

Variación de la tasa de cambio como un proceso estocástico y su efecto sobre el déficit fiscal colombiano

Clark Granger Castaño*

* Magíster en Finanzas, Profesional de la Subgerencia de Política monetaria y de información económica, Banco de la República, Bogotá (Colombia). [cgrangca@banrep.gov.co].

Fecha de recepción: 12 de febrero de 2017.

Fecha de aceptación: 15 de marzo de 2017.

Para citar este artículo:

Granger Castaño, C. (2017). Variación de la tasa de cambio como un proceso estocástico y su efecto sobre el déficit fiscal colombiano. ODEON, 12, pp. 119-145. DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n12.05>

Introducción

Sobre el resultado fiscal de un Gobierno influyen un sinnúmero de variables, en particular, el crecimiento de la economía en un periodo, el cual determina los ingresos vía recaudos, y aumentos en las tasas de interés de la deuda interna y externa, que pueden generar un incremento considerable en el pago de los intereses. Además, existe cierta evidencia empírica sobre la forma en que las variaciones de la tasa de cambio afectan la magnitud del déficit fiscal, siendo esta la segunda variable principal sobre la cual los encargados de la hacienda pública realizan estimaciones de corto y mediano plazo en el caso colombiano. El método más comúnmente utilizado por los ministerios de Economía para medir el posible impacto de estas variaciones considera modelos determinísticos que establecen elasticidades para cada una de las variables que inciden en el déficit, a fin de generar una idea sobre la magnitud y dirección de futuros choques.

En este orden de ideas, y con el propósito de abordar un enfoque distinto en la previsión del resultado fiscal, un primer objetivo de este documento es hacer uso de procesos estocásticos para representar las variaciones de la tasa de cambio nominal, con el fin de desarrollar un modelo para el cálculo del déficit fiscal que incorpore esta variable estocástica. Lo anterior pretende ser un aporte al estudio de cifras fiscales en el ámbito local, incorporando la perspectiva de incertidumbre. Para esto, se considera un proceso de difusión con saltos de Poisson que describe la dinámica de la tasa de cambio. Los componentes de tendencia y difusión del tipo de cambio se consideran descritos por un proceso Vasicek, es decir, de reversión a la media, mientras que los movimientos extremos (saltos) serán representados por un proceso de Poisson. Como referente de esta aproximación se considera el trabajo de Rodríguez y Venegas (2010).

A partir de la metodología desarrollada se realizarán simulaciones de Montecarlo con el fin de obtener proyecciones del déficit del Gobierno nacional de Colombia, escogido por ser la cifra más relevante en términos del cumplimiento de la regla fiscal, lo que proporciona un apoyo adicional en la realización de las estimaciones de las metas fiscales, desde un punto de vista enfocado en la medición de los efectos de las variaciones de la tasa de cambio. Además, a partir de estas proyecciones se estima una senda de la deuda del Gobierno nacional, para lo cual se admite que se cumple la identidad del déficit por debajo de la línea, donde se asume este último equivalente a la variación de la deuda.

La relevancia del estudio de las finanzas públicas dentro del campo de las ciencias económicas se debe, en parte, a la importancia del estado como un agente

determinante de las dinámicas económicas de un territorio, tanto por sus acciones individuales como por su interacción con los demás agentes. El déficit fiscal y la deuda pública son variables ampliamente usadas para medir el desempeño y la dirección de la política fiscal en un periodo determinado de tiempo, y el análisis de estas puede ofrecer conocimientos sobre su comportamiento futuro, es por esto que una línea de investigación relevante dentro de las finanzas públicas está orientada al análisis de los factores que determinan estas dos variables, así como su incidencia sobre otras variables macroeconómicas.

En el trabajo de Penati (1983) se busca establecer una relación entre la política fiscal expansiva y la tasa de cambio. El autor concluye que ni la teoría ni la evidencia empírica pueden determinar qué elemento predomina, ya que mediante el uso de ejercicios de equilibrio neoclásicos se encuentra que una política fiscal expansiva genera aumentos en la producción y los precios, los cuales se equilibrarán con una apreciación de la tasa de cambio. Se destaca que esta política lleva a la producción más allá del nivel potencial, por lo cual la situación es sostenible solo en el corto plazo, dado que las expectativas de una reducción futura en producción y precios generarán una expectativa de depreciación, lo que presionará hacia una depreciación real de la tasa de cambio. Penati identifica que la relación entre tasa de cambio y política fiscal depende de los movimientos del producto real y los precios, que a la larga están relacionados con la estructura productiva y de salarios de un país.

