. Puede caracterizarse el proceso de dos portafolios a partir de la misma expresión sustituyendo X_i por un portafolio relevante π.

Un portafolio μ con ponderaciones relativas $\mu_1,\ldots,\mu_2$ definidos por:

---

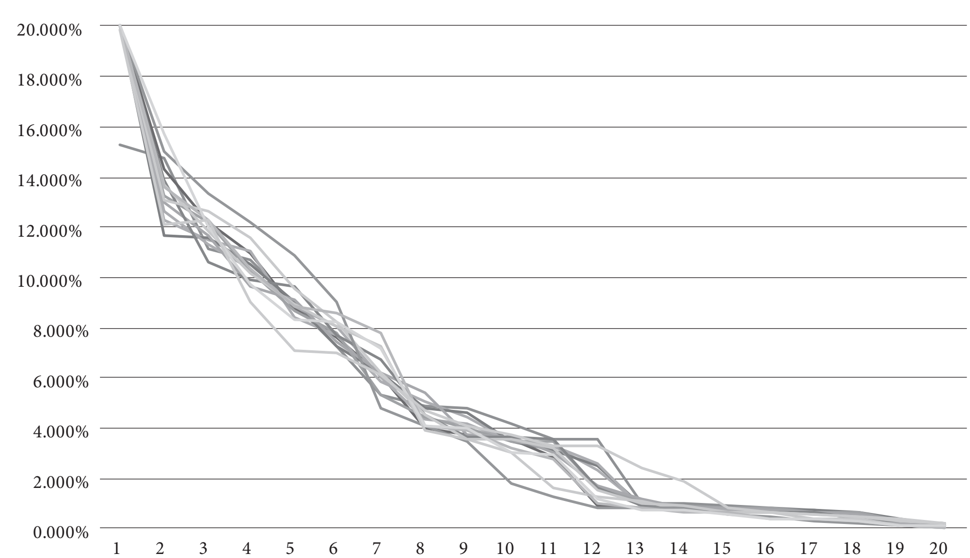
1 Ver E.R. Fernholz (2002).

$$ {}_{i} = \frac{X_i(t)}{X_1(t)+\ldots+X_n(t)},\ t \in [0,\infty) \tag{10}$$

para $i = 1,\ldots,n$, siendo n el número total de especies en el mercado accionario relevante, se denomina el *portafolio de mercado* y los pesos μ_i se denominan los pesos o ponderaciones relativas de mercado. Es conveniente recordar que se asume que sólo existe una acción por cada compañía cuyo precio es equivalente a la capitalización bursátil total de la especie en el mercado, sin que esto implique pérdida de generalidad. En particular, para efectos del estudio de este documento, este supuesto no representa una limitante ni un obstáculo en tanto suponemos que aun un portafolio como este es replicable en la realidad a través de índices de mercado ponderados por capitalización bursátil. Este portafolio, en particular, será el referente principal de comparación de los portafolios *funcionalmente generados* de las secciones subsiguientes.

En el caso del Índice representativo del mercado accionario colombiano por capitalización bursátil, la siguiente es la evolución de la "curva de distribución" del capital entre las especies, representado por las participaciones relativas de las especies en el Índice durante los últimos 14 trimestres. Esta Gráfica ordena, de mayor a menor, la participación de las acciones dentro del Índice COLCAP.

Gráfica 1. Participación de las acciones dentro del Índice COLCAP



El portafolio de mercado μ cumple con las características y relaciones definidas en (4) (6) (7) y (8) por cuanto podemos caracterizar la inversión en un portafolio de mercado por:

$$Z\ \ (t) = X_1(t) + \ldots + X_n(t) \tag{11}$$

con ponderaciones relativas μ_i de cada una de las especies dadas por (9) de forma que $Z_\mu(t)$ representa la capitalización bursátil combinada del mercado accionario. Teniendo presente las definiciones (9) y (10) puede definirse el proceso de participación relativa de una acción como un proceso cambiante en el tiempo y que obedece a:

$$_i(t) = X_i(t) \Big/ Z\ \ (t) \tag{12}$$

y el proceso de retorno relativo de la acción Xi respecto al mercado puede definirse:

$$\ln\ X_i(t) \Big/ Z\ \ (t)\ ,\ t \in [0,\infty) \tag{13}$$

Fernholz (2002) demuestra que

$$d\left\langle \ln \quad _j \right\rangle = d\left\langle \ln \frac{X_i}{Z_\mu},\ \ln\ \frac{X_j}{Z_\mu} \right\rangle t = \tau_{ij}(t)\,dt$$

donde τ_{ij}(i)dt es el proceso de *varianza relativa* de los retornos de dos especies (X_i y X_j) contenidas en el portafolio μ. Si a partir de (12) establecemos que $\mu_i(t)$ = e(lnμ_i), y se aplica la regla de Itô, puede obtenerse que casi seguramente para todo $t \in [0,\infty)$ el proceso de participación relativa de una especie *dentro del portafolio de mercado* puede expresarse como:

$$d\ \ _i(t) = \ \ _i(t)\,d\ln\ \ _i(t) + \frac{1}{2}\ \ _i\tau_{ij}(t)\,dt \tag{14}$$

obteniendo a partir de esto que,

$$d\left\langle \;{}_{i},\;{}_{j}\right\rangle = \;{}_{i}\left(t\right)\;{}_{j}\left(t\right)d\left\langle \ln\;{}_{i},\ln\;{}_{j}\right\rangle t = \;{}_{i}\left(t\right)\;{}_{j}\left(t\right)\tau_{ij}\left(t\right)dt \tag{15}$$

