

Valoración de opciones sobre el círculo unitario. La transformada rápida de Fourier y el modelo binomial

John Freddy Moreno Trujillo*

john.moreno@uexternado.edu.co

* Docente investigador de la Facultad de Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales de la Universidad Externado de Colombia. Matemático de la Universidad Nacional de Colombia, magíster en matemática aplicada de la Universidad Nacional de Colombia, Phd(c) en Economía de la Universidad del Rosario.

Fecha de recepción: 3 de septiembre de 2012

Fecha de aceptación: 3 de julio de 2013

Forma de citar:

Moreno, J. (2013). Valoración de opciones sobre el círculo unitario. La transformada rápida de Fourier y el modelo binomial. *ODEON*, 7, 27-43.

1. Introducción

La transformada rápida de Fourier se ha desarrollado en la literatura como una importante herramienta para la valoración de activos contingentes en tiempo real, mientras mantiene en consideración características del subyacente al activo contingente como el exceso de curtosis, volatilidad estocástica y efectos de apalancamiento, como se evidencia en los trabajos de Heston (1993), Carr y Madan (1999), Carr y Wu (2004), entre otros. Además, provee de resultados con alta abstracción lo que hace que sean de fácil aplicación en el mundo real.

El objetivo central de este artículo es explicar cómo funciona la transformada discreta de Fourier y su implementación rápida en el modelo binomial de valoración de opciones, con el fin no solo de motivar su implementación en los procesos de valoración, sino de arrojar luces acerca de su implementación en tiempo continuo. Este trabajo está basado en el artículo de Alès Cerný titulado *Introduction to Fast Fourier Transform in Finance* publicado en el *Journal of Derivatives*, así como en los trabajos de Peter Carr (1999-2004).

2. La transformada discreta de Fourier

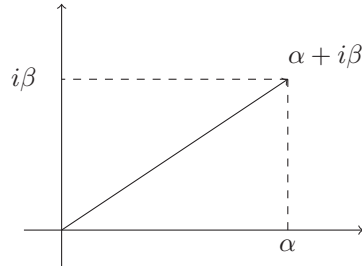
Para poder entender cómo el precio de opciones en el modelo binomial puede ser calculado mediante el uso de la transformada discreta de Fourier, iniciamos con una corta descripción de los números complejos y sus propiedades geométricas asociadas al círculo unitario, para luego definir la transformada discreta de Fourier (TDF) a partir de estas.

Posteriormente se mostrará cómo esta transformada está relacionada con el modelo de valoración binomial, para lo cual se asume que el lector está familiarizado con el concepto de valoración riesgo neutral.

2.1. Introducción a los números complejos

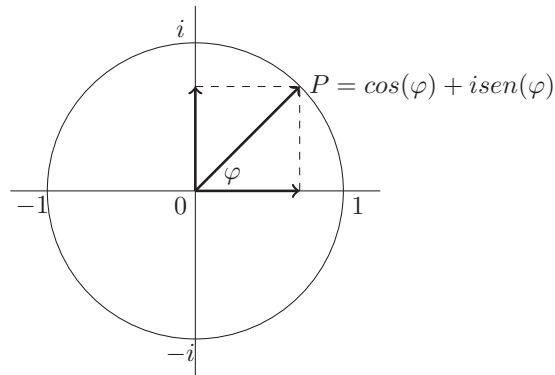
En términos coloquiales podemos decir que la transformada de Fourier trata acerca de puntos uniformemente distribuidos sobre un círculo, los cuales desde un punto de vista matemático pueden ser descritos más fácilmente mediante el uso de números complejos y sus propiedades geométricas.

En general, los números complejos son de la forma $\alpha + i\beta$, donde α y β son números reales e i es la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$. Estos números pueden ser convenientemente representados en el plano complejo como se muestra en la Figura (1).



Como se puede intuir de esta representación, el álgebra de números complejos está relacionada con las operaciones entre vectores de forma que: $(\alpha + i\beta) + (\gamma + i\theta) = (\alpha + \gamma) + i(\beta + \theta)$ y si k es un escalar, entonces $k(\alpha + i\beta) = (k\alpha + ik\beta)$.

