Transformaciones integrales y sus aplicaciones en finanzas

John Freddy Moreno Trujillo*

* Matemático y Magíster en Matemática Aplicada de la Universidad Nacional de Colombia. Docente Investigador de la Facultad de Finanzas, Gobierno y Relaciones Internacionales de la Universidad Externado de Colombia. jhon.moreno@uexternado.edu.co
Fecha recepción: 01 de junio de 2015.
Fecha de aceptación: 01 de agosto de 2015.
Forma de citar

Moreno Trujillo, J. F. (2015). Transformaciones integrales y sus aplicaciones en nanzas. *ODEON*, 9, pp. 257-265. DOI: http://dx.doi.org/10.18601/17941113.n9.07

1. Introducción

En la teoría y la práctica financiera es bien conocida la importancia de la ecuación diferencial parcial de Black-Scholes (EDP-BS) en la valoración de derivados financieros. Esta ecuación permite encontrar o aproximar la función que establece el valor de un derivado, bajo determinadas condiciones iniciales y de frontera. Si denotamos por $V(t, S_t)$ al precio de un derivado en el instante t, mostrando que es función del tiempo t y del precio del subyacente S_t, la EDP-BS es:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + r_f S_t \frac{\partial V}{\partial S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2} - r_f V = 0 \\ V(T, S_T) = f(S_T) \end{cases} \tag{1}$$

donde r_f es la tasa de interés libre de riesgo y $f(S_T)$ es el valor del derivado en el instante de vencimiento T.

Existen diversos métodos para la resolución de esta ecuación o de ecuaciones análogas relacionadas con la valoración de activos contingentes particulares, por ejemplo, procedimientos analíticos vía cambios de variable o métodos numéricos que buscan aproximaciones de las derivadas presentes en la ecuación mediante diferencias finitas.

En este artículo se expone la aproximación a la resolución de esta ecuación mediante la aplicación de transformaciones integrales, en particular las transformadas de Mellin y Laplace. En este procedimiento *se aplica una transformación integral sobre la ecuación diferencial parcial considerada, transformándola en una ecuación diferencial ordinaria resoluble por métodos estándar, para luego aplicar sobre la solución encontrada la transformación inversa.* En la figura 1 se esquematiza el procedimiento, donde $\mathcal{I}$ denota la transformación integral aplicada e $\mathcal{I}^{-1}$ su transformación inversa.

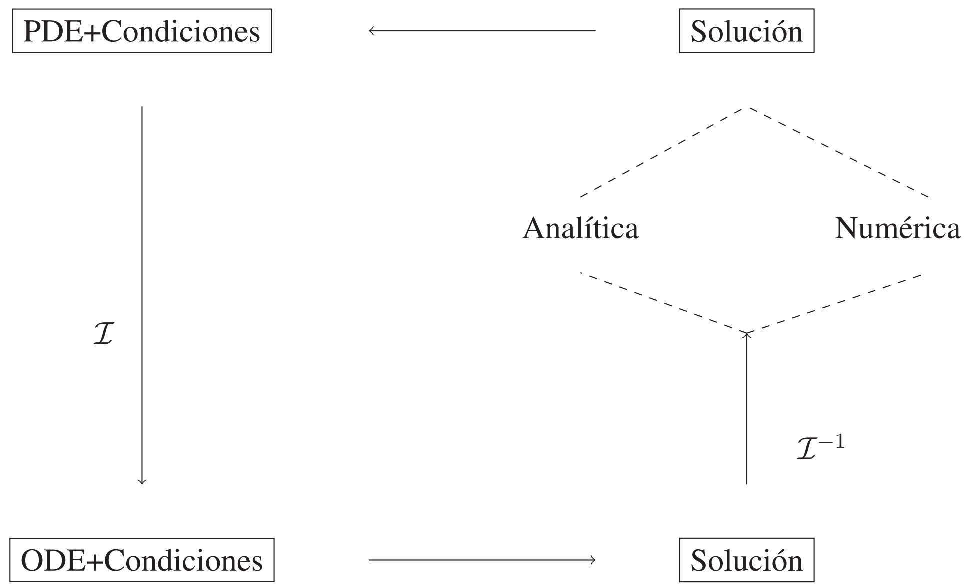

Figura 1: Resolución de la EDP por transformación integral.