Sin embargo (15) solo puede sostenerse para el portafolio de mercado y no para portafolios arbitrariamente constituidos en donde la participación relativa no necesariamente obedece a (11)(12) y (13). Para dos portafolios π y η el proceso de retornos relativos se define por

$$\ln \left. Z_{\pi}\left(t\right) \middle/ Z_{\eta}\left(t\right) \right. ,\; t \in \left[0,\infty\right)$$

Fernholz (2002) demuestra que este proceso también puede caracterizarse a partir de los retornos de las acciones componentes *y* la tasa de exceso de crecimiento de uno sobre el otro:

$$d\ln\left(Z_{\pi}\left(t\right)/Z_{\eta}\left(t\right)\right) = \sum_{i-1}^{n}\pi_{i}\left(t\right)d\ln\left(X_{i}\left(t\right)/Z_{\eta}\left(t\right)\right) + \gamma_{\pi}^{*}dt \tag{16}$$

Si η = μ, esta ecuación puede expresarse

$$d\ln\left(Z_{\pi}\left(t\right)/Z_{\eta}\left(t\right)\right) = \sum_{i-1}^{n}\pi_{i}\left(t\right)d\ln\;{}_{i}\left(t\right) + \gamma_{\pi}^{*}dt \tag{17}$$

Lo que implica que puede representarse el proceso de retorno relativo de un portafolio arbitrariamente constituido en términos de las diferencias en la ponderación asignada a las especies dentro del portafolio arbitrario (п). Esta relación resulta imprescindible para el desarrollo de portafolios funcionalmente generados.

Portafolios funcionalmente generados

Se dice que una función genera un portafolio cuando el resultado de la función asigna ponderaciones relativas a cada una de las especies componentes de un mercado. En este sentido, el dominio de una función generadora de portafolio es *otro* portafolio. En este caso, nos interesan las funciones que pueden describir la diversidad de un portafolio de mercado y que generan a su vez *portafolios ponderados por diversidad*. Bajo ciertas condiciones de mercado puede evidenciarse una relación de dominancia de largo plazo entre un portafolio de mercado y un portafolio funcionalmente generado, en particular cuando la función que genera el portafolio reduce el sesgo de capitalización bursátil. Se consideran funciones generadoras de portafolio aquellas funciones en los reales, positivas, C^2 y definidas en el conjunto Δ^n tal que

$$\Delta^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 + \ldots + x_n = 1, 0 < x_i < 1, i = 1, \ldots, n \right\}$$

Se dice que S es la función aplicada a μ generadora del portafolio π si existe un proceso medible y adaptado $\Theta = \left\{ \Theta(t), \Im_t, t \in [0, \infty) \right\}$ tal que $d \ln \frac{Z_\pi(t)}{Z(t)} = d \ln S\left(\quad (t) \right) + \Theta(t) dt$ siendo Θ el proceso de deriva correspondiente a S. Se entiende entonces que π es *funcionalmente generado*. Fernholz (2002) demuestra que para dos portafolios funcionalmente generados por las funciones $S1$ y $S2$ se cumple que:

$$d \ln\left(Z_{\pi 1} / Z_{\pi 1} \right) = d \ln\left(S_1\left(\quad (t) \right) / S_2\left(\quad (t) \right) + \left(\Theta_1(t) - \Theta_2(t) \right) dt, t \in [0, \infty) \right.$$

Un índice de mercado ponderado por capitalización bursátil es un buen ejemplo de un portafolio *funcionalmente generado,* en cuyo caso el peso de cada acción dentro del portafolio obedece a la función de capitalización bursátil relevante definida por el constructor del Índice. En el caso de la Bolsa de Valores de Colombia el Índice COLCAP puede verse como un portafolio generado por una función ($S1$) de capitalización bursátil, volumen, rotación y frecuencia[2] de las especies componentes. Una función ($S2$) que recoja la ponderación del portafolio índice y devuelva una ponderación diferente para las mismas especies es, como tal, un portafolio funcionalmente generado *diferente*.

---

[2] Ver "Metodología para el cálculo del Indice COLCAP". Documento Técnico de la Bolsa de Valores de Colombia, Marzo 2011.