Para dar mayor sentido a la multiplicación de complejos notemos primero que los podemos utilizar para describir movimientos alrededor del círculo unitario en el plano complejo, ya que un punto P sobre dicho círculo queda caracterizado por su argumento φ (el ángulo en posición normal que va desde el eje real hasta el segmento que une al origen con el punto P), como lo muestra la Figura 2.



Tenemos entonces que la multiplicación de números complejos es equivalente a adicionar argumentos (ángulos), ya que esta operación se define como:

$$z_1 z_2 = (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2) + i(\beta_1\alpha_2 + \alpha_1\beta_2) \quad (1)$$

y si denotamos el argumento de z_1 por φ_1 y el de z_2 por φ_2 , entonces:

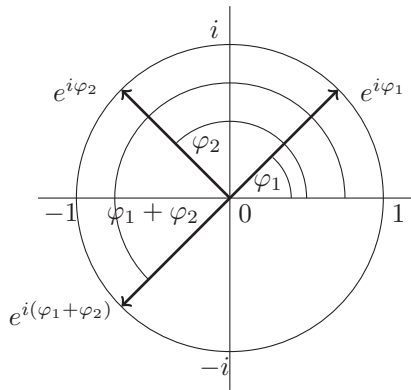
$$z_1 z_2 = (\cos(\varphi_1) + i \operatorname{sen}(\varphi_1))(\cos(\varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_2)) = (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (2)$$

Lo anterior puede ser expresado de forma más elegante y compacta mediante el uso de la fórmula de Euler:

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \operatorname{sen}(\varphi) \quad (3)$$

de donde,

$$z_1 z_2 = e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \quad (4)$$



Con lo descrito hasta el momento resulta sencillo construir un conjunto de puntos, igualmente espaciados sobre el círculo unitario. Supongamos, por ejemplo, que deseamos ubicar n puntos igualmente espaciados sobre el círculo unitario, como un n -ésimo del círculo unitario es descrito por $\frac{2\pi}{n}$ podemos ubicar el primer punto en $e^{i\frac{2\pi}{n}}$, lo que en general denotaremos por z_n .

Como lo vimos antes, la multiplicación por z_n causa una rotación en sentido anti-horario por un n -ésimo de círculo completo, colocando el segundo punto en $(z_n)^2$, el tercero en $(z_n)^3$ y así, tenemos los n puntos igualmente espaciados. Es importante notar que al estar moviéndonos sobre un círculo retornaremos al punto inicial después de n rotaciones en sentido antihorario, es decir:

$$\begin{aligned} (z_n)^0 &= (z_n)^n = (z_n)^{2n} = (z_n)^{3n} = \dots \\ (z_n)^1 &= (z_n)^{n+1} = (z_n)^{2n+1} = (z_n)^{3n+1} = \dots \end{aligned}$$

De lo anterior es posible concluir que:

$$\begin{aligned}(z_n)^0 &= (z_n)^{-n} = (z_n)^{-2n} = (z_n)^{-3n} = \dots \\ (z_n)^1 &= (z_n)^{-n+1} = (z_n)^{-2n+1} = (z_n)^{-3n+1} = \dots\end{aligned}$$

1. Si z_n es una rotación por un n -ésimo del círculo completo, es decir:

$$z_n = e^{i\frac{2\pi}{n}} \quad (5)$$

entonces,

$$(z_n)^n + (z_n)^1 + \dots + (z_n)^{n-1} = 0 \quad (6)$$

para cualquier n . Esto porque los puntos $(z_n)^i$; $i = 0, 1, \dots, n-1$ están igualmente distribuidos sobre el círculo unitario y el resultado de sumarlos no debe cambiar si rotamos el conjunto de puntos un n -ésimo del círculo completo, y el único vector que permanece inalterado después de tal rotación es el vector cero. Como un ejemplo sencillo de lo anterior considere los puntos $z_4 = e^{i\frac{2\pi}{4}}$, de forma que los valores $(z_4)^0, (z_4)^1, (z_4)^2, (z_4)^3$, corresponden a los valores $1, i, -1, -i$ en el plano imaginario respectivamente.