Erceg, Guerrieri y Gust (2005), mediante un modelo de equilibrio general dinámico estocástico, evalúan los efectos cuantitativos de choques fiscales sobre la balanza comercial de Estados Unidos. Para el ejercicio suponen dos choques distintos, uno causado por un aumento en el consumo del Gobierno, y otro dado por una reducción sobre el impuesto a los trabajadores. En la investigación se encuentran que la política fiscal tiene un efecto marginal sobre el balance comercial en los dos escenarios planteados, y que un aumento de un punto del producto interno bruto (PIB) en el déficit fiscal solo causaría un deterioro de 0,2 % del PIB o menos en la balanza comercial.

En el trabajo de Rodríguez y Venegas (2010) se aborda la relación entre tasa de cambio y déficit fiscal, buscando identificar los efectos de la variación de la tasa de cambio sobre el balance fiscal del Gobierno mexicano. A través de ejercicios de simulación de Monte Carlo los autores modelan las fluctuaciones del tipo de cambio peso mexicano-dólar americano y se generan resultados del balance fiscal. Los autores encuentran que el modelo explica de manera correcta los datos observados en el pasado. Para su comprobación dividen los datos observados en dos ventanas

de tiempo, una en la década de los noventa y otra en la primera década del siglo xx, encontrando que el modelo propuesto genera los resultados más consistentes en ambas ventanas cuando se usan las magnitudes en términos reales, por lo cual proponen la herramienta como factible para la realización de simulación *ex ante* con el fin de apoyar el diseño del presupuesto público.

Otros trabajos en los que se investiga el impacto de la deuda pública sobre el crecimiento económico son el de Checherita-Westphal y Rother (2011) del Banco Central Europeo, en el cual los autores analizan el efecto de la deuda pública sobre el crecimiento del producto per cápita de 12 países europeos durante los últimos 40 años. El ejercicio es realizado a partir de la generación de regresiones con datos panel, y encuentran evidencia de un efecto no lineal. Revelan una relación cóncava entre las variables con un punto de inflexión para niveles de deuda como porcentaje del PIB entre 90 y 100 %, lo que significa que la deuda pública se asocia, en promedio, con tasas de crecimiento más bajas a largo plazo en los niveles de deuda por encima de ese rango. Además, destacan que los canales por los que se encuentra esta relación no lineal son el ahorro privado, la inversión pública y la productividad total de los factores.

El trabajo de Agnello, Furceri y Sousa (2013) busca medir los efectos de la política fiscal discrecional, evaluando el efecto de esta sobre el gasto privado a través de un enfoque empírico que usa como herramienta principal regresiones con datos panel de países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Los autores encuentran que la política fiscal expansiva impulsa el crecimiento en el corto plazo, pero es perjudicial en el mediano plazo. Además, que los efectos varían dependiendo de las condiciones económicas de un país, descritas por el nivel de desarrollo económico, la apertura comercial, el Gobierno y el tamaño. Por otro lado, la investigación de Bouakez, Chih y Normandin (2014) busca medir los efectos macroeconómicos de la política fiscal utilizando una metodología empírica alternativa que relaja las restricciones de identificación utilizadas comúnmente en la literatura SVAR. Encuentran que la política fiscal expansiva es más efectiva que la disminución de impuestos con fines de dinamizar el PIB.

En el trabajo realizado por Bouakez y Eyquem (2014) se busca contrastar los resultados de la teoría tradicional de Mundell-Fleming y los modelos dinámicos de equilibrio general, que sostienen que un aumento en el déficit fiscal genera una apreciación de la tasa de cambio real. Para ello proponen un modelo de economía pequeña abierta basado en mercados financieros incompletos e imperfectos, rigidez de precios y una política monetaria no agresiva, el cual arroja como

resultado una depreciación leve de la tasa de cambio real, en contravía de los modelos tradicionales, pero consistente con algunos ejercicios empíricos.

Respecto a la aplicación de procesos combinados de difusión con saltos, investigaciones pioneras los adaptaron para la representación de los precios de activos financieros, por ejemplo, los trabajos de Ball y Torous (1983), que utilizan un proceso simplificado de saltos para modelar los retornos de acciones; Aase (1988) utiliza un proceso combinado de difusión con saltos para la valoración de créditos contingentes. Bates (1988) realiza una caracterización de un mercado en equilibrio cuando los activos siguen un proceso de difusión con saltos y desarrolla una metodología para valorar opciones que tienen estos activos como subyacentes, encontrando un modelo de valoración manejable que es válido incluso cuando el riesgo de salto es sistemático y no diversificable; además, describe las estrategias de cobertura dinámicas que justifican el modelo planteado.