Mercado, diversidad y entropía

Se ha definido un mercado diverso como uno en que el capital asignado al mercado accionario se distribuye entre un número razonable de acciones. La diversidad tendrá grados, siendo el mayor grado de diversidad aquel en que el capital se distribuye *uniformemente* entre todas las especies. La diversidad en un mercado será nula en el caso en el cual, todo el capital se concentre en una única especie. En la mayor parte de economías capitalistas, con regulación de mercado de valores, existen regulaciones anti-monopolio y restricciones respecto de la asignación del capital de los inversionistas institucionales que impiden el escenario extremo de concentración del capital en una única especie; por cuanto el supuesto de que un mercado es diverso apunta a que no "implosiona" en una única especie relevante ni llega a adquirir concentraciones excesivas. Un mercado es *coherente* y *no-degenerativo* si, en promedio, ninguna de las especies constituyentes cae en valor rápidamente o su valor desaparece. Fernholz demuestra que un mercado cumple condiciones de coherencia y no-degeneración toda vez que el promedio *ponderado en el tiempo* de la diferencia en la tasa de crecimiento de las especies que componen el mercado sea 0. Si la diferencia en tasa de crecimiento de las especies promedia 0, implica que no existen concentraciones permanentes ni persistentes de la capitalización bursátil en una o unas pocas especies.

Este supuesto es radicalmente diferente al planteamiento de la teoría clásica de portafolio de retornos y primas de riesgo constantes en el tiempo. La existencia de una diferencia *persistente* en retorno de una especie, sobre el mercado u otras especies, conduce inmediatamente a la eventual concentración del capital en esa especie, lo que lo hace *incoherente, no diverso y degenerativo*. De igual forma, suponer tasas de crecimiento iguales para todas las especies le hace no diverso, en tanto tasas de crecimiento sobre precios de mercado más altos generan procesos de concentración en pocas especies y caídas en la mayoría, haciéndolo degenerativo. Un mercado degenerativo es aquel en el cual una o varias especies exhiben, en el tiempo, tasas de crecimiento (γ) que convergen a 0, es decir que existen acciones que "desaparecen" en el tiempo. Si tenemos en cuenta las condiciones observadas del mercado accionario colombiano, es posible suponer que es coherente y no degenerativo y por tanto no podría seguir el modelo de primas de riesgo constantes planteado por la teoría clásica de portafolio.

Un mercado será diverso si *en ningún momento en el tiempo* ninguna especie acapara el total de capitalización bursátil del mercado. Se define un mercado como *débilmente diverso* si *en promedio* ninguna acción acapara *el total* de capitalización bursátil del mercado. Si bien se ha definido la diversidad de mercado como una condición observable en el hecho de que el mercado accionario colombiano no "implosiona" ni observa crecimientos exponenciales; hace falta aún una métrica de diversidad. Fernholz propone la entropía de Shannon como una medida de diversidad para los mercados accionarios.

Medidas de diversidad

La medida de entropía de Shannon fue planteada en 1948 como una medida de uniformidad de la distribución de probabilidad de una variable aleatoria, inicialmente incorporada en el desarrollo de la teoría de la información. La función de entropía de Shannon se define como:

$$S = -K \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i \quad \forall p \ en \quad {}^{n} = \left\{ p \in \mathbb{R}^n : p_1 + \ldots + p_n = 1; 0 < p_i < 1, i = 1, \ldots, n \right\} \qquad (18)$$

donde K es simplemente un acotador o unidad de medida y p_i es la probabilidad de un evento i en un experimento aleatorio. Un experimento aleatorio como el lanzamiento consecutivo de una moneda justa tiene máxima entropía en la medida que hay incertidumbre total respecto de su resultado y se trata de una variable i.i.d. En este sentido, cualquier variable aleatoria i.i.d muestra algún grado de entropía que varía según su distribución de probabilidad. Una distribución de probabilidad uniforme observa un grado de entropía máxima.

De acuerdo con Fernholz (2002) y Fernholz (2005), una función de diversidad debe ser una función de las ponderaciones relativas de capitalización de mercado (ponderación del índice representativo) que sea *positiva, simétrica y cóncava* y que alcanza su valor máximo cuando todas las participaciones son equitativas. En el contexto del mercado accionario sustituimos p_i por μ_i, y obtenemos que una baja entropía indica bajo grado de incertidumbre respecto de la participación relativa de una especie en particular dentro del mercado accionario en un período de tiempo futuro. Maximizar la entropía implica una distribución absolutamente equitativa del capital en cada una de las especies componentes del mercado. Si se asume que las fuentes de riesgo que determinan el proceso de precios son movimientos brownianos geométricos multivariados, sería imposible, en un mercado con máxima entropía, determinar el impacto de una variación en el precio de la acción sobre de la distribución relativa del capital entre las especies. En un mercado con 0 entropía (concentrado en 1 especie), no hay incertidumbre respecto del impacto de un cambio de precio en la especie remanente sobre la distribución de capital, pues no hay otras especies que puedan recibir el valor perdido por esta acción y el cambio en valor de esta acción obedece obligatoriamente a un fenómeno exógeno, y el valor monetario perdido por el precio de esa especie sale del mercado hacia otro mercado o simplemente se destruye.