Claramente

$$(z_4)^0 + (z_4)^1 + (z_4)^2 + (z_4)^3 = 0$$

para este caso. Se propone al lector que lo verifique de nuevo para los valores $z_6 = e^{i\frac{2\pi}{6}}$ recordando que $\text{sen}(\pi/3) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ y que $\text{cos}(\pi/3) = \frac{1}{2}$.

2. Lo anterior puede ser generalizado para cualquier entero k entre 1 y $n-1$, de forma que:

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = 0 \quad (7) \quad (7)$$

para cualquier n . Este resultado se tiene de nuevo por simetría rotacional y se diferencia de (6) en que cada punto z_n ocurre varias veces.

3. Observemos sobre la ecuación (7) que si $k = 0$ entonces $(z_n^0)^n = 1$ para todo n , de donde por simetría rotacional:

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = n \quad \text{para } k = 0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots \quad (8)$$

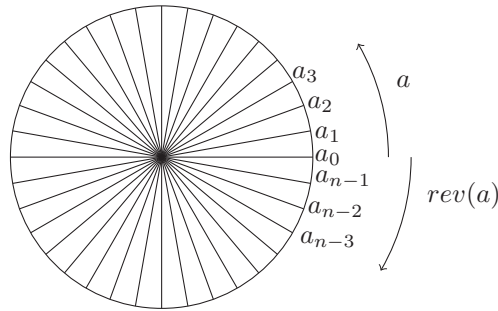
mientras que,

$$(z_n^k)^0 + (z_n^k)^1 + \dots + (z_n^k)^{n-1} = 0 \quad \text{para } k \neq 0, \pm n, \pm 2n, \pm 3n, \dots \quad (9)$$

Al considerar una sucesión de n números $a := \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$, definimos a en orden reverso como:

$$rev(a) = \{a_0, a_{n-1}, \dots, a_1\}$$

Esta definición corresponde a colocar los valores de a sobre un círculo en sentido horario, mientras que los valores de a estarían colocados en sentidos antihorario.



A partir de la definición de orden reverso se puede ver que $(z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1}$, es la misma secuencia $(z_n^{-k})^0, (z_n^{-k})^1, \dots, (z_n^{-k})^{n-1}$ tomada en orden reverso, es decir:

$$rev((z_n^{-k})^0, (z_n^{-k})^1, \dots, (z_n^{-k})^{n-1}) = (z_n^k)^0, (z_n^k)^1, \dots, (z_n^k)^{n-1} \quad (10)$$

ya que:

$$(z_n^{-k})^{n-j} = z_n^{-kn+kj} = z_n^{kj} = (z_n^k)^j \quad \text{para todo } j$$

2.2. La transformada discreta de Fourier

Sea $a = \{a_0, a_1, \dots, a_{n-1}\}$ una sucesión de números. La transformada de Fourier discreta de a es la sucesión de números $b = \{b_0, b_1, \dots, b_{n-1}\}$ tal que:

$$b_k = \frac{a_0(z_n^k)^0 + a_1(z_n^k)^1 + a_2(z_n^k)^2 + \cdots + a_{n-1}(z_n^k)^{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j(z_n^{jk}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j e^{i \frac{2\pi}{n} jk} \quad (11)$$

lo que en general escribimos como:

$$\mathcal{F}(a) = b$$

La transformada inversa de Fourier es:

$$\tilde{a}_l = \frac{\tilde{b}_0(z_n^{-l})^0 + \tilde{b}_1(z_n^{-l})^1 + \tilde{b}_2(z_n^{-l})^2 + \cdots + \tilde{b}_{n-1}(z_n^{-l})^{n-1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{b}_k(z_n^{-lk}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{b}_k e^{-i \frac{2\pi}{n} lk} \quad (12)$$

lo que en general escribimos como:

$$\tilde{a} = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{b})$$

A partir de estas definiciones no es difícil mostrar que se tienen las siguientes relaciones: 6

- $\mathcal{F}^{-1}(\tilde{b}) = \mathcal{F}(\text{rev}(\tilde{b}))$.
- $\mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(\tilde{b})) = \mathcal{F}(\tilde{b})$.
- $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(a)) = \mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(a)) = a$.

