# Opciones parisinas. Definición y valoración

John Freddy Moreno Trujillo*

*jhon.moreno@uexternado.edu.co*

* Docente investigador. Facultad de Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales. Universidad Externado de Colombia. Matemático de la Universidad Nacional de Colombia y Magister en matemática aplicada de la misma universidad. Candidato a PHD en economía de la Universidad del Rosario.

## 1. Introducción

El desarrollo que han presentado los mercados financieros alrededor del mundo junto a las cada vez más profundas y complicadas crisis, han despertado el interés de un número cada vez mayor de agentes por los derivados financieros, particularmente por las opciones. Las opciones estándar otorgan a su poseedor el derecho, mas no la obligación, de negociar una determinada cantidad de un activo subyacente en una fecha futura preestablecida y por un monto especificado. Las opciones exóticas, dentro de las cuales se encuentran las opciones dependientes de trayectoria, son valoradas en función del cumplimiento de ciertas condiciones por parte del precio del activo subyacente. Las opciones barrera son un ejemplo de opciones dependientes de trayectoria y como un caso particular de éstas se encuentran las opciones parisinas.

Más exactamente las opciones parisinas dan a su poseedor el derecho a comprar (opciones *call*)o vender (opciones *put*), una determinada cantidad de un activo subyacente, por un monto de dinero establecido (precio de ejercicio) si el precio del activo está por arriba (o por abajo) de un cierto precio barrera, más de un cierto tiempo (ventana de la opción), antes de su vencimiento. Se pueden establecer diferentes tipos de opciones parisinas, dependiendo de si la opción se activa (*in*) o desactiva (*out*), cuando el precio del activo cruza la barrera y se mantiene arriba (*up*) o abajo (*down*) de la misma, un tiempo mayor o igual a de la ventana de la opción.

Otra clasificación de las opciones parisinas se puede establecer de acuerdo con la forma cómo se mide el tiempo que el precio del subyacente está por debajo o por encima de la barrera. Cuando el tiempo se empieza a contar desde cero cada vez que el precio del subyacente cruza la barrera, se dice que es una *opción parisina continua*. Cuando se adicionan los intervalos de tiempo en los que el precio del subyacente cruza la barrera sin volver la cuenta a cero cada vez, se dice que es una *opción parisina acumulativa*. La distinción entre estos dos tipos es fundamental, dado que plantean cuestiones diferentes acerca de las trayectorias del precio del subyacente, particularmente sobre las trayectorias del movimiento browniano.

El problema de la valoración de este tipo de opciones es abordado en múltiples trabajos, los cuales se han centrado fundamentalmente en dos aproximaciones: la valoración aplicando transformada de Laplace y la aproximación por ecuaciones diferenciales parciales. La técnica de transformada de Laplace es introducida por Chesney [1], Schröder [6] y Hartley [3], y la aproximación por ecuaciones diferenciales parciales por Haber y otros [2]. En el presente documento se describen la metodología de valoración por transformada de Laplace a partir de estos trabajos y por las publicaciones de Labart y Lelong [4] y Rivera [5].

## 2. Valoración por transformada inversa de Laplace

Para estudiar los modelos de valoración se parte de asumir que el precio de los activos riesgosos en el mercado satisface la siguiente expresión bajo una medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$.

$$dS_t = S_t \left( (r-\delta)dt + \sigma dW_t \right) \quad , \quad S_0 = x \tag{1}$$

donde $Wt$ es un movimiento browniano bajo $\mathbb{Q}$, $r$ es la tasa libre de riesgo que se asumirá constante, $\delta$ es al tasa de dividendos que paga el activo y $x > 0$ es el valor en $t = 0$ del activo subyacente a la opción. Se sigue que,

$$S_t = x \exp\left( \left( r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right) \tag{2}$$

e introduciendo las notaciones:

$$m = \frac{1}{\sigma}\left( r - \delta - \frac{\sigma^2}{2} \right) \quad ; \quad b = \frac{1}{\sigma} \ln\left( \frac{L}{x} \right)$$

