

# Propuesta metodológica para la valoración de opciones sobre tasa de cambio USD-COP

Carlos Castañeda Acosta\*

---

\* Magíster en Finanzas. Trader. Gerencia Financiera. Seguros Bolívar, Bogotá (Colombia).  
[carlos.castaneda@segurosbolivar.com].

Fecha de recepción: 27 de junio de 2017.

Fecha de aceptación: 15 de julio de 2017.

Para citar este artículo:

Castañeda Acosta, C. (2017). Propuesta metodológica para la valoración de opciones sobre tasa de cambio USD-COP. ODEON, 12, pp. 77-117. DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n12.04>



## Introducción

Desde su publicación en 1973, el modelo de valoración de opciones desarrollado por Fisher Black y Myron Scholes se ha convertido en un estándar para el sector financiero a nivel global, y su uso, tanto por las mesas de negociación como por la academia, lo ha convertido en uno de los pilares de las finanzas modernas. Como todo modelo, parte de unos supuestos que permiten su aplicación, y son precisamente estos supuestos la base de numerosas discusiones sobre la certeza de sus resultados.

En los últimos años se han presentado significativos avances que han permitido, mediante el abandono de uno o varios de estos supuestos, desarrollar metodologías de valoración consistentes con el principio de no arbitraje y que reflejan adecuadamente el comportamiento de los activos que sirven como subyacentes, o condiciones del mercado particulares que no son capturadas por el modelo Black-Scholes original, como la estructura de volatilidad o la de tasas de interés.

En este documento se realiza una introducción a la valoración de opciones en el mercado colombiano, en particular, sobre tipo de cambio dólar-peso. Primero, se realiza una breve revisión de las características del mercado de tasa de cambio local, luego se presentan algunas metodologías de valoración, y, finalmente, se muestra la aplicación de estas metodologías como propuesta para la valoración de opciones europeas sobre tipo de cambio, describiendo algunos resultados que son deseables en el marco de las condiciones del mercado local colombiano. Como desarrollo adicional se presentan los algoritmos creados a lo largo de la investigación, con el fin de que sirvan como insumo en futuros estudios.

## 1. Características del mercado cambiario en Colombia

### 1.1 Tipo de cambio y mercado cambiario

La tasa de cambio es la cantidad de una moneda que se paga por otra. Según la Resolución Externa No. 8 de 2000 del Banco de la República, el mercado cambiario está constituido por la totalidad de las divisas que deben canalizarse obligatoriamente por conducto de los intermediarios autorizados para el efecto o a través del mecanismo de compensación previsto.

## 1.2 Operaciones autorizadas en el mercado cambiario

Las operaciones que deben canalizarse obligatoriamente a través del mercado cambiario son las siguientes:

- Importación y exportación de bienes.
- Operaciones de endeudamiento externo celebradas por residentes del país, así como los costos financieros inherentes de las mismas.
- Inversiones de capital del exterior en el país, así como los rendimientos asociados a las mismas.
- Inversiones de capital colombiano en el exterior, así como los rendimientos asociados a las mismas.
- Inversiones financieras en títulos emitidos y en activos radicados en el exterior, así como sus rendimientos.
- Avaless y garantías en moneda extranjera.
- Operaciones de derivados.

## 1.3 Intermediarios autorizados

Son intermediarios del mercado cambiario (IMC):

- Bancos comerciales.
- Bancos hipotecarios.
- Corporaciones financieras.
- Compañías de financiamiento.
- Financiera de Desarrollo Nacional.
- Banco de Comercio Exterior de Colombia (BANCOLDEX).
- Cooperativas financieras.
- Sociedades comisionistas de Bolsa.
- Sociedades de intermediación cambiaria y de servicios financieros especiales.

## 1.4 Algunos tipos de regímenes de tasa de cambio

### 1.4.1 Régimen de tasa de cambio fija

Bajo este esquema, el Banco Central se compromete a que la tasa de cambio se mantendrá en un valor predeterminado. En el escenario en que el mercado presente un exceso en la demanda de divisas, el Banco Central suministra al mercado las divisas necesarias para mantener la tasa de cambio en su valor prefijado. De la

misma forma, cuando se presentan excesos de oferta, el Banco Central compra las divisas para evitar la caída de la tasa de cambio.

## 1.5 Régimen de banda cambiaria

En 1994, Colombia adoptó un régimen de banda cambiaria, el cual representa un esquema intermedio entre un régimen de tasa de cambio fija y otro de flotación libre. La banda cambiaria está definida por los límites dentro de los cuales puede fluctuar la tasa de cambio.

### 1.5.1 Estructura de la banda cambiaria

**Tasa máxima:** también conocida como *tasa techo*, corresponde al nivel máximo de la tasa que el Banco Central está dispuesto a permitir en el mercado interbancario de dólares. Cuando las fuerzas de oferta y demanda del mercado llevan la tasa de cambio a este nivel, el Banco Central interviene para vender tantos dólares como sea necesario para mantener la tasa de cambio en este valor. La tasa máxima o techo varía diariamente, dependiendo de la pendiente de la banda cambiaria.

**Tasa mínima:** también conocida como *tasa piso*, corresponde al nivel mínimo de la tasa que el Banco Central está dispuesto a permitir en el mercado interbancario de dólares. Cuando el mercado lleva la tasa a este nivel, el Banco Central interviene para comprar tantos dólares como sea necesario para que el tipo de cambio se mantenga en este valor. Al igual que la tasa máxima, depende de la pendiente de la banda cambiaria.

**Pendiente de la banda cambiaria:** corresponde al porcentaje anual de devaluación que se aplica a la tasa piso y a la tasa techo.

**Amplitud de la banda cambiaria:** es la distancia que existe entre la tasa piso y la tasa techo. Está definida como un porcentaje medido desde un punto medio.

## 1.6 Régimen de tasa de cambio flexible

En este régimen el Banco Central se abstiene de intervenir, por lo que la tasa de cambio está totalmente determinada por la oferta y la demanda de divisas en el mercado. A partir del 25 de septiembre de 1999, fue eliminado en Colombia el sistema de banda cambiaria y se adoptó un sistema de libre flotación del tipo de cambio nominal.

Respecto al desmonte de la banda cambiaria, en septiembre de 1999, varios autores, entre ellos miembros de la junta directiva del Banco de la República en el momento, han señalado las razones por las cuales se optó por este giro en la política. Según Villar (1999), era necesario un proceso de ajuste cambiario desde finales de la década de los noventa, luego de la fuerte revaluación del peso que se había presentado en los años anteriores, y, por otra parte, el mantenimiento del régimen de bandas cambiarias requiere no solo el compromiso del Banco Central, sino del apoyo decidido del Gobierno y de la comunidad financiera internacional; según Villar, para la época era evidente que dicho apoyo había dejado de existir. En este contexto, el autor concluye que el esquema de bandas cambiarias era insostenible.

Por otra parte, respecto a los resultados del cambio en política, otros autores (Clavijo, 2001) concluyen que gracias a la creciente flexibilidad cambiaria de finales de los años noventa, y el ajuste fiscal adelantado simultáneamente, Colombia logró reducir su inflación a tasas inferiores a un dígito, manteniendo una tasa de cambio real más competitiva. El déficit del sector público no financiero se redujo de niveles cercanos al 5 % a cerca de 2,6 % del PIB durante 1999-2001, mientras que la inflación se mantuvo por debajo del 10 % anual.

## 1.7 Mecanismos de intervención del Banco de la República en el mercado cambiario

El Banco de la República cuenta con dos alternativas para intervenir el mercado cambiario, a saber:

- **Intervención mediante subasta de opciones.** El Banco de la República puede intervenir a través de subastas de opciones americanas *put* (las cuales dan al tenedor el derecho de vender dólares al Banco de la República) o *call* (que otorgan el derecho a comprar dólares al Banco de la República). Este mecanismo fue adoptado en noviembre de 1999, bajo el régimen de libre flotación de la tasa de cambio.

La subasta de opciones puede tener dos propósitos:

- Acumular o desacumular reservas internacionales.
- Controlar la volatilidad de la tasa de cambio.

### - **Acumulación o desacumulación de reservas internacionales**

**Acumulación de reservas internacionales:** el Banco de la República puede convocar y realizar mensualmente, una subasta de opciones *put* por un monto discrecional. La convocatoria de la subasta se debe realizar como mínimo con un día hábil de anticipación. Las opciones *put* se pueden ejercer en el plazo comprendido

entre el primer y el último día hábil del mes siguiente al cual se realiza la subasta (generalmente mes calendario), o en el plazo que determine la convocatoria. Las opciones pueden ejercerse durante su plazo de manera parcial o total, cualquier día hábil siempre que esté habilitada la condición de ejercicio. La condición de ejercicio se activa cuando la TRM (tasa representativa del mercado certificada por la Superintendencia Financiera de Colombia) sea inferior a su promedio móvil de los últimos veinte días hábiles.

**Desacumulación de reservas internacionales:** de manera ocasional, el Banco de la República puede anunciar una subasta de opciones *call*. Se cumplen las mismas condiciones de convocatoria, plazos y liquidación en ejercicio (parcial o total) de las opciones *put*; sin embargo, la condición de ejercicio es que la TRM sea superior a su promedio móvil de los últimos 20 días hábiles.

## 1.8 Control de volatilidad de la tasa de cambio

La convocatoria de estas subastas requiere que la TRM se encuentre en un nivel menor o igual a 7% (venta de opciones *put*) o en un nivel mayor o igual a 7% (venta de opciones *call*) de su promedio móvil de los últimos 20 días hábiles y se haya vencido el plazo de las opciones *put* o *call* de la última subasta para el control de la volatilidad, sea que estas hayan sido ejercidas o no. El cupo de estas subastas se ha establecido en US\$ 500 millones actualmente, y el plazo corresponde a 1 mes contado desde el día de la subasta. Las opciones se pueden ejercer cualquier día hábil durante su plazo (americanas), siempre y cuando la TRM se encuentre en un nivel menor o igual a 7% para el caso de las opciones *put* o en un nivel superior o igual a 7% para el caso de las opciones *call*.