3. El modelo binomial de valoración de opciones

Con el fin de mostrar la aplicación de la transformada discreta de Fourier y su inversa en la valoración de opciones, consideramos un activo riesgoso cuyo precio sigue un comportamiento descrito por la variable aleatoria $S(t)$ con $t = 0, 1, \dots, N$, tal que:

$$S(t) = S(0)u^M d^{N-M} \text{ con probabilidad } \binom{N}{M} p^{N-M} (1-p)^M \quad (13)$$

donde p es la probabilidad de mercado asociada al evento en el cual el activo aumenta de precio por un factor u , $(1-p)$, la probabilidad de mercado asociada con el evento en el cual el precio del activo disminuye por un factor d (asumiremos en general que $d = 1/u$), y $M = 0, 1, \dots, N$.

Como ejemplo del modelo anterior consideremos un activo con valor inicial $S(0) = 510$, $u = 1,05$, $d = 0,96$. El comportamiento del precio de este activo para $N = 3$ es:

$S(0)$	$S(1)$	$S(2)$	$S(3)$
510	535.5	562.275	590.38875
	489.6	514.08	539.784
		470.016	493.5158
			451.21536

Si consideramos ahora una opción *call* europea con vencimiento en $T = 3$ y $K = 535,5$. Su valor al ejercicio está determinado por la expresión:

$$C(3) = \max\{S(3) - 535.5; 0\} = (S(3) - 535.5)^+ \quad (14)$$

y su valoración en t por riesgo neutral está dada por la expresión:

$$C(t) = \frac{1}{1 + r_f} [qC^u(t+1) + (1 - q)C^d(t+1)]$$

donde r_f es la tasa libre de riesgo, q es la probabilidad de riesgo neutral asociada al estado en el cual el precio del activo subyacente a la opción sube de precio, luego $(1 - q)$ es la probabilidad de riesgo neutral asociada al estado en el que el precio del activo subyacente baja. $C^u(t+1)$ es el valor de la opción si el precio del subyacente aumentó entre t y $t+1$ y $C^d(t+1)$ es el valor de la opción, si el precio del subyacente disminuyó entre t y $t+1$.

Recordemos que en el modelo binomial de valoración las probabilidades de riesgo neutral se establecen de acuerdo con las expresiones:

$$q = \frac{1 + r_f - d}{u - d} \quad ; \quad 1 - q = \frac{u - 1 - r_f}{u - d}$$

Continuando con el ejemplo y asumiendo que la tasa libre de riesgo por mes es de 3 %, tenemos que:

$$q = \frac{1 + 0,03 - 0,96}{1,05 - 0,96} = 0,78 \quad ; \quad 1 - q = \frac{1,05 - 1 - 0,03}{1,05 - 0,96} = 0,22$$

y, por lo tanto, la fórmula de valoración riesgo neutral de la opción *call* es:

$$C(t) = \frac{1}{1,03} [0,78C^u(t+1) + 0,28C^d(t+1)] \quad (15)$$

La aplicación recursiva de la expresión (15), con valores terminales determinados por la expresión (14), determina los siguientes valores para la opción:

$C(0)$	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$
25,215	32.694	42.372	54.888
	2.442	3.234	4.284
		0	0
			0

3.1. Valoración sobre el círculo unitario

Para dos vectores n - dimensionales cualesquiera $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ y $b = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$, se define su *convolución circular* como un nuevo vector $c = a * b$ tal que el j -ésimo de este vector está determinado por:

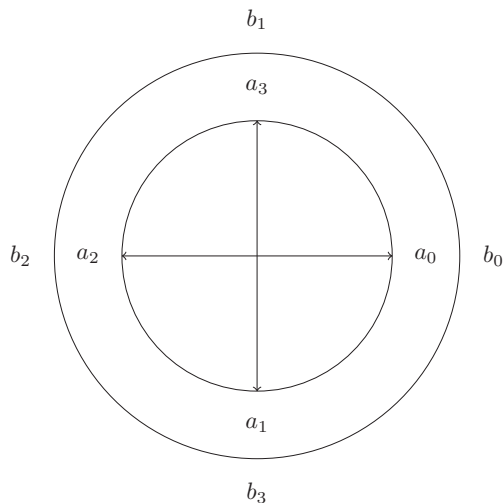
$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k \quad (16)$$

Se puede observar de esta definición que el índice $j - k$ puede ser negativo, pero si este es el caso se adiciona n para obtener un resultado entre 0 y $n - 1$, lo cual es consistente con distribución uniforme de puntos sobre un círculo, como se explicó en secciones anteriores.