La posibilidad de modelar la dinámica aleatoria de activos mediante procesos estocásticos de difusión con salto se puede encontrar en trabajos como el de Duffie (2005).

Trabajos como los de Akgiray y Booth (1988) mencionan la conveniencia de modelar la tasa de cambio a través de procesos estocásticos de difusión con salto. Estos autores realizan la prueba para el marco alemán, la libra esterlina y el franco francés contra el dólar americano, y concluyen que la metodología es superior a la combinación de procesos normales discretos. Por su parte, Jiang (1998) propone un enfoque de inferencia directa para la estimación de los parámetros de los procesos de difusión y salto en tiempo continuo a partir de datos observados en forma discreta. Este enfoque se utiliza para generar modelos de la dinámica de la tasa de cambio, y los resultados de las estimaciones sugieren que los saltos son componentes importantes de la dinámica, incluso cuando la heterocedasticidad condicional y reversión a la media se tienen en cuenta.

Basados en la literatura mencionada, en este documento se consideran procesos de difusión con saltos para modelar las variaciones del tipo de cambio peso colombiano a dólar americano.

1. Definición de déficit fiscal y componentes estocásticos

El déficit fiscal (D_t) resulta de la suma entre gastos sin intereses del Gobierno (G_t), que incluye gastos de funcionamiento e inversión; más el pago de intereses ($i_t B_{t-1}$), que es la tasa de interés de la deuda pública (i_t) multiplicada por el saldo de la deuda en el periodo anterior (B_{t-1}), menos los ingresos totales del Gobierno (T_t), como se

muestra en la ecuación (1). Esta forma de medición del déficit se denomina “por encima de la línea”.

$$D_t = G_t + i_t B_{t-1} - T_t \quad (1)$$

Esta expresión debe ser equivalente a la ecuación (2), la cual representa el déficit medido como la variación de la deuda pública, medición denominada “por debajo de la línea”, que mide la variación de los activos y pasivos financieros, es decir, las fuentes de financiamiento del déficit gubernamental.

$$D_t = B_t - B_{t-1} \quad (2)$$

Bajo esta lógica, se tiene que una amortización se cuenta como un superávit y mayor deuda como un déficit. En la práctica, estas medidas arrojan resultados similares y las diferencias se dan por discrepancias en la inclusión de cuentas¹.

Se tiene entonces:

$$B_t - B_{t-1} = G_t + i_t B_{t-1} - T_t$$

de donde, la deuda del Gobierno en el periodo actual está compuesta por el déficit primario, más el saldo de la deuda en el periodo anterior, más sus respectivos intereses, como se muestra en la ecuación (3).

$$B_t = (G_t - T_t) + (1 + i_t) B_{t-1} \quad (3)$$

Reordenando se llega a la *ecuación de sostenibilidad de la deuda pública*, la cual establece que la única forma de reducir la deuda es obteniendo un superávit primario durante el ejercicio.

$$B_t = (1 + i_t) B_{t-1} - (T_t - G_t) = (1 + i_t) B_{t-1} - SP_t \quad (4)$$

¹ En el cálculo por debajo de la línea se tienen en cuenta los ingresos por privatizaciones.

Los periodos de tiempo considerados para estas ecuaciones son, en general, anuales, pero es posible reescalar las mismas hasta horizontes mensuales a partir de los datos considerados.

2. Procesos estocásticos de reversión a la media y saltos

En este trabajo se asumirá que las variaciones en el tipo de cambio pueden describirse mediante un proceso estocástico tipo Vasicek, el cual es descrito por la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \alpha(u - S_t)dt + \sigma dW_t \quad (5)$$

En este caso, los valores del proceso estocástico oscilan alrededor de su media o tendencia de largo plazo u el parámetro α representa la velocidad de ajuste, y W_t es un movimiento browniano estándar. La solución fuerte de esta ecuación está dada por:

$$S_t = u + e^{-\alpha t} (S_0 - u) + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha s} dW_s \quad (6)$$