### 1.8.1 Intervención directa

El Banco de la República puede realizar operaciones de intervención directa con los intermediarios del mercado cambiario (IMC) o intermediarios de las opciones cambiarias (IOC), y con las sociedades comisionistas de Bolsa que hayan demostrado que cumplen con los requisitos para ser considerados IMC. En este tipo de intervención, el Banco de la República realiza operaciones de compra y venta de dólares directamente en el mercado *spot* (o en el mercado de opciones de los IOC) con los mismos propósitos descritos anteriormente. Si el Banco desea acumular reservas internacionales o disminuir la volatilidad a la baja de la tasa de cambio, puede comprar dólares directamente; en caso contrario, si desea desacumular

(temporal u ocasionalmente) reservas o disminuir la volatilidad al alza de la tasa de cambio, puede vender dólares en el mercado *spot*.

## 2. Algunos modelos para la valoración de opciones sobre divisas

### 2.1 Modelo de Garman-Kohlhagen

El modelo clásico de valoración de opciones Black-Scholes no se adapta correctamente a las opciones sobre tipo de cambio, ya que en estas últimas se involucran varias tasas de interés de formas que difieren de los supuestos básicos de Black-Scholes (Garman y Kohlhagen, 1983). Con el fin de resolver este problema, Garman-Kohlhagen desarrollan una propuesta de valoración de opciones sobre divisas, la cual relacionan a los trabajos obtenidos por Black (1976) en su modelo de valoración de opciones sobre *commodities*, y Samuelson-Merton (Merton, 1976) en su modelo de dividendos proporcionales.

Garman-Kohlhagen explican que la diferencia entre una opción sobre tipo de cambio y una opción sobre una acción que no paga dividendos (activo bajo el cual se desarrolla el modelo Black-Scholes) son los precios *forward* de equilibrio. Bajo esta premisa, al mantener las tasas de interés constantes (supuesto básico de Black-Scholes), el precio *forward* de la acción debe incluir una prima igual a la tasa de interés (Garman y Kohlhagen, 1983); sin embargo, en el mercado cambiario, los precios *forward* pueden incluir primas positivas o negativas (caso referido por los autores como descuento). Lo anterior obedece a que el valor *forward* de una divisa está relacionado la ratio del precio de los bonos libres de riesgo que se negocian en cada país. Según la ley de paridad de tasas de interés, la cual es una condición de no arbitraje, la prima de un *forward* de divisas debe ser igual al diferencial de tasas de interés, que puede ser positivo o negativo (Garman y Kohlhagen, 1983). Ya que tanto las tasas de interés domésticas como las tasas de interés del exterior afectan la valoración de los contratos *forward*, es lógico esperar que esta relación se mantenga en la valoración de opciones.

#### 2.1.1 Supuestos del modelo

- El precio *spot* de la divisa sigue un movimiento browniano geométrico (GBM, por sus siglas en inglés).



- El valor de las primas de las opciones es función de una única variable estocástica: el precio *spot*.
- No existen oportunidades de arbitraje.
- No existen restricciones sobre posiciones cortas.
- No existen restricciones sobre posiciones apalancadas.
- La tasa activa de la economía es igual a la tasa pasiva.
- La tasa de interés de corto plazo es conocida y constante en el tiempo.
- No existen fricciones de mercado (costos de transacción ni impuestos).
- Las tasas de interés (doméstica y exterior) son constantes.
- El modelo de valoración aplica para opciones europeas, las cuales solo pueden ser ejercidas al vencimiento.

### 2.1.2 Dinámica del subyacente

De acuerdo con lo anterior, la dinámica del subyacente se representa de la forma (diferencial):

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz \quad (1)$$

donde:

$S$ : precio spot de la divisa entregable (unidades de divisa doméstica por 1 unidad de divisa del exterior).

$\mu$ : componente de tendencia del precio *spot* de la divisa.

$\sigma$ : componente de volatilidad del precio *spot* de la divisa.

$z$ : proceso de Wiener.

Trabajando en una economía similar a la de Black-Scholes (1973), los supuestos implican que no existen oportunidades de arbitraje y se presenta un esquema de tiempo continuo, por lo que el exceso de retorno esperado ajustado por riesgo de todos los activos debe seguir la forma:

$$\frac{\alpha_i - r_D}{\delta_i} = \lambda, \forall i \quad (2)$$

donde:

$\alpha_i$ : retorno esperado de cualquier activo “ $i$ ” de la economía.

$r_D$ : tasa de interés doméstica libre de riesgo.

$\delta_i$  : desviación estándar de los retornos del activo “ $i$ ”.

$\lambda$  : exceso de retorno.

Se puede observar que  $\lambda$  no depende de ninguno de los activos de la economía. Al aplicar sobre la tenencia de la divisa del exterior se obtiene:

$$\frac{(\mu + r_F) - r_D}{\sigma} = \lambda \quad (3)$$

donde  $r_F$  es la tasa de interés del exterior libre de riesgo.

Esto implica que el retorno esperado de mantener la divisa del exterior es  $\mu$ , la tendencia de la tasa de cambio expresada en unidades de divisa doméstica por 1 unidad de divisa del exterior, más el retorno libre de riesgo derivado de mantener la divisa del exterior en la forma de un activo seguro, como un bono soberano, el cual paga intereses de  $r_F$ ;  $\sigma$  representa la desviación estándar de los retornos de la divisa del exterior. Los autores destacan que los parámetros  $\mu$ ,  $r_D$ ,  $r_F$  y  $\sigma$  no tienen dimensión (están expresados como escalar en porcentaje), por lo que no se presenta el problema de conversión en términos de unidades domésticas o del exterior, ya que se da un ajuste que se explicará más adelante (Garman y Kohlhagen, 1983).

Ahora, se define  $C(S, T)$  como el precio de una opción *call* europea con  $T$  como el tiempo que resta para el vencimiento, aplicando (2) se obtiene:

$$\frac{\alpha_c - r_D}{\delta_c} = \lambda \quad (4)$$

donde  $\alpha_c$  y  $\delta_c$  son la tasa de retorno esperada del *call* y la desviación estándar de los retornos respectivamente. Aplicando el lema de Ito se llega a:

$$\alpha_c C = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} + \mu S \frac{\delta C}{\delta S} - \frac{\delta C}{\delta T} \quad (5)$$

$$\delta_c S = \sigma S \frac{\delta C}{\delta S} \quad (6)$$

Al sustituir (5) y (6) en (4) se obtiene:

$$\frac{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} + \mu S \frac{\delta C}{\delta S} - \frac{\delta C}{\delta T} - r_D C}{\sigma S \frac{\delta C}{\delta S}} = \lambda \quad (7)$$

Igualando (4) y (7),

$$\frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\delta^2 C}{\delta S^2} - r_D C + (r_D S - r_F S) \frac{\delta C}{\delta S} = \frac{\delta C}{\delta T} \quad (8)$$

La ecuación (8) guarda una estrecha relación con los resultados obtenidos por Samuelson (1965) y Samuelson y Merton (1969), en estos modelos la tasa de retorno esperada de los dividendos (*dividend yield*) se asume proporcional al nivel actual del precio de la acción. Garman-Kohlhagen afirman que la interpretación para las opciones sobre divisas es similar, ya que  $r_F$  puede ser considerada la tasa de los dividendos de la divisa del exterior; sin embargo, ya que esta tasa se encuentra expresada en términos de la tasa de cambio del exterior, debe ser convertida a términos de la divisa local, multiplicando por la tasa de cambio *spot*  $S$  (Garman y Kohlhagen, 1983). Bajo el modelo de Samuelson-Merton, una compañía debe monitorear constantemente el nivel de precio *spot* de su acción y ajustar los dividendos para mantener la proporción constante, supuesto que es poco práctico en el mundo real. Por el contrario, en el mercado cambiario el ajuste de conversión de divisa del exterior a doméstica se da automáticamente, como se observa en (8).

### 2.1.3 Fórmula de valoración

La solución de (8) para el precio de una opción *call* europea debe obedecer la siguiente condición de frontera:

$$C(S, 0) = \max(0, S - K) \quad (9)$$

donde:

$K$ : precio *strike* o de ejercicio de la opción.

Lo anterior lleva finalmente a la expresión de la opción *call* europea sobre divisas (Garman y Kohlhagen, 1983):

$$C(S, T) = e^{-r_F T} S * N\left(x + \sigma\sqrt{T}\right) - e^{-r_D T} K * N(x) \quad (10)$$

donde:

$$x = \frac{\left[ \ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left[ r_D - r_F - \left(\frac{\sigma^2}{2}\right) \right] T \right]}{\sigma\sqrt{T}} \quad (11)$$

con

$N(x)$  = función de distribución acumulada normal estándar.

La ecuación (8) es la expresión para hallar el valor de cualquier activo que cumpla con los supuestos explicados, por lo que Garman-Kohlhagen (1983) afirman que el precio de una opción *put* europea también satisface la ecuación diferencial, pero con una condición de frontera diferente, a saber:

$$P(S,0) = \max(0, K - S) \quad (12)$$

Por lo que la solución de (8) lleva a la expresión de la opción *put* europea sobre divisas:

$$P(S,T) = e^{-rFT} S * N\left(x + \sigma\sqrt{T-1}\right) - e^{-rDT} K * \left[N(X) - 1\right] \quad (13)$$

donde la expresión para  $x$  es la misma del *call*.

## 2.2 Modelo de difusión con saltos de Merton

Uno de los supuestos críticos en el modelo de Black-Scholes es que la dinámica de los retornos del activo subyacente puede ser descrita por un proceso estocástico de difusión continua (GBM). Merton (1976) afirma que la validez de la fórmula Black-Scholes depende de si los cambios en el precio del subyacente son pequeños en un intervalo de tiempo pequeño. Por esto, Merton desarrolla un modelo para el caso de que los retornos sean generados por la combinación de procesos continuos y procesos con saltos.

### 2.2.1 Supuestos del modelo

- No se presentan fricciones de mercado (no hay costos de transacción ni impuestos).

- No hay pago de dividendos para la acción (el modelo fue desarrollado para el caso de acciones como subyacente).
- No existen oportunidades de arbitraje.
- Modelo de valoración aplicable para opciones europeas.

### 2.2.2 Dinámica del subyacente

De acuerdo con Merton, el cambio total en el precio del subyacente es la combinación de dos tipos de cambios: el “ruido” normal en el precio (componente modelado a través del GBM estándar con varianza constante por unidad de tiempo), y los movimientos repentinos o “anormales” que son resultado de la aparición de nueva información relevante (componente modelado a través de un proceso Poisson dada su naturaleza de presentarse en momentos discretos en el tiempo) (Merton, 1976).