Como ejemplo consideremos los vectores $a = [1, 2, 3, 4]$ y $b = [0, 2, 4, 6]$, luego $n = 4$ y en la convolución $c = a * b$, el elemento c_0 está dado por:

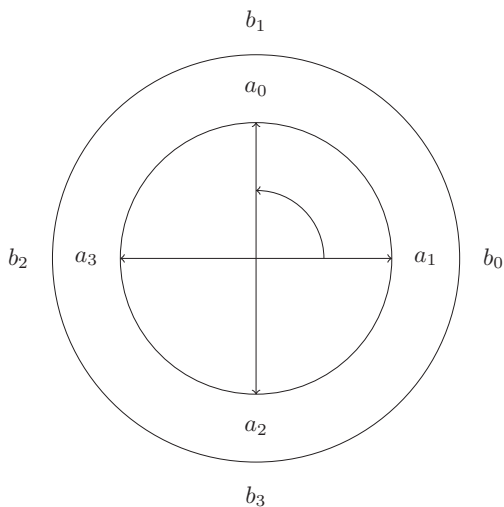
$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{k=0}^3 a_{0-k} b_k \\ &= a_0 b_0 + a_{-1} b_1 + a_{-2} b_2 + a_{-3} b_3 \\ &= a_0 b_0 + a_3 b_1 + a_2 b_2 + a_1 b_3 \\ &= (1)(0) + (3)(4) + (2)(6) = 32 \end{aligned}$$

Gráficamente este resultado lo podemos obtener al colocar los valores del vector a , igualmente espaciados sobre un círculo en sentido horario y los valores del vector b también igualmente espaciados, sobre un círculo concéntrico al del vector a , en sentido antihorario, como lo muestra la Figura.



Podemos ver que la multiplicación de los valores correspondientes a las posiciones entre los dos círculos, y la suma de los resultados de dichas multiplicaciones corresponden a c_0 .

De igual forma, podemos observar que los siguientes valores del vector de convolución circular se puede obtener al girar el círculo interno un cuarto de vuelta en sentido antihorario,



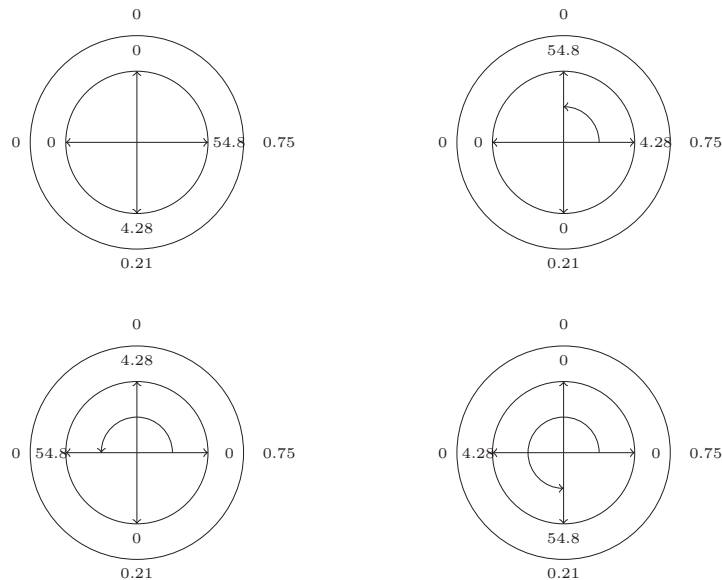
y vemos que $c_1 = a_1b_0 + a_0b_1 + a_3b_2 + a_2b_3$. Podemos entonces repetir este procedimiento para calcular los restantes componentes del vector de convolución del ejemplo, y en general para calcular la convolución circular de dos vectores n -dimensionales cualesquiera.