donde $L$ es el nivel de barrera o nivel de excursión, se tiene que bajo $\mathbb{Q}$ la dinámica del precio del activo está dada por

$$S_t = x \exp\left\{ \sigma \left( mt + W_t \right) \right\} \tag{3}$$

Aplicando el teorema de Girzanov, introducimos una nueva medida de probabilidad $P$, bajo la cual $Z_t = \{ mt + W_t,\ 0 \leq t \leq T \}$ es un movimiento browniano y $\frac{d\mathrm{P}}{d\mathbb{Q}} = e^{mZ_T - \frac{m^2}{2}T}$.

Bajo este cambio, el precio del activo puede escribirse como,

$$S_t = xe^{\sigma Z_t} \tag{4}$$

Por ejemplo, si buscamos determinar el valor de la prima de una opción parisina de compra *down and out* en términos de la notación previamente definida, y donde la ventana de la opción es $D$, utilizamos la notación:

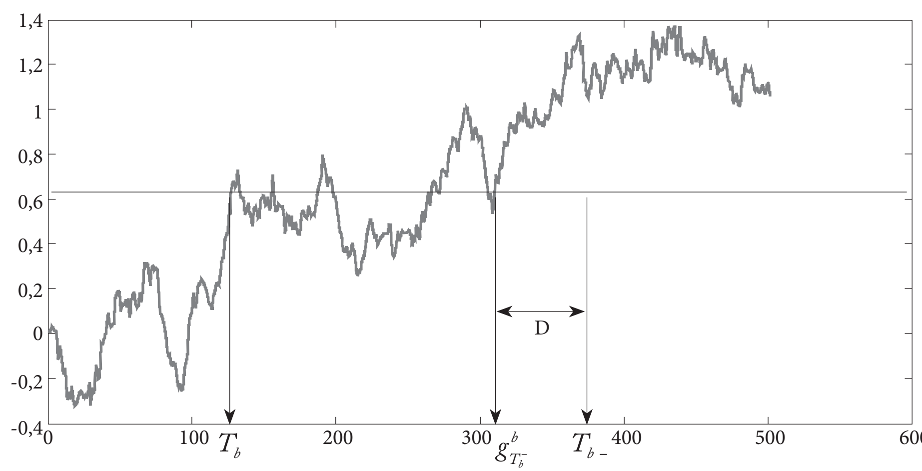
$$T_b = \text{ínf}\left\{t > 0 \middle| Z_t = b\right\} \tag{5}$$

$$g_t^b = \sup\left\{u \leq t \middle| Z_u = b\right\} \tag{6}$$

$$T_b^- = \text{ínf}\left\{t > 0 \middle| \left(t - g_t^b\right) 1_{\{z_t - b\}} > D\right\} \tag{7}$$

La siguiente Figura muestra la posición de estas variables para la trayectoria simulada del movimiento browniano $Z_t$.

Figura 1: Trayectoria del movimiento browniano $Z_t$




De este modo, el precio de esta opción en el tiempo $t = 0$, en un modelo libre de arbitraje y está dado por:

$$PC\,DO(x,T;K,L;r,\delta)=e^{-rT}E_{\mathbb{Q}}\ \left(S_t-K\right)^{+}1_{\left\{T_b^- >T\right\}}\ =e^{-\ r+\frac{m^2}{2}\ T}E_{\mathrm{P}}\ 1_{\left\{T_b^- >T\right\}}\left(xe^{\sigma Z_T}-K\right)^{+}e^{mZ_T} \tag{8}$$

De forma análoga, la fórmula de valoración para una opción parisina de compra *down and in* es:

$$PC\,DI\left(x,T;K,L;r,\delta\right)=e^{-\ r+\frac{m^2}{2}\ T}E_{\mathrm{P}}\ 1_{\left\{T_b^- <T\right\}}\left(xe^{\sigma Z_T}-K\right)^{+}e^{mZ_T} \tag{9}$$