En el límite ($n \to \infty$), si el número de especies en el mercado accionario es infinito, la entropía igualmente será infinita y la diversidad de este mercado será perfecta, así la curva de capitalización bursátil será plana. La función de entropía de Shannon aplicada a la capitalización bursátil (μ) es

$$S = -\sum_{i=1}^{n} \;{}_{i} \ln \;{}_{i} \tag{19}$$

Esta función generaría el *portafolio funcionalmente generado por entropía* (π) con pesos equivalentes a π_i:

$$\pi_i = \frac{{}_{i}(t) \ln \;{}_{i}(t)}{S(\;(t))}, t \in [0,T] \tag{20}$$

El desempeño de este portafolio relativo al Índice de referencia COLCAP será evaluado en la siguiente sección.

Fernholz (2002) propone una medida de entropía alterna que también puede generar portafolios funcionalmente generados. Esta función ha sido utilizada en la práctica por Intech Group en la administración de sus fondos de valores con resultados sobresalientes. Fernholz define la medida de diversidad de mercado D_p:

$$D_p = \left(\sum_{i=1}^{n} (\;{}_{i})^{p} \right)^{1/p} \tag{21}$$

Al aplicar la medida de diversidad al mercado [Dp] es posible obtener un portafolio funcionalmente generado a partir del grado de diversidad relativa:

$$\pi_i(t) = \frac{{}^{p}_{i}(t)}{\left(D_p(\;(t))\right)^{p}}, \forall\, t \in [0,T] \tag{22}$$

Esta medida de diversidad tiene ventajas respecto de la función de entropía. Como generadora de portafolios la inclusión de un parámetro libre (p) permite ajustarlo para incrementar o reducir el error de réplica, así como las características del retorno del portafolio resultante. Un portafolio generado a partir de esta función con $p = 1$ tiene, en ausencia de costos de transacción, un error de réplica de 0 frente al índice de mercado. Esta medida de diversidad permite relajar los supuestos de indivisibilidad de las compañías, así como del flujo de compañías que entran/salen del mercado. Si, por ejemplo, una de las n compañías listadas en bolsa se dividiera en k compañías, esto simplemente incrementaría la diversidad al reducir la concentración de capital en esa compañía. Si todas las especies se dividieran equitativamente en k compañías, se tendría un nuevo mercado de $n*k$ compañías pero la diversidad se mantendría constante, por tanto, entre dos mercados con igual grado de diversidad, la función descrita genera portafolios que deberían observar el mismo desempeño relativo frente a cada uno de sus portafolios de mercado.

El coeficiente de Gini es una medida ampliamente utilizada como medida de distribución de la riqueza o el ingreso corriente entre los habitantes de un país. El coeficiente de Gini es una medida de diversidad, donde 1 es la perfecta concentración y 0 constituye la perfecta distribución. El coeficiente de Gini se define:

$$G(x) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - n^{-1}\right| \tag{23}$$

$$Gm(x) = 1 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left| \quad {}_i - n^{-1}\right| \tag{24}$$

Aplicar esta función al mercado de capitales puede lograrse modificándola levemente, obteniendo (24). Esta función, si bien es una medida de diversidad, no es una función generadora de portafolio en la medida que no es C^2 lo que impedirá que la utilicemos como una función generadora de portafolio.

La función de entropía de Rényi propuesta en 1960 se define como

$$R(x) = \frac{1}{1-p}\ln\sum_{i=1}^{n} x_i^p \tag{25}$$

Para $p \neq 1$. Si bien para $p < 1$ $R(x)$ es cóncava si $p > 1$ deja de ser cóncava lo que puede generar ponderaciones negativas en un portafolio funcionalmente generado, por cuanto la descartamos como función generadora de portafolios.

Evolución de la diversidad y desempeño de portafolios generados por entropía y diversidad

Para evaluar el comportamiento reciente de la diversidad en el mercado colombiano y el desempeño de portafolios generados a partir de las funciones de entropía y diversidad, tomamos la base de datos histórica de las canastas seleccionadas del Índice COLCAP desde 2008 hasta el 2011 y calculamos efectivamente los indicadores de entropía y diversidad con periodicidades mensuales basados en la evolución de las canastas y los precios incluidos en el Índice. Con el fin de re-balancear en función de la ponderación dentro del Índice, sin importar la especie, ordenamos las especies en forma descendente de acuerdo con su participación relativa dentro del portafolio Índice, indicando con el número 1 la acción de mayor ponderación dentro del Índice y con el número 20 el activo de menor ponderación. La ventana de tiempo obedece a la disponibilidad de datos de las canastas del COLCAP y datos de capitalización bursátil ajustada provistos por la Bolsa de Valores de Colombia. Señalaremos como la evolución, en particular de uno de los n factores de riesgo que determinan el precio de las acciones, resultó predominante durante este período de tiempo, impactando el retorno relativo de los portafolios funcionalmente generados.