Mediante el concepto de convolución circular podemos valorar una opción al analizar los resultados que se obtienen de realizar la convolución circular entre el vector de valor de la opción en $t + 1$, en orden reverso, y el vector de probabilidades de riesgo neutral dividido por $1 + r_f$, en orden reverso, es decir, $rev(C(t + 1)) * rev(q)/(1 + r_f)$.

Como se explicó antes, geoméricamente esto se puede hacer al colocar los valores de la opción en $t + 1$ y las probabilidades divididas por la tasa libre, igualmente espaciados sobre círculos concéntricos en sentido horario. Luego rotamos el círculo con los valores de la opción en $t + 1$ en sentido antihorario para obtener los precios de la opción de mayor a menor en el período inmediatamente anterior.

Es importante aclarar que al vector que contiene las probabilidades de riesgo neutral se le han agregado ceros para que alcance la misma dimensión del vector de valores de la opción y sea posible realizar la convolución circular.

Si continuamos con el ejemplo que venimos considerando, tenemos que $C(3) = [54.888, 4.284, 0, 0]$ y $q/(1 + r_f) = [0.75512, 0.21574, 0, 0]$ aproximadamente. La siguiente Figura muestra los valores ya ubicados sobre círculos concéntricos y las tres rotaciones.



Tenemos entonces que para los valores de la opción en $t = 2$ evaluamos:

$$C(2) = C(3) * rev(q)/(1 + r_f) = (42.37, 3.23, 0, 11.84) \quad (17)$$

Es importante notar que el último valor del vector no lo necesitamos y lo podemos ignorar. La siguiente Tabla resume el resultado de las convoluciones circulares.

$C(0)$	$C(1)$	$C(2)$	$C(3)$
25,215	32.694	42.372	54.888
2.395	2.442	3.234	4.284
5.83	2.55	0	0
20.71	18.08	11.84	0

Podemos concluir, entonces, que al considerar el modelo binomial donde $C(j)$ es el vector de precios de la opción en el instante $j = 0, 1, \dots, N$, y denotando por q al vector de probabilidades de riesgo neutral, agregándole ceros para que su dimensión coincida con la de $C(N)$, por inducción hacia atrás se tiene que:

$$\begin{aligned}
 C(N-1) &= C(N) * rev(q) / (1 + r_f) \\
 C(N-2) &= C(N) * rev(q) * rev(q) / (1 + r_f)^2 \\
 C(N-3) &= C(N) * rev(q) * rev(q) * rev(q) / (1 + r_f)^3 \\
 &\vdots \\
 C(j) &= C(N) * \overbrace{rev(q) * rev(q) * rev(q) \cdots * rev(q)}^{(N-j)\text{-veces}} / (1 + r_f)^j
 \end{aligned}$$

donde solo consideramos los primeros $j+1$ componentes del vector para efectos de valoración. Tenemos que, bajo el modelo binomial, el valor de una opción en el instante j con $j = 0, 1, \dots, N$ puede ser determinado mediante la expresión:

$$C(j) = C(N) * \overbrace{rev(q) * rev(q) * rev(q) \cdots * rev(q)}^{(N-j)\text{-veces}} / (1 + r_f)^j \quad (18)$$

Esta *valoración circular* de la opción puede ser expresada en términos de transformadas discretas de Fourier teniendo en cuenta que:

$$\mathcal{F}(a * b) = \sqrt{n} \mathcal{F}(a) \mathcal{F}(b) \quad (19)$$

$$\mathcal{F}^{-1}(a * b) = \sqrt{n} \mathcal{F}^{-1}(a) \mathcal{F}^{-1}(b) \quad (20)$$

donde a y b son vectores de dimensión n . La demostración de estos resultados (19) y (20) es la siguiente.