Debido a la característica de no normalidad de algunas series financieras, en particular del tipo de cambio, se considera la inclusión en el modelo de saltos descritos mediante procesos de Poisson, dando lugar a lo que se conoce como procesos mixtos de difusión con saltos. Siendo que el proceso estocástico que caracteriza a los saltos inesperados es:

$$\eta dN_t \sim P(\lambda, \lambda) \quad (7)$$

donde N_t es un proceso de Poisson homogéneo, con intensidad independiente del tiempo λ que representa la intensidad de los saltos, y siendo η el tamaño medio esperado del salto. Se considerará el proceso mixto de difusión con saltos de Poisson:

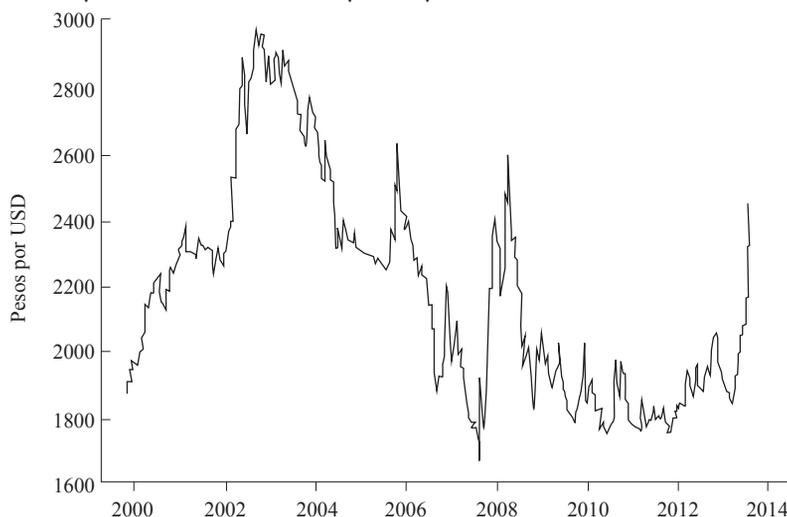
$$dS_t = \alpha(u - S_t)dt + \sigma dW_t + \eta dN_t \quad (8)$$

3. Tipo de cambio nominal

El tipo de cambio en Colombia, y por ende su variación, ha estado determinado por distintos regímenes de política cambiaria, que inician con uno de tipo de cambio fijo, en el cual se determinaba un tipo de cambio oficial por parte del Banco Central, el cual era válido para toda una vigencia macroeconómica y que funcionó hasta finales de los años sesenta. A partir de ese momento, se adoptó un régimen de devaluaciones gota a gota o *crawling peg*, el cual consistía en la determinación de un tipo de cambio a inicios de una vigencia, que posteriormente iba siendo modificado por minidevaluaciones con el propósito de que el país ganara competitividad en los mercados internacionales. En 1992, en el contexto de la apertura comercial del país, se optó por un régimen de bandas cambiarias en el cual el Banco Central determinaba el rango donde podría oscilar el tipo de cambio, y ante eventuales variaciones que excedieran los límites, la autoridad cambiaria entraría a intervenir el mercado para corregirlo. Por último, a partir de octubre de 1999, cuando el país se encontraba atravesando por su última gran crisis económica, se incorporó el régimen vigente, el cual es uno de libre flotación del tipo cambio, en el cual, este es fijado por las dinámicas de oferta y demanda que se presenten.

En la figura 1 se representa la serie del tipo de cambio diario para el periodo de análisis considerado, que para este caso inicia en el año 2000, momento en el que arranca el régimen de libre flotación.

Figura 1. Tipo de cambio nominal pesos por dólares americanos – Serie diaria



Fuente: elaboración propia con datos del Banco de la República.

En la tabla 1 se presenta un resumen estadístico de la serie del tipo de cambio nominal, se observa que el valor máximo se encuentra cercano a los 3000, el cual se alcanzó en los años iniciales de la primera década del siglo XX, esto obedece al periodo poscrisis hipotecaria, cuando Colombia se presentó dificultades cambiarias que también tuvieron varios países de la región, lo cual motivó al Gobierno a solicitar una línea de crédito al Fondo Monetario Internacional (FMI) para cumplir con sus obligaciones de deuda externa.