El salto, descrito como un evento con distribución Poisson, es la aparición de nueva información relevante sobre el subyacente. Se asume que dichas apariciones (saltos) son *i.i.d* (independientes e idénticamente distribuidas); dado esto, la probabilidad de que ocurra un evento (salto) durante un intervalo de tiempo  $h$  puede ser descrito como:

$$\text{Prob}\{\text{no ocurrencia del evento en el intervalo } (t, t+h)\} = 1 - \lambda h + o(h) \quad (14)$$

$$\text{Prob}\{\text{no ocurrencia única del evento en el intervalo } (t, t+h)\} = \lambda h + o(h)$$

$$\text{Prob}\{\text{no ocurrencia múltiple del evento en el intervalo } (t, t+h)\} = o(h)$$

donde:

$O(h)$ : asíntota definida por  $\psi(h) = O(h)$  si  $\lim_{h \rightarrow 0} [\psi(h)/h] = 0$ .

$\lambda$ : parámetro de la distribución Poisson, número de saltos por unidad de tiempo.

La ecuación diferencial estocástica que describe el comportamiento de los retornos del subyacente bajo estas condiciones se expresa de la siguiente forma:

$$\frac{dS}{S} = (a - \lambda k) dt + \sigma dZ + dq \quad (15)$$

donde:

$S$ : precio *spot* del subyacente.

$a$ : retorno esperado del subyacente.

$k \equiv \varepsilon(\gamma - 1) = \varepsilon(\gamma) - 1$

$(Y - 1)$ : variable aleatoria de cambio en porcentaje en el precio del activo si ocurre el evento Poisson (si se presenta un salto).

$\varepsilon$ : valor esperado.

$\sigma^2$ : varianza de los retornos del precio del activo, condicional a la ausencia del evento Poisson.

$dZ$ : proceso Wiener estándar.

$q(t)$ : proceso Poisson independiente.

La ecuación diferencial que describe la dinámica del subyacente permite observar que  $\sigma dZ$  describe a lo que Merton (1976) se refiere como ruido normal, mientras  $dq$  describe los movimientos anormales (saltos). Si se trabajara bajo el supuesto de  $\lambda = 0$  (lo que implica  $dq \equiv 0$ ), la ecuación diferencial de la dinámica del subyacente sería la misma de Black-Scholes, por lo que (15) podría expresarse como:

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dZ \quad \text{si no ocurre el evento Poisson} \quad (16)$$

$$\frac{dS}{S} = (\alpha - \lambda k) dt + \sigma dZ + (\gamma - 1) \quad \text{si ocurre el evento Poisson (salto)} \quad (17)$$

donde, con probabilidad 1, no ocurre más de un evento Poisson en un instante, y si ocurre el evento de salto  $(Y-1)$  es una función que produce el salto finito desde  $S$  a  $SY$ . El camino resultante de este proceso para  $S(t)$  será continuo con saltos finitos de diferentes signos y amplitudes que ocurren en momentos discretos del tiempo. Si  $\alpha$ ,  $\lambda$ ,  $k$ ,  $\sigma$  se mantienen constantes, la relación entre  $S(0)$  y  $S(t)$  puede describirse como:

$$\frac{S(t)}{S} = \exp \left[ \left( \alpha - \frac{\sigma^2}{2} - \lambda k \right) t + \sigma Z(t) \right] * \gamma(n) \quad (18)$$

donde:

$Z(t)$ : variable aleatoria de distribución normal con  $\mu = 0$  y  $\sigma^2 = t$

$Y(n)$ : 1 para  $n = 0$ .

$\gamma(n)$ :  $\prod_{j=1}^n \gamma_j$  para  $n \geq 1$ .

$Y_j$ : secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas que expresan el cambio en el precio si ocurre un salto.

$n$ : número de saltos, variable con distribución Poisson con parámetro  $\lambda t$ .

Ahora, se define  $W$  como el precio de una opción *call* europea, y suponiendo que el precio de la opción sigue una dinámica similar a la del subyacente descrito anteriormente (acción), la dinámica del activo contingente puede describirse como:

$$\frac{dW}{W} = (\alpha_w - \lambda k_w) dt + \sigma_w dZ + dq_w \quad (19)$$

donde:

$\alpha_w$ : tasa de retorno esperada de la opción.

$\sigma_w^2$ : varianza del retorno esperado de la opción, condicional a la ausencia del salto.

$q_w(t)$ : proceso Poisson independiente con parámetro  $\lambda$ .

$k_w \equiv \varepsilon(\gamma_w - 1)$

$(\gamma_w - 1)$ : variable aleatoria de cambio en porcentaje en el precio de la opción si ocurre el evento Poisson (si se presenta un salto).

$\varepsilon$ : valor esperado.

Aplicando el lema de Ito se obtiene:

$$\alpha_w \equiv \left[ \frac{\frac{1}{2} \sigma^2 S^2 F_{SS}(S,t) + (\alpha - \lambda k) S F_S(S,t) + F_t + \lambda \varepsilon \{F(S\gamma, t) - F(S,t)\}}{F(S,t)} \right] \quad (20)$$

$$\sigma_w \equiv \frac{F_S(S,t) \sigma S}{F(S,t)} \quad (21)$$

donde:

$F(S,t)$  indican derivadas parciales del precio de la opción *call*.

Siguiendo el análisis de Black-Scholes, y continuando con la metodología empleada en el modelo de Garman-Kohlhagen para garantizar la ausencia del arbitraje, el retorno de la opción *call* debe ser igual a la tasa libre de riesgo; si se trabaja bajo el supuesto de  $\lambda = 0$  (por consiguiente  $dq = dq_w \equiv 0$ ), se llega a:

$$\frac{(\alpha - r)}{\sigma} = \frac{(\alpha_w - r)}{\sigma_w} \quad (22)$$

### 2.2.3 Fórmula de valoración

A partir de (20), (21) y (22), bajo las condiciones mencionadas para  $\lambda$  y  $dq$ , se puede llegar a la ecuación diferencial de Black-Scholes. Sin embargo, Merton resalta que en presencia del proceso de saltos  $dq$ , no es posible encontrar un set de portafolio réplica (compuesto por el subyacente y una opción) que retorne la tasa libre de riesgo, ya que la combinación de activos del portafolio es una operación lineal, mientras el precio de la opción es una función no lineal del precio del subyacente (Merton, 1976). Por esto, Merton señala como alternativa la propuesta de Samuelson (1965), en la que si se expresara el retorno esperado de la opción como función del precio *spot* del subyacente y el tiempo al vencimiento, se podría derivar una fórmula para el precio del activo contingente.

Entonces, se define  $g(S, \tau)$  como la tasa instantánea de retorno de equilibrio de la opción cuando el precio *spot* del subyacente es  $S$  y la opción expira en el momento  $\tau$  en el futuro. Bajo estas condiciones, la ecuación diferencial estocástica para la opción *call* europea puede expresarse de la siguiente forma:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (a - \lambda k)SF_S - F_t - g(S, \tau)F + \lambda \varepsilon\{F(S\gamma, \tau) - F(S, \tau)\} = 0 \quad (23)$$

Sujeta a las siguientes condiciones de frontera:

$$\begin{aligned} F(0, \tau) &= 0 \\ F(S, 0) &= \max(0, S - E) \end{aligned} \quad (24)$$

donde:

$E$ : *strike* o precio de ejercicio de la opción

Sin embargo, (23) aún expresa el precio del *call* bajo  $a$  y  $g(S, \tau)$ , por lo que tomando (22), (20) y (21), (23) puede expresarse:

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 F_{SS} + (r - \lambda k)SF_S - F_t - rF + \lambda \varepsilon\{F(S\gamma, \tau) - F(S, \tau)\} = 0 \quad (25)$$

Puede llegarse a (25) ya que gracias a (22), el retorno esperado de un portafolio de cobertura con  $\beta = 0$  debe ser igual a la tasa libre de riesgo  $r$ ; en otras palabras, (22) implica el retorno esperado de un portafolio compuesto por un activo riesgoso y la opción  $a_p = r$ . La ecuación (25) puede reducirse a la ecuación de Black-Scholes si  $\lambda = 0$ .



Una vez especificada la ecuación diferencial estocástica del activo contingente, puede darse una solución al problema de valoración, definiendo previamente:

$X_n$ : variable aleatoria con la misma distribución del producto de  $n$  variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, cada una distribuida de la misma forma que la variable aleatoria  $Y$  definida en (15), con  $X_0 \equiv 1$ .

$\varepsilon_n$ : valor esperado de  $X_n$

Por lo que la solución de (25) para el precio de una opción *call* europea bajo el modelo de saltos de Merton (1976) es la siguiente:

$$F(S, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda\tau} (\lambda\tau)^n}{n!} \left[ \varepsilon_n \left\{ W(SX_n e^{-\lambda\tau}, \tau; E, \sigma^2, r) \right\} \right] \quad (26)$$

La ecuación (26) no posee una solución cerrada, sin embargo, Merton (1976) señala en su trabajo que existen dos casos especiales en los que (26) puede ser simplificada: el primer caso es la “ruina inmediata”, en el que si el evento Poisson ocurre, el precio del subyacente cae hasta 0. El resultado del modelo de Merton en este caso lleva a la fórmula Black-Scholes afectada por una tasa libre de riesgo mayor ( $r' \equiv r + \lambda$ ).

El segundo caso implica que la variable aleatoria  $Y$  sigue una distribución lognormal, para lo cual se definen:

$\delta^2$ : varianza del logaritmo de  $Y$

$$\gamma \equiv \log(1 + k)$$

En este caso,  $X_n \sim LN$ , con,

$$V[\log(X_n)] = \delta^2 n$$

$$\varepsilon_n(X_n) = e^{n\gamma}$$

Ahora, se especifica una nueva expresión para Black-Scholes:

$$f_n(S, \tau) \equiv W(S, \tau; E, v_n^2, r_n)$$

donde:

$$v_n^2 \equiv \left[ \sigma^2 + \frac{n\delta^2}{\tau} \right]$$

$$r_n \equiv r - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau}$$

$f_n(S, \tau)$  valor de la opción estándar del modelo Black-Scholes con varianza  $v_n^2$  y tasa libre de riesgo  $r_n$ .

Bajo estas condiciones, la ecuación (26) puede definirse como (Merton, 1976):

$$F(S, \tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda'\tau} (\lambda'\tau)^n}{n!} * f_n(S, \tau) \quad (27)$$

donde:

$$\lambda' \equiv \lambda(1 - k)$$

Merton (1976) explica que  $f_n(S, \tau)$  es el valor de la opción, condicional a conocer el número exacto de  $n$  saltos Poisson que ocurrirán en la vida de la opción. El valor de la opción  $F(S, \tau)$  es la suma ponderada de cada uno de estos precios, donde cada peso es igual a la probabilidad de que una variable aleatoria Poisson con parámetro  $\lambda, \tau$  tome el valor  $n$ .