Una de las primeras observaciones es que la tendencia de las dos medidas de diversidad es similar en períodos de tiempo entre 1 y 3 meses y en ambos casos apuntan a que el mercado ha perdido diversidad (la capitalización bursátil total está más concentrada en menos especies). También es importante señalar que la diversidad de Fernholz observa una mayor variabilidad para el período de tiempo analizado lo que puede estar relacionado con el factor de escalamiento.

Una evaluación de la participación de cada una de las 20 especies, dentro del Índice COLCAP, apunta precisamente a que la pérdida de diversidad obedece al incremento en capitalización bursátil concentrada en algunas de las principales especies del mercado, con un período crítico entre marzo 2010 y septiembre 2010, en que la recuperación de las acciones del sector financiero, y una relativa estabilidad en los precios del petróleo incrementaron la concentración en las primeras 4 especies que pasaron de representar el 57% de la ponderación del índice hasta un pico de 62% del mismo en Mayo de 2010.

Gráfico 2. Entropía de Shannon 2008-2011

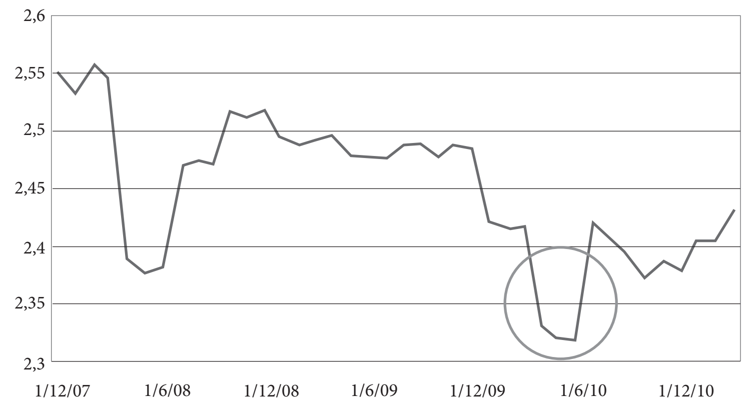
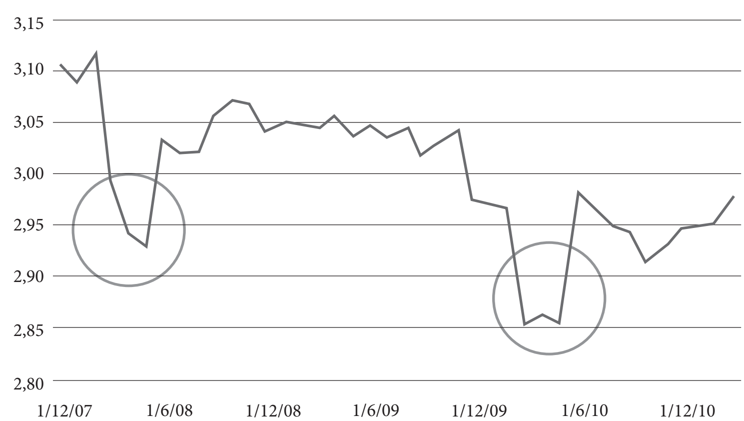
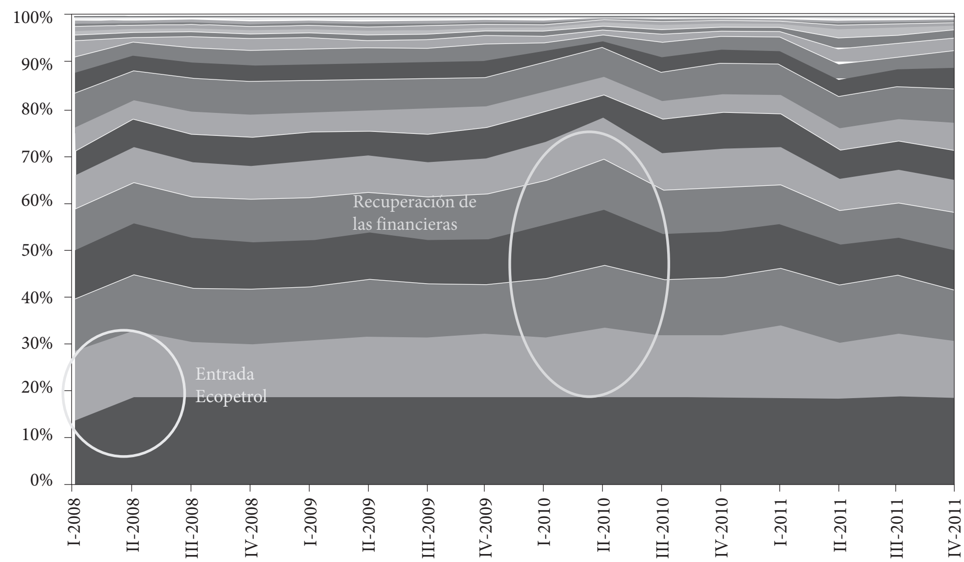