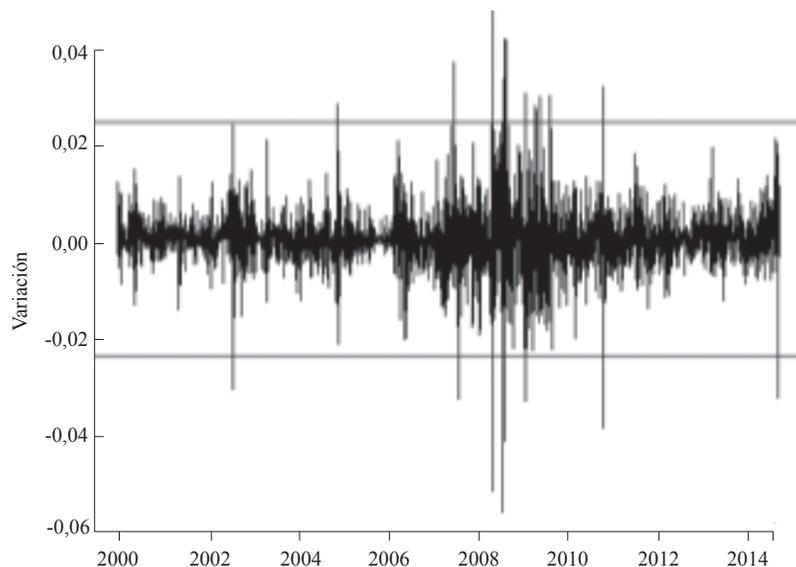
Tabla 1. Resumen estadístico de la serie de tipo de cambio nominal

Mediana	2157.75
Media	2179.42
Mínimo	1652
Máximo	2969
Desviación estándar	327.03
Varianza	106963.20
Sesgo	0.66
Curtosis	-0.49

Fuente: elaboración propia con datos del Banco de la República.

Para el desarrollo de la metodología propuesta se considera la serie de las variaciones del tipo de cambio, la cual se calcula a partir de los retornos logarítmicos de la serie. En la figura 2 se presentan gráficamente estas variaciones, las cuales muestran una desviación estándar de 0,0051 durante el periodo observado.

Figura 2. Variaciones diarias del tipo de cambio nominal.
Las bandas consideradas están a tres desviaciones estándar de la media

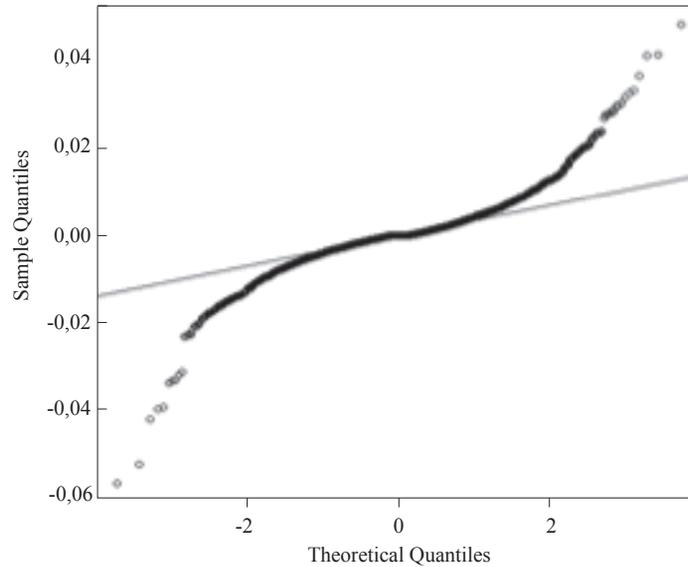


Fuente: elaboración propia.

El periodo más importante de volatilidad se presencié entre los años 2008 y 2010, motivado por la crisis financiera internacional; se detalla que en esa franja de tiempo se encuentran la mayoría de las observaciones que exceden tres desviaciones estándar.

Respecto a las características de la serie de las variaciones del tipo de cambio, se procedió a realizar algunos de los test más utilizados para determinar las condiciones de esta. De forma inicial se decidió efectuar el test de Dicky-Fuller para raíz unitaria con el fin de determinar la estacionariedad de la serie, el resultado de este fue un p-valor $< 0,01$, lo cual rechaza la hipótesis nula de no estacionariedad; este resultado era esperado al tratarse de una serie de rendimientos. Luego, se procedió a efectuar los tests de normalidad de Anderson-Darling y de Kolmogorov-Smirnov, y en ambos se obtiene un p-valor $< 2,2e-16$, el cual rechaza la hipótesis nula de normalidad; además, como se observa en la figura 3, el gráfico Q-Q confirma estos resultados. Los resultados de las pruebas aplicadas son valiosos, pues estas características ofrecen validez y relevancia a la metodología que se propondrá para la modelación dado que reflejan la fluctuación de los datos alrededor de la media pero con saltos extremos aleatorios.