Hemos descrito la metodología de valoración empleada por Merton para una acción que no paga dividendos en la vida del contrato (opción); ya que el propósito de este trabajo es la aplicación de modelos de valoración de opciones sobre divisas, trabajaremos bajo el esquema propuesto por diversos autores (Merton, 1973; Kou, 2007), en el que el componente de tendencia que describe la dinámica del subyacente puede ser expresado de la siguiente forma (bajo la probabilidad  $P$  bajo la metodología de valoración riesgo neutral):

$$r = r - \delta$$

Para el caso de acciones que pagan dividendos en la vida del contrato, expresados como  $\delta$ , como una proporción del precio *spot* del subyacente, y

$$r = r_D - r_F$$

Para el caso de divisas, donde  $r_D$  y  $r_F$  corresponden a las variables definidas anteriormente. Teniendo en cuenta que la solución inicial de Merton no posee una solución analítica (lo cual es deseable en el marco de este trabajo), se contará con el segundo caso especial, ya que el primer caso podría entenderse como una situación extrema de mercado. En este esquema, la siguiente modificación es

necesaria para el problema de valoración de opciones sobre divisas (a partir de allí se utiliza la fórmula (27)):

$$r_{Dn} \equiv r_D - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau}, r_{Fn} \equiv r_F - \lambda k + \frac{n\gamma}{\tau}$$

## 2.3 Modelo Vanna-Volga de Castagna-Mercurio

El supuesto de volatilidad constante ha llevado a que las opciones con distintos *strikes* y vencimientos sean valoradas con volatilidades implícitas diferentes, por lo que se reconoce la existencia de una estructura de volatilidad dependiente del *strike* conocida como *smile* de volatilidad (Castagna y Mercurio 2006). Por lo anterior, Castagna-Mercurio describen un modelo de mercado para valorar opciones sobre divisas europeas a través de la construcción de la mencionada estructura.

### 2.3.1 Supuestos del modelo

Castagna-Mercurio trabajan bajo los mismos supuestos del modelo de Black-Scholes (por extensión también aplican los supuestos del modelo de Garman-Kohlhagen):

- La tasa de interés de corto plazo (doméstica y del exterior) es conocida y constante a través del tiempo.
- El subyacente (tasa de cambio) sigue un movimiento browniano geométrico.
- No existen costos de transacción o impuestos, ni restricciones sobre ventas en corto.
- No existen oportunidades de arbitraje.
- Las opciones son valoradas dependiendo del *delta*, de esta manera, cuando el precio del subyacente cambia y el *delta* de la opción cambia proporcionalmente, se hace necesario encontrar una nueva volatilidad implícita.
- En el mercado de opciones sobre divisas las estructuras más líquidas son:

*O*Δ*Astraddle*, *Risk Reversal* y *Vega-Weighted Butterfly*

Las últimas dos condiciones son mencionadas por los autores, y serán necesarias por claridad para el desarrollo del modelo.

### 2.3.2 Dinámica del subyacente

La dinámica del subyacente es la misma descrita por Garman-Kohlhagen:

$$\frac{dS(t)}{S(t-)} = \mu dt + \sigma dW_t \quad (28)$$

donde  $\mu$  se define como el diferencial de tasas de interés descrito en el modelo de Garman-Kohlhagen.

Castagna y Mercurio desarrollan el modelo desde las tres estructuras más activas del mercado, las cuales fueron mencionadas anteriormente; a partir de estos datos se pueden inferir tres volatilidades básicas, a partir de las cuales se puede construir la estructura de volatilidad. Las cotizaciones de volatilidad se expresan en términos del *delta* de la opción, para rangos desde  $5\Delta$  *put* hasta el  $5\Delta$  *call*. Se definen:

$S_t$ : precio *spot* de la tasa de cambio.

$r_D$ : tasa de interés libre de riesgo doméstica.

$r_F$ : tasa de interés libre de riesgo del exterior.

$T$ : tiempo al vencimiento.

La volatilidad *ATM* (*at the money*) que se cotiza en el mercado cambiario es la del  $0\Delta$  *straddle*, estructura en la cual para cualquier  $T$  se define el *strike* para que la opción *call* y *put* tengan el mismo  $\Delta$  con signos diferentes (de esta manera, no se necesita cobertura  $\Delta$  o *delta-hedge*). Si se define  $\sigma_{ATM}$  como la volatilidad *ATM* para un vencimiento  $T$ , y  $K_{ATM}$  como el *strike* *ATM*, se debe cumplir la siguiente condición:

$$e^{-r_F T} \Phi \left\{ \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_{ATM}} \right) + \left[ r_D - r_F + \frac{1}{2} \sigma_{ATM}^2 \right] T}{\sigma_{ATM} \sqrt{T}} \right\}$$

$$= e^{-r_F T} \Phi \left\{ - \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_{ATM}} \right) + \left[ r_D - r_F + \frac{1}{2} \sigma_{ATM}^2 \right] T}{\sigma_{ATM} \sqrt{T}} \right\}$$

donde:

$\Phi$ : función de distribución acumulada normal estándar

Al despejar  $K_{ATM}$  se obtiene:

$$K_{ATM} = S_0 e^{(r_D - r_F + \frac{1}{2}\sigma_{ATM}^2)T} \quad (30)$$

La estructura *Risk Reversal* consiste en la compra de un *call* y la venta de un *put* con  $\Delta$  simétrico. La cotización es la diferencia entre las dos volatilidades implícitas,  $\sigma_{25\Delta c}$  y  $\sigma_{25\Delta p}$  halladas en la metodología Black-Scholes; al definir el precio de cotización en términos de volatilidad se llega a,

$$\sigma_{RR} = \sigma_{25\Delta c} - \sigma_{25\Delta p} \quad (31)$$

Finalmente, la estructura *Vega-Weighted Butterfly* consiste en la venta de un *straddle* *ATM* y la compra de *25Δstrangle*. La cantidad del *straddle* debe ser menor a la del *strangle*, ya que su *Vega* (sensibilidad del precio de la opción ante cambios en la volatilidad) es mayor. El precio de cotización del *butterfly* en términos de volatilidad se define,

$$\sigma_{VWB} = \frac{\sigma_{25\Delta c} - \sigma_{25\Delta p}}{2} - \sigma_{ATM} \quad (32)$$

Para cualquier  $T$ , las volatilidades implícitas  $\sigma_{25\Delta c}$  y  $\sigma_{25\Delta p}$  pueden ser halladas resolviendo un sistema lineal de ecuaciones:

$$\sigma_{25\Delta c} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} + \frac{1}{2}\sigma_{RR} \quad (33)$$

$$\sigma_{25\Delta p} = \sigma_{ATM} + \sigma_{VWB} - \frac{1}{2}\sigma_{RR} \quad (34)$$

Los  $K$  correspondientes a  $\sigma_{25\Delta c}$  y  $\sigma_{25\Delta p}$ , pueden definirse aplicando (29):

$$e^{-r_F T} \Phi \left\{ \frac{\ln \left( \frac{S_0}{K_{25\Delta p}} \right) + \left[ r_D - r_F + \frac{1}{2}\sigma_{25\Delta p}^2 \right] T}{\sigma_{25\Delta p} \sqrt{T}} \right\} = -0.25$$

$$K_{25\Delta p} = S_0 e^{-a\sigma_{25\Delta p}\sqrt{T} + (r_D - r_F + \frac{1}{2}\sigma_{25\Delta p}^2)T} \quad (36)$$

$$K_{25\Delta c} = S_0 e^{a\sigma_{25\Delta c}\sqrt{T} + (r_D - r_F + \frac{1}{2}\sigma_{25\Delta c}^2)T} \quad (37)$$

donde:

$$\alpha = -\Phi^{-1}\left(\frac{1}{4}e^{rFT}\right)$$

$-\Phi^{-1}$  = distribución normal inversa.

$\alpha > 0$ ,  $K_{25\Delta p} < K_{ATM} < K_{25\Delta c}$  bajo condiciones normales de mercado.

Una vez definidas las expresiones para las tres volatilidades básicas y sus correspondientes *strikes*, el siguiente paso es construir portafolios *Vega*-neutrales. Castagna-Mercurio (2006) señalan que se debe derivar un portafolio de cobertura para una opción *call* europea con tiempo al vencimiento  $T$  y *strike*  $K$ , cuyo precio de no arbitraje corresponde a la fórmula de Black-Scholes y Garman-Kohlhagen.

Se pretende entonces encontrar ponderadores en el momento  $t$  expresados como  $x_1(t; K)$ ,  $x_2(t; K)$  y  $x_3(t; K)$  tales que el portafolio resultante de *calls* europeas con tiempo al vencimiento  $T$  y *strikes*  $K_1$ ,  $K_2$  y  $K_3$  respectivamente (los cuales reemplazan a  $K_{25\Delta p}$ ,  $K_{ATM}$  y  $K_{25\Delta c}$ ), cubra las variaciones de precio del *call* con tiempo al vencimiento  $T$  y *strike*  $K$  hasta el segundo orden (derivadas parciales respecto al subyacente y volatilidad).