Gráfico 3. Diversidad de Fernholz 2008-2011



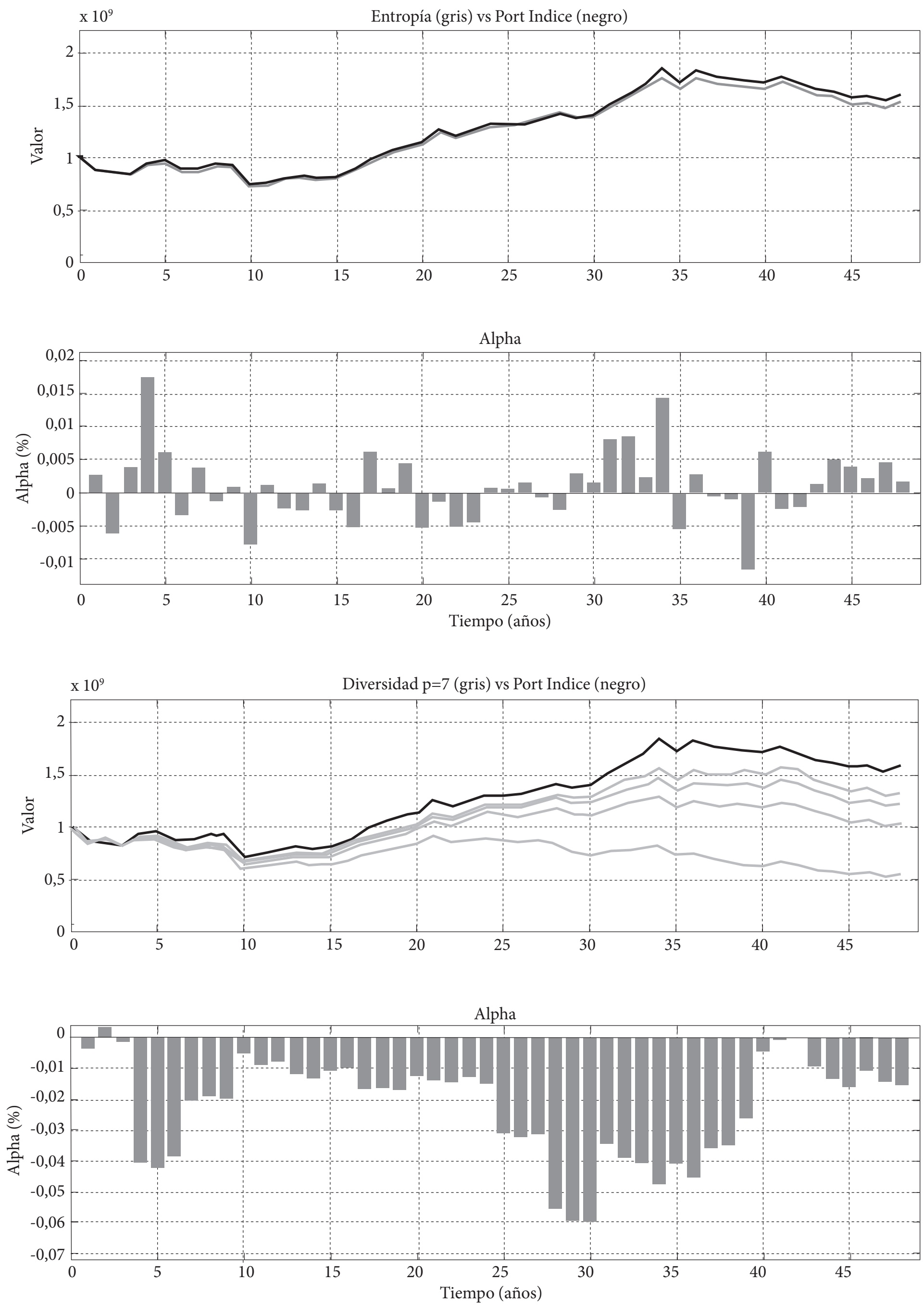
La construcción de portafolios, generados a partir de las funciones de entropía y diversidad, se hizo a través de un *script* programado en el aplicativo Matlab que evalúa un portafolio de inversiones constituido en las proporciones indicadas por el COLCAP cada mes y calcula las funciones de entropía y diversidad para generar las ponderaciones correspondientes a las expresiones (20) y (22), para cada una de las especies de acciones del mercado colombiano incluidas en el COLCAP para este período de tiempo. La frecuencia de rebalanceo es mensual, lo que implica que a diferencia del portafolio índice, los portafolios funcionalmente generados determinan la ponderación relativa de cada acción durante el mes y redistribuye el capital de acuerdo con la función generadora. Una frecuencia de rebalanceo trimestral no observó diferencias importantes ni en el portafolio funcionalmente generado por entropía de Shannon ni por la función de diversidad de Fernholz.