Figura 3. Gráfico Q-Q – Variaciones del tipo de cambio

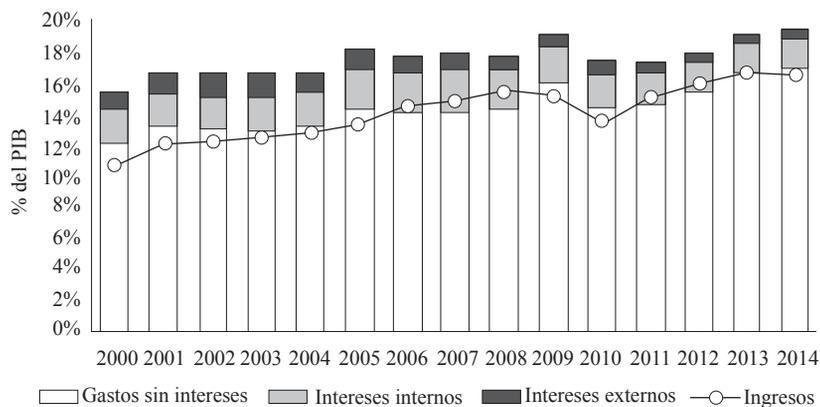


Fuente: elaboración propia.

4. Cifras del déficit fiscal

Para el cálculo de déficit fiscal se considera exclusivamente el Gobierno nacional central (GNC), esto por dos razones principales: primero, porque la deuda externa —que es la principal afectada por la variación del tipo de cambio— es emitida en su mayoría por el GNC, y segundo, por la importancia del balance del GNC en términos de la medición del desempeño de la política fiscal, dado que la meta de la regla fiscal se plantea sobre este resultado. Para la elaboración de estos cálculos se cuenta con las series mensuales de ingresos del GNC, las cuales, en su desagregación, contienen los ingresos corrientes, ingresos de capital y fondos especiales; gastos del GNC, que contienen los gastos de funcionamiento, gastos en intereses internos y externos e inversión; y con la serie de la deuda bruta del GNC, la cual está desagregada en interna y externa.

Figura 4. Ingresos y gastos del Gobierno nacional central



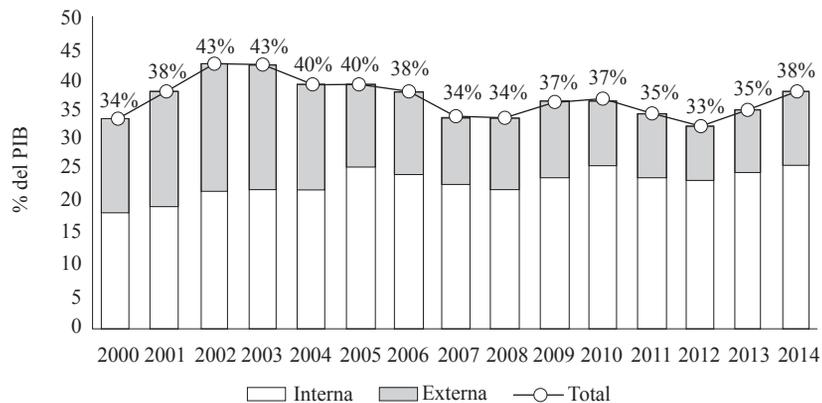
Fuente: elaboración propia con datos del Ministerio de Hacienda y Crédito Público.

En la figura 4 se presentan los ingresos y gastos del GNC para el periodo de estudio, se puede determinar una tendencia creciente de los ingresos, con excepción de 2010, cuando por motivo de la caída del precio internacional del petróleo se redujeron las rentas provenientes de ese sector de manera sustancial. En los gastos se ha mantenido un tendencia estable, y dentro de los componentes de estos se identifican como de mayor crecimiento los gastos sin intereses que comprenden funcionamiento e inversión; al desagregar aún más se encuentra el crecimiento destacado del rubro de pensiones, que pasó de ser 1,8 % del PIB en 2000, a ser 3,6 % en 2014. A su vez, el rubro de inversión tuvo un crecimiento de más del doble pasando de ser 1,3 % del PIB en 2000 a ser 3 % en 2014. Por el lado de los intereses se observa que tanto los internos como los externos han venido perdiendo participación, lo cual está explicado en parte por el mejoramiento de las condiciones de acceso de crédito del país, el cual en los últimos años ha tenido tasas de financiamiento históricamente bajas.