Asumiendo una posición *delta hedged*, y trabajando bajo el esquema Black-Scholes en el que portafolios de opciones *plain vanilla* con el mismo  $T$  que son *Vega* neutral también son Gamma neutral (Castagna y Mercurio, 2006), pueden encontrarse los pesos  $x_1(t; K)$ ,  $x_2(t; K)$  y  $x_3(t; K)$  bajo la imposición de que el portafolio replicante tiene el mismo *Vega*, *Volga* y *Vanna* que el *call* con *strike*  $K$ ; lo anterior implica:

$$\frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(t; K) = \sum_{i=1}^3 x_i(t; K) \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(t; K_i) \quad (38)$$

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial^2 \sigma}(t; K) = \sum_{i=1}^3 x_i(t; K) \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma^2}(t; K_i) \quad (39)$$

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma \partial S_t}(t; K) = \sum_{i=1}^3 x_i(t; K) \frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma \partial S_t}(t; K_i) \quad (40)$$

Se define  $\mathcal{V}(t; K)$  como el *Vega* en el momento  $t$  de una opción europea con vencimiento  $T$  y *strike*  $K$ :

$$\mathcal{V}(t; K) = \frac{\partial C^{BS}}{\partial \sigma}(t; K) = S_t e^{-r_F \tau} \sqrt{\tau} \varphi(d_1(t, K)) \quad (41)$$

$$d_1(t; K) = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + (r_D - r_F + \frac{1}{2} \sigma^2) \tau}{\sigma \sqrt{\tau}} \quad (42)$$

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad (43)$$

Ahora se calculan las derivadas de segundo orden:

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial^2 \sigma}(t; K) = \frac{\mathcal{V}(t; K)}{\sigma} d_1(t; K) d_2(t; K) \quad (44)$$

$$\frac{\partial^2 C^{BS}}{\partial \sigma \partial S_t}(t; K) = -\frac{\mathcal{V}(t; K)}{S_t \sigma \sqrt{\tau}} d_2(t; K) \quad (45)$$

$$d_2(t; K) = d_1(t; K) - \sigma \sqrt{\tau} \quad (46)$$

Finalmente, se encuentra la solución al sistema de ecuaciones (38), (39) y (40):

$$x_1(t; K) = \frac{\mathcal{V}(t; K)}{\mathcal{V}(t; K_1)} * \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} \quad (47)$$

$$x_2(t; K) = \frac{\mathcal{V}(t; K)}{\mathcal{V}(t; K_2)} * \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}}$$

$$x_3(t; K) = \frac{\mathcal{V}(t; K)}{\mathcal{V}(t; K_3)} * \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \quad (49)$$

donde:

si  $K=K_j$ , entonces  $x_i(t; K) = 1$  para  $i = j$  y 0 de otra forma.

### 2.3.3 Fórmula de valoración

Castagna y Mercurio (2006) definen el precio de una opción *call* europea a través de una expresión que es consistente con los precios de mercado de las tres opciones básicas:

$$C(K) = C^{BS}(K) + \sum_{i=1}^3 x_i(K) [C^{MKT}(K_i) - C^{BS}(K_i)] \quad (50)$$

Los autores sugieren que el precio de un *call* con *strike*  $K$ , que es consistente con el *smile de volatilidad*, se obtiene al sumar al precio obtenido de Black-Scholes el costo de implementar la estrategia de cobertura explicada anteriormente, la cual está ajustada a precios de mercado (Castagna y Mercurio, 2006). La expresión obtenida en (50) denota el precio del *call* europeo en el momento  $t = 0$ .

La ecuación (50), que denota el precio del *call* en función del *strike*  $K$ , sigue las siguientes condiciones de no arbitraje (Castagna y Mercurio, 2006):

$$\begin{aligned} C &\in C^2((0, +\infty)) \\ \lim_{k \rightarrow 0^+} C(K) &= S_0 e^{-r_f T} \text{ y } \lim_{k \rightarrow +\infty} C(K) = 0 \\ \lim_{k \rightarrow 0^+} \frac{\partial C}{\partial K}(K) &= -e^{-r_b T} \text{ y } \lim_{k \rightarrow +\infty} K \frac{\partial C}{\partial K}(K) = 0 \end{aligned}$$

## 3. Aplicación de modelos de valoración de opciones sobre USD-COP

### 3.1 Caracterización estadística de la serie USD-COP

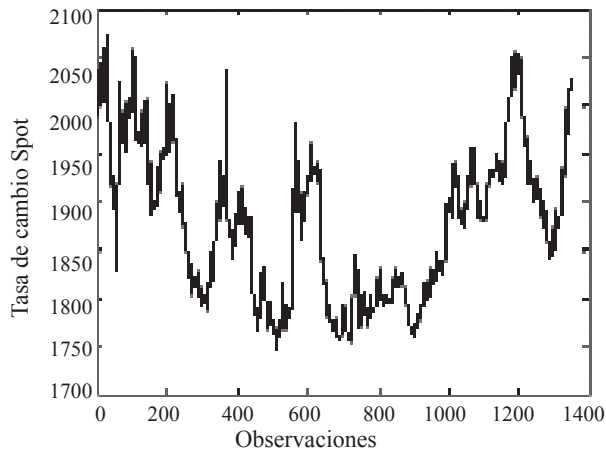
Para el análisis de la serie se tomaron los precios de cierre históricos del mercado interbancario *spot* USD-COP; el mercado cambiario goza de alta liquidez a nivel relativo respecto a otros mercados en Colombia, como el de renta variable, e incluso



llega a compararse con el mercado de renta fija, con la diferencia de que la liquidez de este último tiende a concentrarse en ciertas referencias y no en todos los nodos de la curva de deuda soberana.

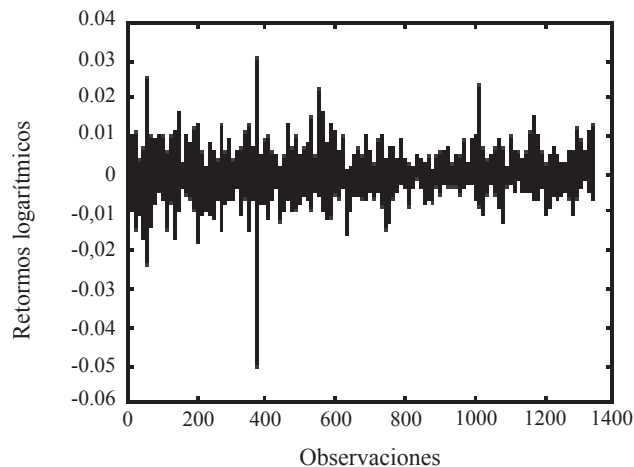
El horizonte temporal de la serie de tiempo seleccionada abarca desde 31/jul/2009 a 30/sep/2014. Se cuenta con un total de 1348 observaciones obtenidas de Bloomberg de la serie de cierres diarios, a partir de las cuales se calcularon los retornos logarítmicos y se realizaron pruebas de normalidad (figuras 1 y 2).

Figura 1. Gráfica de comportamiento de la tasa de cambio



Fuente: autor.

Figura 2. Gráfica de los retornos logarítmicos de la serie

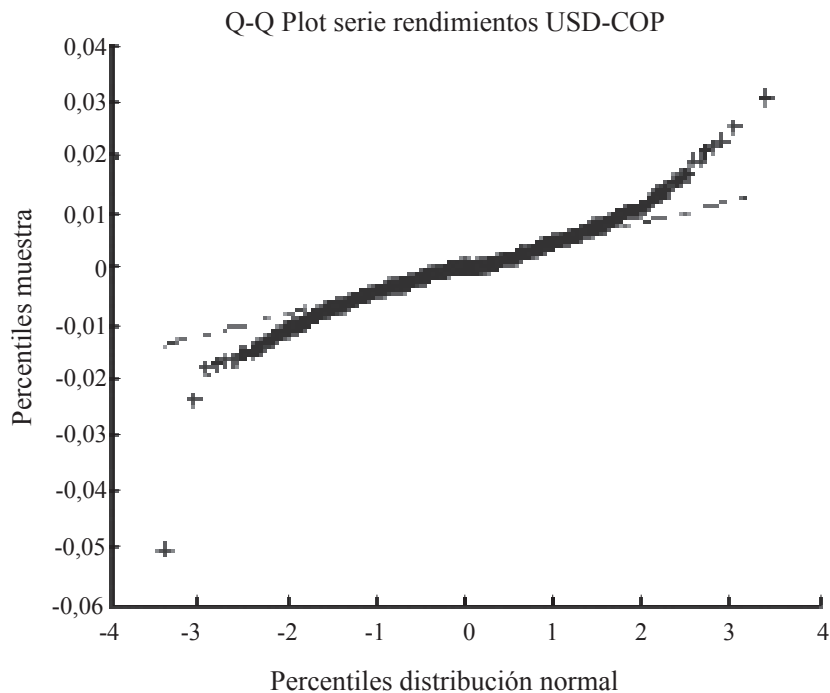


Fuente: autor.

Con el fin de establecer el cumplimiento de la hipótesis de normalidad que demandan los modelos analizados, se aplicaron pruebas estadísticas como el gráfico Q-Q y el ajuste del histograma a la distribución normal. Para el primer caso comparamos los percentiles de la serie de retornos logarítmicos con los percentiles teóricos de la distribución normal, mientras que en el segundo caso se compara un histograma de los retornos a la curva gaussiana.

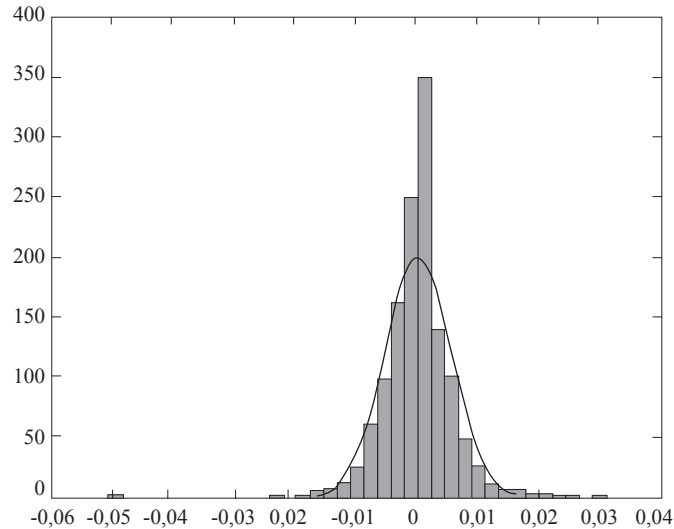
Si bien no se presenta un ajuste perfecto para ninguno de los dos casos, se muestra un nivel de ajuste aceptable en la prueba Q-Q, mientras que en el segundo caso se observa claramente que la curva de distribución de los retornos es leptocúrtica. Los test de normalidad más conocidos: Anderson-Darling, Kolgomorov-Smirnov y Jarque-Bera, arrojan como resultado que se rechaza la hipótesis nula de normalidad de la serie (figuras 3 y 4).

Figura 3. Gráfica Q-Q de ajuste de los retornos a la distribución normal



Fuente: autor.