Si continuamos con una opción parisina de compra *down and in* y denotando por $F_t$ a la filtración natural del movimiento browniano $\{Z_t : t\geq 0\}$, bajo la cual $T_b^-$ es un $F_t$-tiempo de parada, se tiene que:

$$\begin{aligned}PC\,DI\left(x,T;K,L;r,\delta\right)&=e^{-\ r+\frac{m^2}{2}\ T}E_{\mathrm{P}}\ 1_{\left\{T_b^- <T\right\}}\left(xe^{\sigma Z_T}-K\right)^{+}e^{mZ_T}\\&=e^{-\ r+\frac{m^2}{2}\ T}E_{\mathrm{P}}\ 1_{\left\{T_b^- <T\right\}}E_{\mathrm{P}}\ \left(xe^{\sigma Z_T}-K\right)^{+}e^{mZ_T}\ \middle|F_{T_b^-}\end{aligned}$$

De lo anterior se deduce que:

$$PC\,DI\left(x,T;K,L;r,\delta\right)=e^{-\ r+\frac{m^2}{2}\ T}E_{\mathrm{P}}\ 1_{\left\{T_b^- <T\right\}}\mathrm{P}_{T-T_b^-}\left(f_x\right)\left(Z_{T_b^-}\right)$$

donde,

$$f_x\left(z\right)=e^{mz}\left(e^{\sigma z}-K\right)^{+}$$

y

$$\mathrm{P}_t\left(f_x\right)\left(z\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}f_x\left(u\right)\exp\ -\frac{\left(u-z\right)^2}{2t}\ du$$

Observemos que la idea detrás de la valoración de este tipo de opciones es trabajar con la función de pago final modificada:

$$V(t,K) := E \;\; 1_{\{t \geq T\}} \varphi(\psi_t) \tag{10}$$

donde,

$$d\varphi_t = r\varphi_t dt + \sigma\varphi_t dW_t$$

calculando el valor esperado, utilizando la transformada de Laplace:

$$\int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t,K)\,dt = E \;\; e^{-\lambda T} \int_0^{\infty} e^{-\lambda u} \varphi_{T+u}\,dt$$

### 2.1. Conclusiones

Si bien la valoración de este tipo de opciones por la aplicación de métodos como el de transformada de Laplace, responde a características específicas del modelo, determinadas por los supuestos sobre el comportamiento del precio del activo subyacente, surge la pregunta acerca de cuál sería la metodología a utilizar para realizar dicha valoración si se cambian los supuestos sobre el comportamiento del precio, incorporando elementos como saltos o distribuciones no gaussianas. Incluso, es factible pensar en cómo se pueden extender esquemas como el de la transformada de Laplace al caso de opciones parisinas doble barrera.

A partir del modelo básico de valoración descrito en este documento se abre un amplio campo para la valoración de opciones parisinas bajo diferentes condiciones.

## Referencias

[1] Chesney M., Jeanblanc-Picqué, y Yor M. (1997). "Brownian excursions and Parisian barrier options", *Adv. in Appl. Probab.*, 29(1): 165-184.

[2] Haber R., Schonbucher P. y Wilmott P. (1999), "An american in paris", OFRC Working Papers Series. Oxford Financial Research Center.

[3] Hartley P. (2002). “Pricing parisian options by laplace inversion”, *Decisions in Economics and Finance*.

[4] Labart C. y Lelong J. (2005). “Pricing Parisian Options”, Centre d’Enseignement et de Recherche en Mathématiques et Calcul Scientifique.

[5] Rivera I. (2006).“Opciones barrera y opciones parisinas con volatilidad estocástica: una aplicación Monte Carlo al mercado de derivados energéticos”.

[6] Sch¨oreder M. (2003). “Brownian excursions and Parisian barrier options: a note”, *Adv. in Appl. Probab*. 40 (4): 855-864.