Sean $a = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}]$ y $b = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$, si calculamos la convolución circular $c = a * b$ a partir de la definición (16) se tiene que:

$$c_j = \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} b_k \quad (21)$$

y al calcular $d = \mathcal{F}(c)$ los componentes del vector resultante están dados por:

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} c_j z_n^{jm} \quad (22)$$

sustituyendo (21) en (22) se tiene,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} c_j z_n^{jm} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{j-k} b_k \right) z_n^{jm}$$

Colocando z_n^{jm} dentro del paréntesis interno y escribiéndola como el producto $z_n^{jm} = z_n^{(j-k)m} z_n^{km}$ se tiene

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{j-k} z_n^{(j-k)m} b_k z_n^{km}$$

cambiando el orden de la suma,

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} a_{j-k} z_n^{(j-k)m} b_k z_n^{km}$$

y sacando de la sumatoria interna el termino $b_k z_n^{km}$ que no depende de j

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} b_k z_n^{km} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{j-k} z_n^{(j-k)m} \right) \quad (23)$$

Al considerar la sumatoria dentro del paréntesis de la ultima expresión se puede ver que:

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{j-k} z_n^{(j-k)m} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j z_n^{(j)m}$$

pues son los mismos términos los que se están sumando y k solo altera el orden en que esta suma se está realizando (en cualquier caso es una vuelta completa sobre el círculo, empezando en el punto k -ésimo).

Si se remplace esta última expresión (23) tenemos que:

$$d_m = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} b_k z_n^{km} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_j z_n^{(j)m} \right)$$

de donde,

$$d_m = \sqrt{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} b_k z_n^{km} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=0}^{n-1} a_j z_n^{(j)m} \right) \quad (24)$$

y las expresiones dentro del paréntesis corresponden a las componentes m -ésimas de las transformadas de Fourier de a y b , lo que completa la demostración de (19). La prueba de (20) es análoga a la anterior.

Si tomamos transformada inversa a ambos lados de la expresión (18) y utilizamos la propiedad (20) tenemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}[C(0)] &= \mathcal{F}^{-1} \left[C(N) * \overbrace{\text{rev}(q) * \text{rev}(q) * \text{rev}(q) \cdots * \text{rev}(q)}^{(N)\text{-veces}} / (1 + r_f)^N \right] \\ &= \frac{1}{(1 + r_f)^N} \sqrt{\dim(C(N))} \mathcal{F}^{-1}(C(N)) \mathcal{F}^{-1} \left(\overbrace{\text{rev}(q) * \text{rev}(q) * \text{rev}(q) \cdots * \text{rev}(q)}^{(N)\text{-veces}} \right) \\ &= \frac{1}{(1 + r_f)^N} \sqrt{N + 1} \mathcal{F}^{-1}(C(N)) (\sqrt{N + 1})^{N-1} \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(q))^N \\ &= \frac{1}{(1 + r_f)^N} \mathcal{F}^{-1}(C(N)) (\sqrt{N + 1})^N \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(q))^N \\ &= \mathcal{F}^{-1}(C(N)) \left[\sqrt{N + 1} \mathcal{F}^{-1}(\text{rev}(q)) / (1 + r_f) \right]^N \\ &= \mathcal{F}^{-1}(C(N)) \left[\sqrt{N + 1} \mathcal{F}(q) / (1 + r_f) \right]^N \end{aligned}$$

si aplicamos la transformada a ambos lados en esta última expresión, tenemos que:

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}^{-1}(C(0))) = C(0) = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(C(N)) \left[\sqrt{N + 1} \mathcal{F}(q) / (1 + r_f) \right]^N \right)$$

Se concluye que al considerar un modelo financiero con activos, cuyos retornos son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, representados por un árbol binomial recombinado de N períodos y $N + 1$ fechas de negociación y con tasa de interés constante, y siendo $C(N)$ el vector $N + 1$ -dimensional que contiene los pagos finales de una opción europea pactada sobre algún activo y q el vector que contiene las probabilidades de riesgo neutral de un paso adicionándole $N - 1$ ceros, entonces el primer elemento del vector $N + 1$ -dimensional $C(0)$ determinado por:

$$C(0) = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(C(N)) \left[\sqrt{N+1} \mathcal{F}(q) / (1+r_f) \right]^N \right) \quad (25)$$

es el precio de no arbitraje de la opción en $t = 0$. De forma equivalente, dada la simetría entre la transformada y la transformada inversa de Fourier, se tiene que:

$$C(0) = \mathcal{F}^{-1} \left(\mathcal{F}(C(N)) \left[\sqrt{N+1} \mathcal{F}^{-1}(q) / (1+r_f) \right]^N \right) \quad (26)$$