Figura 4. Histograma de los retornos y curva de distribución normal teórica

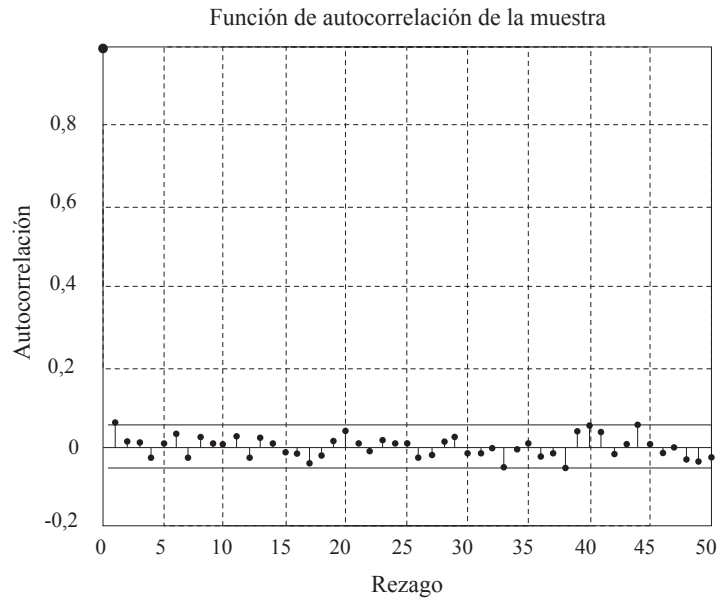


Fuente: autor.

Otro de los supuestos más fuertes de los modelos analizados es la estacionariedad, que implica que la media y varianza son constantes a través del tiempo, como lo asume el modelo Black-Scholes. Utilizamos la prueba de Dickey-Fuller aumentada para detectar la presencia de raíces unitarias, con un nivel de significancia de 5 %, rechazando la hipótesis nula (presencia de raíces unitarias) y probando que la serie cumple con la característica de estacionariedad débil.

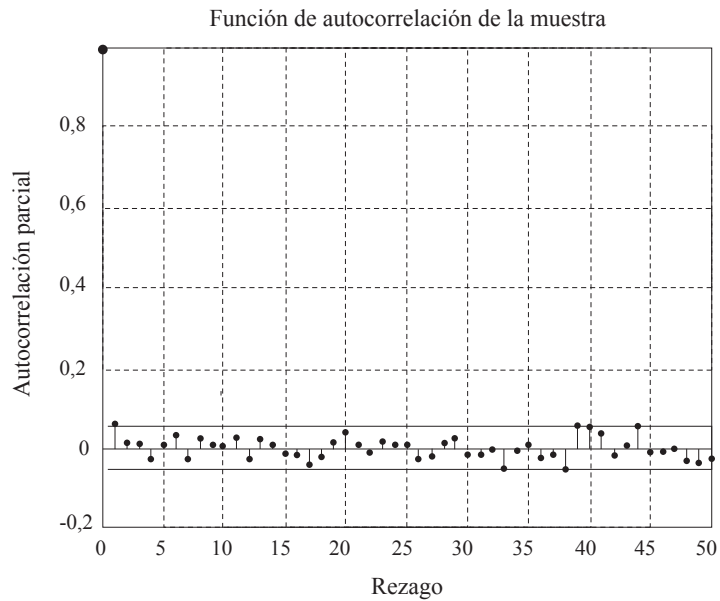
Se realizaron pruebas de autocorrelación de los retornos logarítmicos. Los gráficos de autocorrelación simple y autocorrelación parcial (figuras 5 y 6) demuestran que los datos presentan perfecta autocorrelación consigo mismos ( $\text{lag}=0$ ), pero descartan la presencia de fenómenos autorregresivos o de media móvil, lo que confirma la hipótesis de independencia.

Figura 5. Gráfica de autocorrelación simple de la serie de retornos



Fuente: autor.

Figura 6. Gráfica de autocorrelación parcial de la serie de retornos



Fuente: autor.

### 3.2 Estimación de los parámetros

Para la estimación de los parámetros de los modelos de Garman-Kohlhagen y Castagna-Mercurio se utiliza el método de máxima verosimilitud siguiendo el trabajo realizado por el profesor John Moreno (2011) dado que, como explica el autor, existen casos particulares donde el método puede ser aplicado de forma directa a partir de conocer la función de densidad de probabilidad del proceso del subyacente en la ecuación.

De manera general, los modelos de Garman-Kohlhagen y de Black-Scholes son representados por la EDE:

$$dX_t = \beta X_t dt + \sigma X_t dW_t \quad (51)$$

Donde  $\beta$  y  $\sigma$  son los parámetros constantes desconocidos, y representan los componentes de tendencia y difusión respectivamente.

De acuerdo con lo enunciado por Moreno (2011), se obtienen los siguientes estimadores para el caso de la media y varianza:

$$\hat{m} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \bar{y} \quad (52)$$

$$\hat{v} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (53)$$

donde:

$n$ : número de datos de la variable.

$y_i$ : dato u observación puntual de la serie de retornos logarítmicos diarios.

A partir de las expresiones anteriores se obtienen los estimadores para la EDE:

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{y}}{\Delta t} + \frac{1}{2} \hat{\sigma}^2 \quad (54)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n \Delta t} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 \quad (55)$$

Ahora que se cuenta con las expresiones para los parámetros de tendencia y difusión, se aplican los mismos a la serie de datos USD-COP. A partir de este punto seguiremos el trabajo realizado por Brigo, Damiano, Neugebauer y Triki (2008), con el fin de calibrar la serie de tiempo al modelo GBM. Se sugiere como primera medida encontrar los estimadores iniciales para la serie de tiempo analizada, por lo que tenemos:

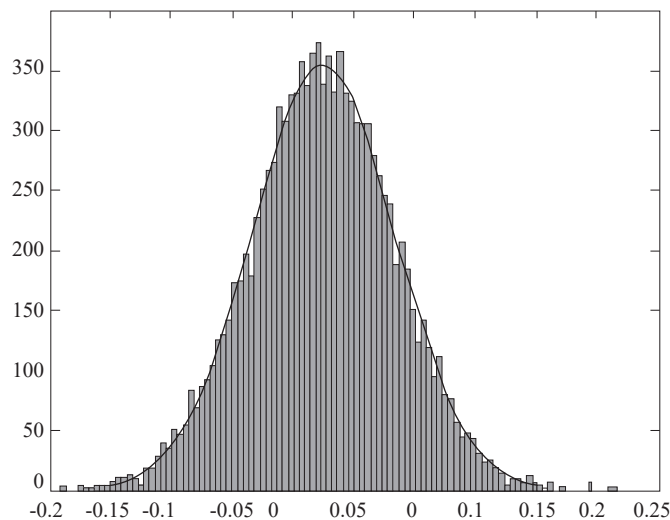
Tabla 1. Estimación inicial de parámetros de la serie USD-COP

Estimador	Valor (%)
$\bar{y}$	-0,0005
$\Sigma$	0,5359

Fuente: autor.

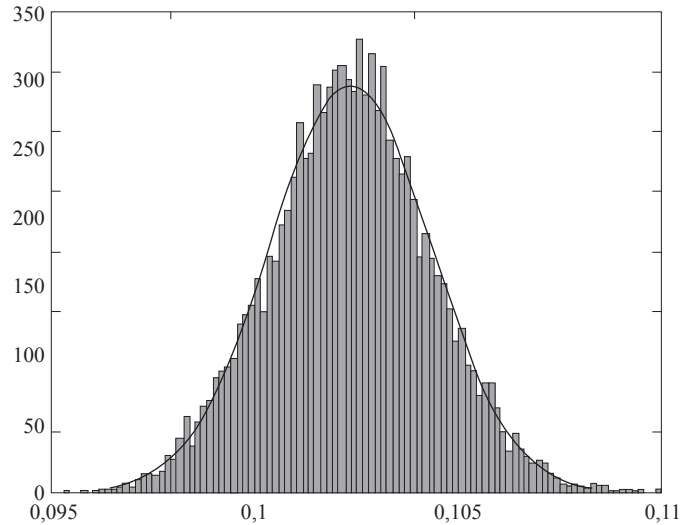
El código utilizado para esta estimación se describe en detalle en Brigo *et al.* (2008). El segundo paso es simular la distribución de los retornos y la volatilidad (varianza), por lo que se obtienen los siguientes resultados (figuras 7 y 8):

Figura 7. Distribución de la media de la serie USD-COP, comparada con la curva normal teórica



Fuente: autor.

Figura 8. Distribución de la varianza de la serie USD-COP



Fuente: autor.

Luego de hallar los estimadores iniciales, y a través del método de máxima verosimilitud, llegamos a la estimación final de los parámetros (tabla 2):

Tabla 2. Estimación final de parámetros de la serie USD-COP (anualizados)

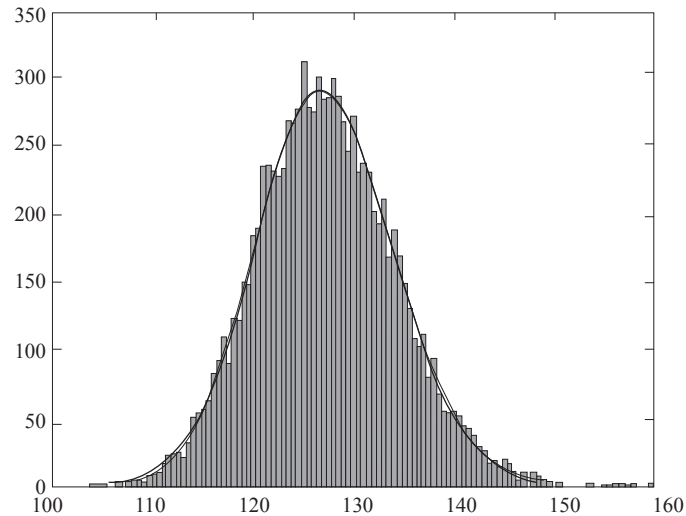
Estimador final	Valor (%)
$\bar{y}$	-0,0021
$\sigma$	10,2376

Fuente: autor.

Finalmente, una vez encontrados los parámetros de la distribución normal, se realiza una simulación base 100 sobre la distribución del precio del activo (USD-COP) y se comprueba que sigue una distribución lognormal (ya que en los pasos anteriores se ajustó una distribución normal a los retornos logarítmicos, se puede asumir que el subyacente cumple este supuesto). En este punto hemos probado, bajo ciertas condiciones, que el comportamiento del subyacente del derivado (tasa de cambio USD-COP) puede ser modelado a través del GBM generalizado. Anteriormente hemos probado el supuesto de estacionariedad débil a través de la prueba Dickey-Fueller, a la vez que comprobamos el principio de independencia de la serie a través de las

pruebas de correlación. Cabe resaltar, sin embargo, que la serie original presentó problemas de ajuste de los retornos a la distribución normal, como se evidenció en las pruebas Anderson-Darling, Kolgomorov-Smirnov y Jarque-Bera. Por esta razón, al momento de seleccionar el modelo del comportamiento del subyacente se siguió la metodología propuesta por Brigo *et al.* (2008) (figura 9).