Respecto a la deuda bruta del GNC, que se refiere al cálculo que incluye deuda intrapública, como se observa en la figura 5, esta ha tenido un comportamiento más irregular respecto a los ingresos y gastos. Se observa un pico en el año 2003, el cual corresponde a los años posteriores a la crisis financiera de finales del siglo XX, en el cual el Gobierno suscribió un acuerdo de ajuste macroeconómico con el FMI. Además, se destaca la pérdida de participación de la deuda externa en la primera mitad de la década anterior, lo cual se explica por el desarrollo del mercado interno

para la renta fija pública y por una política adoptada por el Gobierno de turno para realizar una reacomodación de las participaciones a favor de la deuda local.

Figura 5. Deuda bruta del gobierno nacional



Fuente: elaboración propia con datos del Banco de la República y el Ministerio de Hacienda.

5. Modelo propuesto

Con el ánimo de medir los efectos de la variación de la tasa de cambio sobre el déficit fiscal del GNC, se tomará esta tasa como una variable aleatoria que sigue un proceso estocástico de difusión con saltos dado que, como quedó establecido en la revisión de literatura, son varias las investigaciones que argumentan la utilidad de esta técnica. Para esto se seguirá el modelo propuesto por Rodríguez y Venegas (2010), los cuales realizaron el ejercicio para el balance económico del sector público mexicano.

El modelo se construye a partir de la ecuación de cálculo del déficit por encima de la línea, es decir, un balance de ingreso y gastos. Sin embargo, a esta ecuación tradicional se le debe realizar una desagregación en el pago de intereses, distinguiendo los pagos por endeudamiento interno y los pagos por endeudamiento externo, con el fin de medir de forma clara los choques de la variación del tipo de cambio. El modelo para el caso de Colombia se desarrollará a partir de la siguiente ecuación que define el déficit fiscal con la desagregación sugerida:

$$D_t = (G_t - T_t) + i_t B_{t-1} + i_t^* B_{t-1}^* g_t \quad (9)$$

donde D_t denota el déficit nominal para un periodo, G_t corresponde a los gastos sin intereses del Gobierno central, T_t son los ingresos totales del Gobierno central, I_t e i_t^* son las tasas de interés de la deuda pública interna y externa respectivamente, y B_{t-1} y B_{t-1}^* son los saldos de la deuda pública interna y externa en el periodo anterior.

La variación de la tasa de cambio o depreciación continua se define como:

$$e_t = \ln\left(\frac{g_t}{g_{t-1}}\right) \quad (10a)$$

Esta variación también se puede medir como:

$$e_t = \frac{g_t - g_{t-1}}{g_{t-1}} \quad (10b)$$

y la variación del índice de precios al consumidor o tasa de inflación, como:

$$\pi_t = \frac{P_t}{P_{t-1}} - 1 \quad (11)$$

A partir de la ecuación (2) se llega a una ecuación del déficit fiscal del Gobierno central en términos reales:

$$D_t^{real} = \frac{(G_t - T_t)}{P_t} + \frac{i_t B_{t-1}}{P_t} + \frac{i_t^* B_{t-1}^* g_t}{P_t} - \frac{\pi_t B_{t-1}}{P_t} + B_{t-1}^* g_{t-1} \left(\frac{e_t - \pi_t}{P_{t-1}(1 + \pi_t)} \right) \quad (12)$$

Considerando las derivadas parciales de las ecuaciones (1) y (2) respecto al tipo de cambio se llega a:

$$\frac{\partial D_t}{\partial g_t} = i_t^* B_{t-1}^* > 0$$

$$\frac{\partial D_t^{real}}{\partial g_t} = \frac{B_{t-1}^*}{P_t} (i_t^* + 1) > 0$$

que muestran que un incremento en la tasa de cambio, si se mantiene todo lo demás constante, llevará a aumentos en el déficit fiscal.

Para describir el comportamiento de la variación de la tasa de cambio, y siguiendo el trabajo de Rodríguez y Venegas (2010), se considera un proceso estocástico de difusión con saltos de Poisson que satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$de_t = \alpha(u - e_t)dt + \sigma dZ_t + \eta dN_t, \quad dZ_t \sim N(0, dt), \quad dN_t \sim P(\lambda, \lambda) \quad (13)$$

donde la tasa de cambio e_t oscila alrededor de su valor promedio de largo plazo u ; la velocidad de ajuste cuando e_t es mayor o menor al promedio u está denotada por α . Además, Z_t es un movimiento browniano estándar, λ representa la intensidad del proceso Poisson que describe los saltos, y η corresponde al tamaño medio esperado del salto.