Gráfico 4.



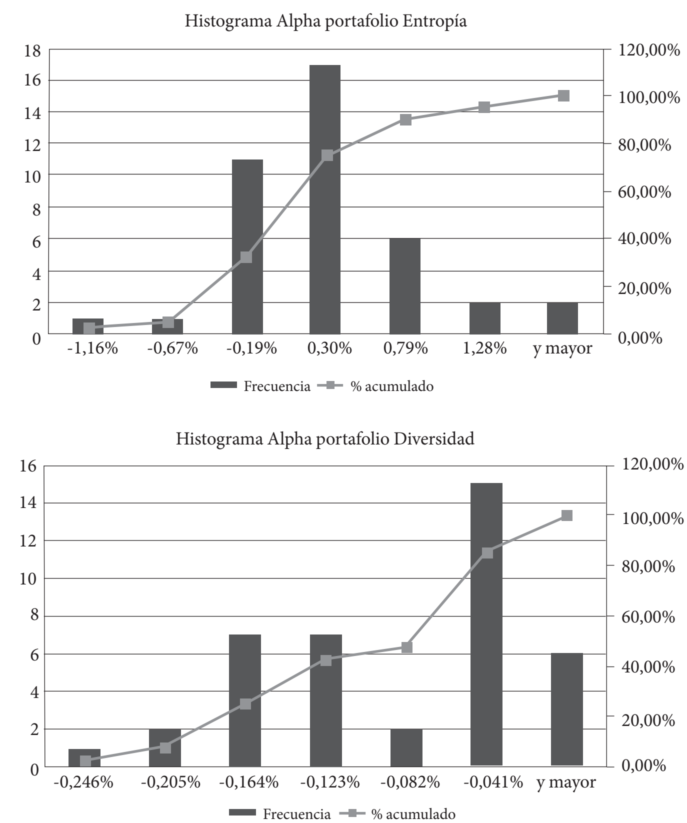
Uno de los efectos más evidentes, al aplicar funciones a las ponderaciones obtenidas en un índice de capitalización bursátil, es reducir la exposición del portafolio generado a las acciones de alta capitalización e incrementar la posición en acciones de relativamente baja capitalización. En la jerga del mercado accionario esto implica incrementar el efecto de tamaño (*size effect*) al exponerse a acciones de baja capitalización que experimentan mayores incrementos en rentabilidad con volatilidades mayores. No obstante, dentro de lo observado la exposición a este efecto no implica aumentos en la volatilidad de los retornos. El retorno acumulativo para el período de un portafolio ponderado por entropía fue inferior al obtenido por el portafolio índice , aunque el exceso de retorno, también conocido como *alpha,* observa una distribución de sesgo positivo.

Gráfico 5.


x 10⁹
Entropía (gris) vs Port Indice (negro)
Valor
Alpha
Alpha (%)
Tiempo (años)
x 10⁹
Diversidad p=7 (gris) vs Port Indice (negro)
Valor
Alpha
Alpha (%)
Tiempo (años)

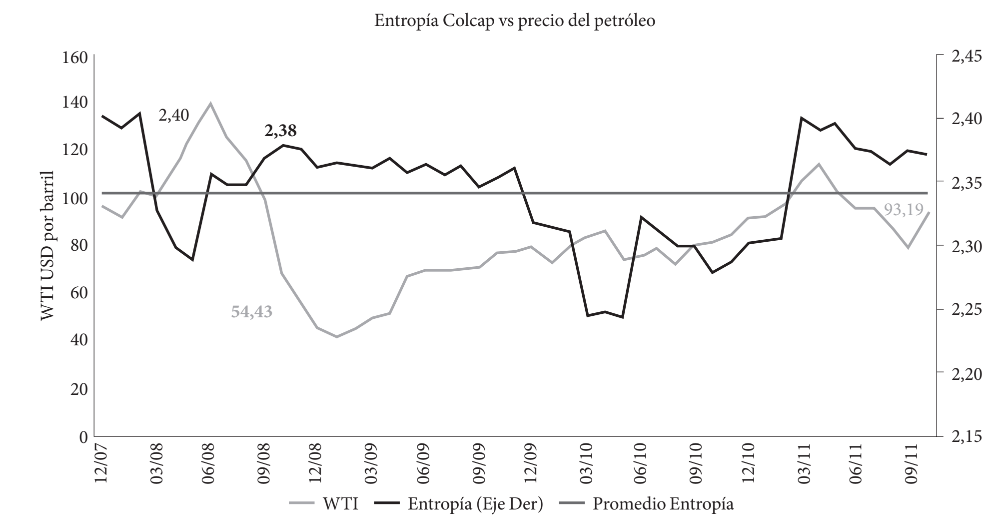
El portafolio ponderado por diversidad observa un *alpha* relativo al Índice COLCAP negativo durante la mayor parte del período analizado. No obstante al cambiar el parámetro p, reduciéndolo hasta valores cercanos a $p = 0.05$ (portafolios más equitativamente distribuidos), el desempeño relativo periódico mejora significativamente así como el desempeño acumulativo. Si bien la relación de causalidad entre los factores de riesgo relevantes del portafolio de mercado y la diversidad excede el alcance del presente documento; es posible observar que este desempeño negativo tiene relación directa con la mecánica de ponderación de la función de diversidad y la evolución del precio del petróleo en el período 2008-2011.