Figura 9. Distribución de precios USD-COP y ajuste a curva lognormal



Fuente: autor.

Para el caso del modelo de Merton, se hace necesario encontrar estimadores para tres parámetros:  $\lambda$ , el cual describe el número de saltos por unidad de tiempo;  $\delta$ , que representa la desviación estándar del proceso lognormal de los saltos, y  $m$ , el valor esperado (media) del proceso lognormal. El autor opta por los modelos de Garman-Kohlhagen y Castagna-Mercurio para la aplicación, ya que se cuenta con límites de información para calibrar el modelo de Merton.

## 4. Aplicación de los modelos de valoración de opciones

En este apartado aplicaremos los modelos analizados y evaluaremos su viabilidad como metodología propuesta para la valoración de opciones europeas sobre tasa de cambio en el mercado colombiano.

### 4.1 Supuestos y consideraciones

- **Base de datos:** se trabajará con las series históricas de volatilidad implícita anualizada para opciones *ATM* con vencimiento a 1, 2, 3, 6 y 12, meses y



las series de volatilidad de las estructuras *Risk Reversal* y *Vega-Weighted Butterfly* con el mismo plazo al vencimiento.

- **Validación:** la validación de los modelos se realizó bajo tres escenarios; inicialmente utilizando como *strike* o precio de ejercicio de las opciones el *strike ATM* (*at the money*) de las estructuras. Como segundo escenario el *strike* que cumple con la conocida paridad *put-call* (*Put-Call Parity*), y finalmente se da el caso de niveles de *strike* que pueden ser *OTM* (*out of the money*) o *ITM* (*in the money*). Para los dos primeros casos la aproximación es muy cercana a condiciones reales de mercado, mientras en el último caso se realizó un ejercicio de simulación de primas y precios de ejercicio (*strikes*), ya que es común encontrar en el mercado las cotizaciones de volatilidad *ATM* únicamente, de las cuales se deben inferir las otras cotizaciones *ITM* y *OTM* a través de los *delta*.
- **Tasas de interés:** para los modelos se asume que la tasa libre de riesgo local y la tasa libre de riesgo del exterior son iguales a las tasas *overnight* (actuales en el momento de elaboración de este documento) de los respectivos bancos centrales de cada economía (BanRep 4,50 % y Fed 0,25 %), expresadas en capitalización continua.
- **Precio *spot*:** para el precio *spot* se trabajó con el precio de cierre del día correspondiente en el mercado interbancario de USD-COP (SetFX).
- **Resultado:** se encontraron los precios (costo de prima) para opciones *call* y *put* europeas.

**Precios opciones europeas (implícitos).** Como aproximación a los precios históricos del derivado, tomaremos como base los indicadores de volatilidad implícita *ATM* a 1 y 2 meses obtenidos de Bloomberg; a partir de esta información se infieren precios de opciones europeas *call* y *put* implícitos, como herramienta de control. Las consideraciones sobre el precio *spot* y las tasas de interés son aplicadas como se describió anteriormente. Esto implica simular las condiciones de un ambiente de mercado real.

## 4.2 Resultados del ejercicio

### 4.2.1 *Strike ATM*

Se tomaron los datos de volatilidad implícita de mercado a 1 mes y *strike ATM*, con el fin de encontrar los precios implícitos de las opciones europeas libres de arbitraje. A través de la aplicación de los modelos de Castagna-Mercurio (Vanna-Volga) y Garman-Kohlhagen se obtuvieron los siguientes resultados (tabla 3):

Tabla 3. Costos de prima implícitos de opciones europeas USD-COP, tomando como *strike* el valor ATM de la estructura. Las diferencias fueron calculadas como valor absoluto

Fecha	USDCOP	Vol 1m	RR25d	25dBfly	kATM	V-V call	G-K call	Dif call	V-V put	G-K put	Dif put
30-Jan-15	2439.00	15.8950	1.8875	0.3425	2450.0314	43.3848	43.3848	0.000	45.9532	45.9532	0.000
27-Feb-15	2500.20	15.9350	2.0025	0.3300	2511.5215	44.5822	44.5822	0.000	47.2283	47.2283	0.000
31-Mar-15	2599.90	16.6975	1.9975	0.3575	2611.9438	48.5127	48.5127	0.000	51.5341	51.5341	0.000
30-Apr-15	2382.00	16.6925	2.2125	0.3350	2393.0327	44.4339	44.4339	0.000	47.2004	47.2004	0.000
29-May-15	2531.00	17.6000	1.9475	0.3800	2543.0525	49.7002	49.7002	0.000	52.9683	52.9683	0.000
30-Jun-15	2605.00	17.0000	1.9400	0.3900	2617.1785	49.4620	49.4620	0.000	52.6001	52.6001	0.000
31-Jul-15	2880.00	16.2250	1.9750	0.3050	2893.1538	52.2623	52.2623	0.000	55.4224	55.4224	0.000
14-Aug-15	2990.30	16.4050	1.9700	0.3100	3004.0310	54.8484	54.8484	0.000	58.2027	58.2027	0.000

Fuente: autor.

Tabla 4. Costos de prima implícitos de las opciones europeas USD-COP, tomando como *strike* el valor que cumple con la paridad *put-call*. Las diferencias fueron calculadas como valor absoluto

Fecha	USDCOP	Vol 2m	RR25d	25dBfly	k CPP	V-V call	G-K call	Dif call	V-V put	G-K put	Dif put
30-Jan-15	2439.00	15.2300	2.0550	0.4100	2455.9364	60.2470	60.4638	0.21680	60.2470	60.4638	0.21680
27-Feb-15	2500.20	15.4025	2.2275	0.3500	2517.5614	62.4849	62.6828	0.19790	62.4849	62.6828	0.19790
31-Mar-15	2599.90	16.2125	2.2425	0.3750	2617.9537	68.3918	68.6090	0.21720	68.3918	68.6090	0.21720
30-Apr-15	2382.00	16.3750	2.4375	0.3550	2398.5406	63.2386	63.4886	0.25000	63.2386	63.4886	0.25000
29-May-15	2531.00	17.1550	2.2300	0.4050	2548.5753	72.0926	72.3192	0.22660	72.0926	72.3192	0.22660
30-Jun-15	2605.00	16.4675	2.2550	0.4150	2623.0891	67.6266	67.8409	0.21430	67.6266	67.8409	0.21430
31-Jul-15	2880.00	16.0175	2.2650	0.3750	2899.9987	74.8467	75.0868	0.24010	74.8467	75.0868	0.24010
14-Aug-15	2990.30	16.3600	2.2100	0.3675	3011.0646	79.3802	79.6290	0.24880	79.3802	79.6290	0.24880

Fuente: autor.

### 4.2.2 Strike Put-Call Parity

Para este escenario se trabajó con los datos de volatilidad implícita de mercado a dos meses y *strike* que cumplen la paridad *put-call*, y se obtuvo lo presentado en la tabla 4.

### 4.2.3 Strike *ITM* y *OTM*, *Smile de volatilidad*

En el mercado de opciones sobre divisas, el precio de los derivados con diferentes *strikes* y tiempo al vencimiento se cotiza con diferentes volatilidades implícitas, este factor es conocido comúnmente como el *smile de volatilidad*. Otros autores se refieren a este efecto como la tendencia a denominar la volatilidad como una función del *strike* en un horizonte de tiempo determinado.

La existencia de este efecto permite que el mercado asigne a través del precio diversos niveles de riesgo a diferentes escenarios en el futuro, lo cual es una característica deseable. Teniendo en cuenta la revisión de los modelos analizados, cabe recordar que uno de los supuestos del modelo de Garman-Kohlhagen es el de volatilidad constante (al igual que Black-Scholes).

En otras palabras, el modelo de Garman-Kohlhagen supone que el nivel de volatilidad se mantiene para todos los niveles de *strike* y tiempo al vencimiento; por su parte, el modelo Vanna-Volga permite derivar una expresión analítica para la construcción del *smile* de volatilidad a partir del precio de la opción europea, la cual es consistente con el principio de no arbitraje. Esta última característica brinda una poderosa ventaja al modelo teniendo en cuenta que, si bien a través del modelo de Garman-Kohlhagen se puede construir el *smile* de volatilidad (y también la superficie por definición), se tiene que abandonar uno de los supuestos básicos.

Castagna-Mercurio (2006) demuestran dos expresiones que permiten la construcción del *smile* de volatilidad en su artículo. En el avance de esta investigación se desarrollaron códigos para las dos definiciones, sin embargo, los autores señalan que la aproximación que se describe a continuación es más robusta:

$$\begin{aligned} \sigma(K) &\approx \sigma_2(K) \\ &:= \sigma + \frac{-\sigma + \sqrt{\sigma^2 + d_1(K)d_2(K)[2\sigma D_1(K) + D_2(K)]}}{d_1(K)d_2(K)} \end{aligned} \quad (56)$$

donde:

$$D_1(K) = \frac{\ln \frac{K_2}{K} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} \sigma_{25\Delta p} + \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} \sigma_{ATM} \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} \sigma_{25\Delta c} - \sigma \quad (57)$$

$$D_2(K) = \frac{\ln \frac{K}{K_2} \ln \frac{K}{K_3}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_1}} d_1(K_1) d_2(K_1) (\sigma_{25\Delta p} - \sigma)^2$$

$$+ \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K_3}{K}}{\ln \frac{K_2}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} d_1(K_2) d_2(K_2) (\sigma_{ATM} - \sigma)^2 \quad (58)$$

$$+ \frac{\ln \frac{K}{K_1} \ln \frac{K}{K_2}}{\ln \frac{K_3}{K_1} \ln \frac{K_3}{K_2}} d_1(K_3) d_2(K_3) (\sigma_{25\Delta c} - \sigma)^2$$