2. Transformaciones integrales

La *transformación integral* de una función $f(x)$ sobre $[a, b]$, denotada por $\mathcal{I}\{f(x)\} = F(k)$, se define como:

$$\mathcal{I}\{f(x)\} = F(k) = \int_a^b K(x, k) f(x) dx \tag{2}$$

donde $K(x, k)$ es el *Kernel* o *núcleo* de la transformación. El operador $\mathcal{I}$ es denominado transformación integral, $F(k)$ es la imagen por el operador $\mathcal{I}$ de la función objetivo $f(x)$ y k es la variable de transformación.

Existe una amplia variedad de importantes transformaciones integrales dentro de las cuales se destacan las transformadas de: *Laplace y Mellin*, cada una de las cuales se define mediante la selección particular del núcleo $K(x, k)$, y diferentes valores de a y b. En las siguientes secciones se expondrá la aplicación de la transformada de Mellin y Laplace en la resolución del problema de valoración de activos contingente mediante la aplicación de este tipo de transformaciones sobre la EDP correspondiente.

Es evidente que el operador $\mathcal{I}$ es lineal, y con el ánimo de obtener $f(x)$ a partir de $F(k) = \mathcal{I}\{f(x)\}$, se introduce el *operador inverso* $\mathcal{I}^{-1}$ tal que:

$$\mathcal{I}^{-1}\{F(k)\} = f(x) \tag{3}$$

que también resulta ser lineal.

3. Transformada de Mellin

La transformada integral de Mellin de una función $g(x)$ se puede definir si la función $g(x)x^{k-1} \in L^1([0, \infty)])$, es decir si la función $g(x)x^{k-1}$ es integrable sobre los reales no negativos, y la transformada se define como:

$$g^*(k) = \mathcal{M}[g(x)](k) = \int_0^\infty g(x)x^{k-1}dx \quad Re(k) \leq m \tag{4}$$

Algunas propiedades de la transformada de Mellin son:

1.
$$\mathcal{M}[xg'(x)](k) = -kg^*(k)$$

2.
$$\mathcal{M}[x^2 g''(x)](k) = (k^2 + k)g^*(k)$$

3. La inversa de la transformada de Mellin se define como:

$$\mathcal{M}^{-1}[g^*(k)](x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} g^*(k)x^{-x}dk \quad \alpha > m \tag{5}$$

3.1 Aplicación a la EDP-BS

Considerando que la función $V(t, S_t)$ es tal que $\frac{\partial V}{\partial t}$, $\frac{\partial V}{\partial S_t}$ y $\frac{\partial^2 V}{\partial S_t^2}$ son transformables Mellin, y siendo:

$$v(t)(k) = \mathcal{M}[V(t,\cdot)](k) = \int_0^\infty S^{k-1}V(t,S)dS \tag{6}$$

se puede aplicar la transformada de Mellin a la EDP-BS, obteniendo:

$$\mathcal{M}\left[\frac{\partial V}{\partial t}\right] = r_f\mathcal{M}\left[V\right] - \frac{1}{2}\sigma^2\mathcal{M}\left[S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right] - r_f\mathcal{M}\left[S\frac{\partial V}{\partial S}\right]$$

$$\frac{d}{dt}(v(t)(k)) = -\underbrace{\left(\frac{1}{2}\sigma^2k^2 + \left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r_f\right)k - r_f\right)}_{p(k)}v(t)(k) \tag{7}$$

de donde,

$$\frac{d}{dt}(v(t)(k)) = -p(k)(v(t)(k)) \quad 0 \leq t \leq T \quad v(T)(k) = f^*(k) \tag{8}$$

que es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución es:

$$v(t)(k) = f^*(k)e^{-p(k)}(t-T) \quad 0 \leq t \leq T \tag{9}$$

y aplicando la transformada inversa sobre (9), con el cambio de variable $k = \alpha + i\tau$, $dk = id\tau$, se tiene que:

$$V(t,S) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S^{-(\alpha+i\tau)}f^*(\alpha+i\tau)e^{\hat{p}(\tau)(t-T)}d\tau \tag{10}$$

donde,

$$\hat{p}(\tau) = -p(\alpha+i\tau) = \frac{1}{2}\sigma^2\tau^2 + \left[r_f - \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\sigma^2\right]\tau i - \left[\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \alpha\left(\frac{1}{2}\sigma^2 - r_f\right) - r_f\right]$$

expresión que permite determinar el valor del derivado en consideración.