Gráfico 6.



Es evidente que el grado de diversidad se ha deteriorado, favoreciendo a las acciones de mayor capitalización. Se observa que existe una relación directa entre el grado de diversidad y el desempeño del portafolio. Si en un período de tiempo lo suficientemente largo la diversidad revierte a la media, la tendencia de desempeño relativo revertiría favoreciendo a las acciones de menor capitalización. No obstante, en periodos cortos de tiempo es visible como algunas especies concentran una mayor capitalización bursátil. Resulta relevante observar, al menos al hacer una exploración gráfica, como las dos medidas de diversidad del mercado accionario colombiano observan un comportamiento casi inverso al comportamiento de los precios del petróleo.

Gráfico 7.



Una explicación plausible apunta a que en la medida que el índice de portafolio concentra cerca de un 60% en especies relacionadas con la producción y explotación petrolera, una de las fuentes de riesgo descritas en (1) se extienden al portafolio de mercado en una proporción importante. Es decir, al haber algunas especies que concentran una alta participación de la capitalización bursátil total y que comparten un factor de riesgo común (el precio del petróleo), el incremento en el precio del *commodity* impacta directamente el grado de diversidad del mercado accionario, con lo que, si aumenta el precio del crudo en los mercados internacionales, puede esperarse una reducción en la diversidad y una mayor concentración relativa del capital en las especies vinculadas a la actividad petrolera.

Conclusión

A manera de conclusión puede evidenciarse como la teoría estocástica de portafolio tiene importantes aplicaciones en el mercado accionario colombiano, en la medida que recoge el impacto de un factor determinante pero ampliamente ignorado dentro de la teoría moderna de portafolio: el grado de diversidad en un mercado accionario. Es evidente también como las medidas de diversidad muestran un grado importante de reversión a la media y una relación aparentemente inversa frente a uno de los principales factores de volatilidad del índice local como es el precio del petróleo en mercados internacionales. En particular esta relación puede explotarse para diseñar estrategias dinámicas de portafolio que permitan, con probabilidad alta, obtener retornos superiores a los obtenidos por un fondo índice sin incrementar de manera significativa el riesgo, mejorando la función de utilidad del administrador activo de portafolios de inversión. Estas implicaciones serán objeto de un trabajo futuro.

Bibliografía

Black F. y Scholes M. (1973). "The pricing of Options and Corporate Liabilities". *The Journal of Political Economy* 81, 637-654.

Ferguson R., Leistikow D., Rentzler J y Yu S. (2009). "The Efect of value estimation Errors on Portfolio Growth Rates". *The Journal Of Investing*, 69-75.

Fernholz R. (2001). "Factorization of Equity Returns". *Intech Group Research Note*.

Fernholz R. (2002). *Stochastic Portfolio Theory*, Springer.

Fernholz R. (2005). *Stock Market Diversity*. Intech research note.

Fernholz R. y B. Shay (1982). "Stochastic portfolio theory and stock market equilibrium". *Journal of Finance* 37, 615-624.

Ineichen A. (2009) *Asymmetric Returns*, John Wiley and Sons.

Markowitz H.M. (1952) "Portfolio Selection", *Journal of Finance* 7, 77-91.

Merton R.C. (1974). "Theory of rational option pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science* 4, 141-183.

Merton R.C. (2003). "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model". *Econometrica* 41, 867-887.

θksendahl B. (2002). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with applications*. Springer

Rosenberg B. y J.A. Ohlson (1976). "The Stationary distribution of returns and portfolio separation in capital markets: A fundamental contradiction", *Journal of Finance and Quantitative Analysis* 11,393-401.

Ross S. (1976). "The arbitrage Theory of Capital asset pricing". *Journal of Economic Theory* 13, 341-360.

Shannon C. (1948). "A Mathematical Theory of Communication". *The Bell System Technical Journal* 27, 379-423.

Sharpe W. F. (1964), "Capital Asset Prices: A theory of Market equilibrium under conditions of risk". *Journal of Finance* 19, 425-442.

Tobin J. (1958). "Liquidity Preferences as Behavior towards Risk." *Review of Economic Studies* 25, 2:65-86.