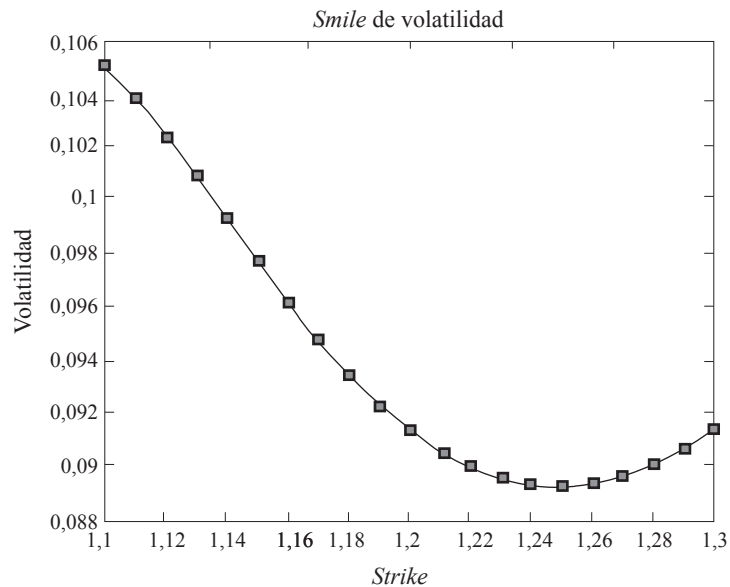
Las expresiones para  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $d_1$  y  $d_2$ , fueron definidas en la sección 2. Como ejercicio de validación del modelo y de los códigos desarrollados en la investigación, se procede a replicar el ejemplo propuesto en el artículo de Castagna-Mercurio (2006), bajo las siguientes condiciones: divisa= EUR-USD, spot=1.205,  $\sigma_{ATM} = 9,05\%$ ,  $\sigma_{RR} = -0,50\%$ ,  $\sigma_{VWB} = -0,13\%$ ,  $r_D = -0,03794$ ,  $r_F = -0,02139$ ,  $T=94/365$ , obteniendo los siguientes resultados (tabla 5):

Tabla 5. Resultados Modelo Vanna-Volga

Variable	Resultado (%)
$\sigma_{25\Delta c}$	8,93
$\sigma_{25\Delta p}$	9,43
$K_{ATM}$	1,2114
$K_{25\Delta p}$	1,1733
$K_{25\Delta c}$	1,2487

Fuente: autor.

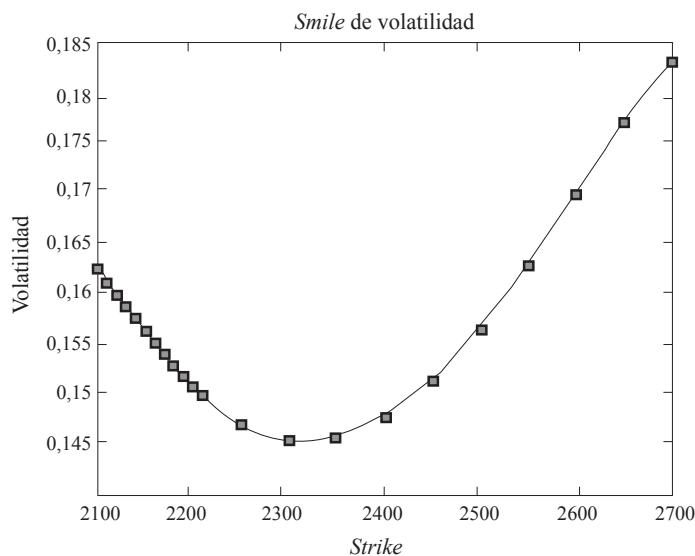
Como segunda validación se construye el *smile* de volatilidad del artículo, como se muestra a continuación, y a través de los *inputs* propuestos se llega a los niveles de volatilidad implícita *ATM* del documento (9,05 %), lo cual da una tercera validación del resultado (figura 10).

Figura 10. *Smile* de volatilidad modelo Vanna-Volga, para opciones EUR-USD

Fuente: autor.

Aplicando el modelo se construye un *smile* de volatilidad hipotético para el caso del mercado de opciones colombiano, con los siguientes parámetros a corte 30/enero/2015: divisa=USD-COP,  $spot = 2439$ ,  $\sigma_{ATM} = 15,23\%$ ,  $\sigma_{RR} = 2,05\%$ ,  $\sigma_{VWB} = 0,41\%$ ,  $r_D = 4,40$ ,  $r_F = 0,25$ ,  $T = 2/12$ , para llegar a (figura 11):

Figura 11. Gráfica de *smile* de volatilidad modelo Vanna-Volga para opciones USD-COP



Fuente: autor.

La construcción del *smile* de volatilidad permite encontrar los niveles implícitos para opciones *ITM*, por lo que a través de la expresión encontramos (tabla 6):

Tabla 6. Volatilidad implícita ante cambios en el *strike* (*ITM*), que difiere de la volatilidad *ATM*

Fecha	USD-COP	Vol 2m	RR25d	25dBfly	k CPP	V-V Vol imp.
30- Jan- 15	2439.00	15.2300	2.0550	0.4100	2455.9364	15.1863
27-Feb-15	2500.20	15.4025	2.2275	0.3500	2517.5614	15.3538
31-Mar-15	2599.90	16.2125	2.2425	0.3750	2617.9537	16.1610
30-Apr-15	2382.00	16.3750	2.4375	0.3550	2398.5406	16.3181
29-May-15	2531.00	17.1550	2.2300	0.4050	2548.5753	17.1011
30-Jun-15	2605.00	16.4675	2.2550	0.4150	2623.0891	16.4153
31-Jul-15	2880.00	16.0175	2.2650	0.3750	2899.9987	15.9661
14-Aug-15	2990.30	16.3600	2.2100	0.3675	3011.0646	16.3088

Fuente: autor.

Ahora, simulamos la aplicación del modelo Vanna-Volga con niveles de *strike* *OTM* (tabla 7):

Tabla 7. Volatilidad implícita ante cambios en el *strike* (*OTM*)

Fecha	USD-COP	Vol 2m	RR25d	25dBfly	K OTM	V-V Vol imp.
30- Jan- 15	2439.00	15.2300	2.0550	0.4100	2420.0000	14.9002
27-Feb-15	2500.20	15.4025	2.2275	0.3500	2480.0000	15.0227
31-Mar-15	2599.90	16.2125	2.2425	0.3750	2570.0000	15.7848
30-Apr-15	2382.00	16.3750	2.4375	0.3550	2360.0000	15.9462
29-May-15	2531.00	17.1550	2.2300	0.4050	2500.0000	16.7410
30-Jun-15	2605.00	16.4675	2.2550	0.4150	2550.0000	15.9047
31-Jul-15	2880.00	16.0175	2.2650	0.3750	2870.0000	15.7368
14-Aug-15	2990.30	16.3600	2.2100	0.3675	2975.0000	16.0574

Fuente: autor.

## 5. Conclusiones

Se han analizado en detalle dos modelos de valoración de opciones sobre divisas, con el fin de aplicarse al mercado colombiano. El modelo Vanna-Volga de Castagna-Mercurio presenta sólidos niveles de ajuste para la valoración de opciones *call* y *put* europeas sobre USD-COP, consistentes con el modelo clásico de Black-Scholes y su extensión de Garman-Kohlhagen cuando la opción se encuentra *ATM* (para este tipo de opción ambos modelos presentan niveles de ajuste satisfactorios). El modelo Vanna-Volga permite encontrar niveles de volatilidad consistentes cuando la opción se encuentra *ITM* y *OTM*.

Si bien el modelo de Garman-Kohlhagen también puede llegar a niveles de ajuste que son sólidos y comparables con el de Castagna-Mercurio para opciones *ITM* y *OTM*, es necesario abandonar uno de los supuestos básicos como es la volatilidad constante. Abandonar este supuesto permite la construcción del *smile* de volatilidad.

La expresión analítica para el *smile de volatilidad* en el modelo Vanna-Volga le brinda capacidad superior de ajuste respecto a otros modelos con solución analítica, sumado a su facilidad de implementación.

El movimiento browniano geométrico generalizado puede encontrarse como un modelo de ajuste aceptable que cumple con las condiciones mínimas necesarias para ser considerado el proceso estocástico que describe el comportamiento del subyacente (tasa de cambio USD-COP). Se abre la discusión sobre otros modelos que podrían representar un mejor ajuste.

La revisión en detalle de la solución analítica de los modelos analizados se convierte en uno de los aportes de este trabajo. Uno de los principales obstáculos para la implementación de otros modelos reside en la calibración de los parámetros, problema que recibe especial atención en la academia y ha motivado importantes avances.

Este trabajo presenta una introducción para futuras investigaciones sobre el tema de valoración de opciones, en el cual el campo de acción se amplía a medida que se abandonan los supuestos del modelo básico de Black-Scholes, o se trata el problema de valoración de derivados más complejos.



## Referencias

- Black, F. (1976). The pricing of commodity contracts. *Journal of Financial Economics* 3(1-2), 167-79.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81(3) 637-54.
- Brigo, D., Dalessandro, A., Neugebauer, M. y Triki, F. (2008). *A Stochastic Processes Toolkit for Risk Management*. 1-43. Recuperado de <http://www.damianobrigo.it/toolboxweb.pdf>
- Castagna, A. y Mercurio, F. (2006). *Consistent pricing of FX options*. Recuperado de <http://www.fabiomercurio.it/consistentfxsmile.pdf>
- Clavijo, S. (2001). *El régimen de flotación cambiaria en Colombia*. Recuperado de <http://www.banrep.gov.co/sites/default/files/publicaciones/archivos/flotacion1.pdf>
- Garman, M. B. y Kohlhagen, S. W. (1983). Foreign currency option values. *Journal of International Money and Finance* 2(3), 231-37.
- Hull, J. (2012). *Options, Futures and Other Derivatives* (8 ed.). Toronto: Pearson.
- Kou, S. G. (2007). Jump-Diffusion models for asset pricing in financial engineering. *Handbooks in Operations Research and Management Science* 15(C), 73-116.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics* 4(1), 141-83. Recuperado de <http://www.jstor.org/stable/3003143>
- Merton, R. C. (1976). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics* 3(1-2), 125-44.
- Moreno, J. (2011). Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas. *ODEON* 6, 131-44.
- Samuelson, P. (1965). Rational Theory of Warrant Pricing. *Industrial Management Review* 6(2), 13-31.
- Samuelson, P. y Merton, R. C. (1969). A complete model of warrant pricing that maximizes utility. *Industrial Management Review* 10(2), 17-46.
- Villar, L. (1999). *Política cambiaria en un proceso de ajuste ordenado*. Recuperado de [http://www.banrep.gov.co/docum/Lectura\\_finanzas/pdf/politcambi.pdf](http://www.banrep.gov.co/docum/Lectura_finanzas/pdf/politcambi.pdf)