4. Aplicaciones de la transformada en tiempo continuo

Es posible extender las ideas desarrolladas hasta el momento a modelos en tiempo continuo, manteniendo la estructura presentada en las ecuaciones (25) y (26). Para esto se reescriben estas expresiones de forma que se haga explícita la dependencia de la fecha de maduración T y la frecuencia de paso Δt , tal que $T = \Delta t \cdot N_{\Delta t}$, donde $N_{\Delta t}$ son los períodos de negociación y r_f la tasa libre de riesgo instantánea.

$$C(0) = \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(C_{T,\Delta t}) \left[\sqrt{N_{\Delta t} + 1} \mathcal{F}(q_{\Delta t}) e^{-r_f \Delta t} \right]^{N_{\Delta t}} \right)$$

es decir,

$$C(0) = e^{-r_f T} \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(C_{T,\Delta t}) \left[\sqrt{N_{\Delta t} + 1} \mathcal{F}(q_{\Delta t}) \right]^{N_{\Delta t}} \right)$$

La expresión $\left[\sqrt{N_{\Delta t} + 1} \mathcal{F}(q_{\Delta t}) \right]^{N_{\Delta t}}$ es conocida como la función característica bajo riesgo neutral del logaritmo del precio del activo riesgoso. En la práctica uno de los principales intereses en los modelos, que son la versión en el límite de (27), es buscar una forma cerrada para esta función. Este es el caso en la clase de modelos exponenciales Lévy con proceso de volatilidad estocástica afín, discutido por Carr

y Wu en sus trabajos de 2004. Esta clase incluye modelos como el de volatilidad estocástica de Heston de 1993, Duffie y otros del 2000, y en general, todos los modelos Lévy exponenciales.

En el caso límite en tiempo continuo, la transformada discreta de Fourier es remplazada por la transformada continua de Fourier, lo que significa que buscamos alguna función $\varphi(v)$ tal que:

$$\begin{aligned} C_0(\ln(s_0)) &= e^{-r_f T} E^Q [C_T(\ln(S_T))] \\ &= e^{-r_f T} E^Q \left[\int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \varphi(v) e^{iv \ln(S_T)} dv \right] \\ &= e^{-r_f T} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \varphi(v) E^Q \left[e^{iv \ln(S_T)} \right] dv \end{aligned}$$

donde $E^Q [e^{iv \ln(S_T)}]$ es la función característica bajo riesgo neutral del logaritmo del precio del activo, lo que hace clara la relación con el modelo en tiempo discreto presentado en la sección anterior. De igual forma, al comparar los dos modelos podemos observar que la función $\varphi(v)$ juega el papel de $\mathcal{F}^{-1}(C_{T,\Delta t})$.

5. Conclusiones

Dado que la fórmula de valoración en tiempo continuo

$$C_0(\ln(s_0)) = e^{-r_f T} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \varphi(v) E^Q \left[e^{iv \ln(S_T)} \right] dv$$

puede verse como el límite de la expresión en tiempo discreto

$$C(0) = e^{-r_f T} \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1}(C_{T,\Delta t}) \left[\sqrt{N_{\Delta t} + 1} \mathcal{F}(q_{\Delta t}) \right]^{N_{\Delta t}} \right)$$

es posible utilizar esta versión discreta y la transformada discreta de Fourier para hacer aproximaciones al modelo en continuo, lo que no solo brinda la posibilidad de obtener resultados numéricos rápidos respecto al valor de opciones en modelos más elaborados que lo común, como es el caso de los modelos Lévy exponenciales, si no que garantizan que el modelo que se está utilizando mantiene propiedades muy importantes del precio del activo subyacente a la opción, lo que el modelo de valoración estándar Black-Scholes no hace.