4. Transformada de Laplace

La transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(x)\}$ se define mediante el núcleo $K(x,k) = e^{-kx}$, con $a = 0$ y $b = \infty$, luego:

$$\mathcal{L}\{f(x)\} = \bar{f}(k) = \int_0^{\infty} e^{-kx} f(x)dx \qquad (11)$$

y la transformada inversa se define como:

$$\mathcal{L}^{-1}\{\bar{f}(k)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{kx}\hat{f}(k)dk \qquad c > 0 \qquad (12)$$

Algunas propiedades relevantes de la transformada de Laplace aplicada sobre las derivadas parciales de una función $u(x,t)$ son:

$$L\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\right\} = k\bar{u}(x,k) - u(x,0) \quad ; \quad L\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = \frac{d\bar{u}}{dx} \quad ; \quad L\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right\} = \frac{d^2\bar{u}}{dx^2} \qquad (13)$$

4.1 Aplicación a la EDP-BS

Al realizar los cambios de variables:

$$\tau = \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \quad ; \quad z = \ln(S_t) \qquad (14)$$

se puede considerar una nueva función $f(\tau,x)=V(t,S_t)$, que satisface:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial \tau}+\left(\frac{r_f}{\sigma^2/2}-1\right)\frac{\partial f}{\partial z}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}-\frac{r_f}{\sigma^2/2}f=0 \\ f(0,z)=V(T,e^z) \end{cases} \tag{15}$$

y al aplicar la transformada de Laplace sobre (15) se llega a la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2}{dz^2}\bar{f}(k,z)+(m-1)\frac{d}{dz}\bar{f}(k,z)-(m+k)\bar{f}(k,z)+C \tag{16}$$

donde $m=r_f/(\sigma^2/2)$.

Para resolver la ecuación (16) de define $\bar{f}(k,z)=\exp(\alpha z)\bar{g}(k,z)$, donde $\alpha=(1-m)/2$, entonces $\bar{g}(k,z)$ resuelve la ecuación:

$$\frac{d^2}{dz^2}\bar{g}(k,z)-(b+k)\bar{g}(k,z)+e^{-\alpha z}C=0 \tag{17}$$

donde $b=\alpha^2+m$. La ecuación 17 puede resolverse separando las regiones $z>k$ y $z\leq k$, para tener:

$$\bar{g}(k,z)=\begin{cases} \frac{e^{-(\alpha-1)z}}{k}-\frac{e^{-(\alpha z-k)}}{k+m}+h_1(k,z)A_1+h_2(k,z)A_2 & \text{si } z>k \\ h_1(k,z)B_1+h_2(k,z)B_2 & \text{si } z\leq k \end{cases} \tag{18}$$

con $h_1(\kappa,z)=e^{-\sqrt{b+kz}}$, $h_2(\kappa,z)=e^{\sqrt{b+kz}}$ y las constantes A_1, A_2, B_1 y B_2 son determinadas por las condiciones de frontera del problema.

Referencias

Flajolet, P., Régnier, M., & Sedgewick, R. (1985). *Some uses of the Mellin integral transform in the analysis of algorithm* (pp. 241-254). Springer Berlin Heidelberg.

Frontczak, R., & Schöbel, R. (2010). On modified Mellin transforms, Gauss-Laguerre quadrature, and the valuation of American call options. *Journal of computational and applied mathematics*, 234(5), 1559-1571.

Frontczak, R., & Schöbel, R. (2008). Pricing American options with Mellin transforms (No. 319). *Tübinger Diskussionsbeitrag*.

Fu, M. C., Madan, D. B., & Wang, T. (1999). Pricing continuous Asian options: a comparison of Monte Carlo and Laplace transform inversion methods. *Journal of Computational Finance*, 2(2), 49-74.

Panini, R., & Srivastav, R. P. (2004). Option pricing with Mellin transnforms. *Mathematical and Computer Modelling*, 40(1), 43-56.

Sepp, A. (2004). Analytical pricing of double-barrier options under a double-exponential jump diffusion process: applications of Laplace transform. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 7(02), 151-175.