Teniendo el proceso estocástico que modela el comportamiento aleatorio de la variación de la tasa de cambio, se procede a incluirlo en las ecuaciones del déficit fiscal, lo que permite desarrollar ecuaciones estocásticas del déficit fiscal en términos nominales y reales. Sin embargo, antes de esto, es necesario asumir el principio de paridad de tasas de interés interna y externa, el cual es descrito por Rodríguez y Venegas (2010) mediante la siguiente ecuación:

$$i_t = i_t^* + \frac{g_t - g_{t-1}}{g_{t-1}}$$

es decir:

$$i_t^* = i_t - e_t$$

En términos nominales:

$$D_t = (G_t - T_t) + i_t B_{t-1} + (i_t - [\alpha(u - e_t)dt + \sigma dZ_t + \eta dN_t]) B_{t-1}^* g_t \quad (14)$$

y en términos reales:

$$D_t^{real} = \frac{(G_t - T_t)}{P_t} + \frac{i_t B_{t-1}}{P_t} + \frac{B_{t-1}^* g_t (i_t - [\alpha(u - e_t)dt + \sigma dZ_t + \eta dN_t])}{P_t} - \frac{\pi_t B_{t-1}}{P_t} + B_{t-1}^* g_{t-1} \left(\frac{[\alpha(u - e_t)dt + \sigma dZ_t + \eta dN_t] - \pi_t}{P_{t-1}(1 + \pi_t)} \right) \quad (15)$$

6. Estimación de los parámetros

El procedimiento que se utiliza en este trabajo para la representación aleatoria de la volatilidad de la tasa de cambio está compuesto por una combinación de procesos, uno de difusión y uno de saltos de Poisson. Por esto, la estimación de parámetros se desarrollará separando estos dos procesos, de tal forma que se hallen los estimadores que serán usados para simular el modelo.

La estimación de los parámetros del proceso de difusión se realizará a través del método de máxima verosimilitud. El objetivo es establecer los valores de los parámetros que hacen que la función de verosimilitud del proceso definido se maximice, como está reseñado en Moreno (2011).

Para la estimación de parámetros partimos de la ecuación que describe la diferencial estocástica del proceso de reversión a la media utilizado:

$$de_t = \alpha(u - e_t)dt + \sigma dZ_t \quad (16)$$

Si hacemos $b = \alpha u$, se llega a la siguiente expresión:

$$de_t = (b - \alpha e_t)dt + \sigma dZ_t \quad (17)$$

y por la aplicación de la fórmula de Itô multidimensional se tiene que:

$$e_t = \exp^{-\alpha(t-s)} e_s + \frac{b}{\alpha} (1 - \exp^{-\alpha(t-s)}) + \sigma \exp^{-\alpha t} \int_s^t \exp^{\alpha h} dZ_h$$

Para $0 \leq s < t$. Se tiene que e_t , condicionada a F_s , tiene una distribución normal con media y varianza dadas por:

$$E[e_t | F_s] = \frac{b}{\alpha} (1 - \exp^{-\alpha(t-s)}) + e_s \exp^{-\alpha(t-s)} \quad (18)$$

$$V[e_t | F_s] = \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - \exp^{-\alpha(t-s)}) \quad (19)$$

La siguiente ecuación resulta de la discretización de la ecuación que representa el proceso de reversión a la media. Para esta representación se considera una partición

$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ con tamaño del paso constante dado por $\Delta t = t_i - t_{i-1}$, como se muestra en Phillips (1972):

$$e_t = \frac{b}{\alpha}(1 - \exp^{-\alpha\Delta t}) + \exp^{-\alpha\Delta t} e_{t-1} + \sigma \sqrt{(1 - \exp^{-2\alpha\Delta t})/2} \alpha Z \quad (20)$$

donde $Z \sim N(0,1)$. Esta expresión se puede simplificar tomando:

$$c = \frac{b}{\alpha}(1 - e^{-\alpha\Delta t}); \quad d = \exp^{-\alpha\Delta t}; \quad \delta = \sqrt{(1 - \exp^{-2\alpha\Delta t})/2} \alpha \quad (21)$$

con lo cual se llega a:

$$e_t = c + d\gamma_{t-1} + \delta Z \quad (22)$$

Considerando una nueva variable $\theta = \frac{b}{\alpha}$ y aplicando el método de máxima verosimilitud, se tienen los siguientes estimadores, como se demuestra en Moreno (2011), donde n corresponde al número de observaciones:

$$\hat{d} = \frac{n \sum_{i=1}^n e_i - e_{i-1} - \sum_{i=1}^n e_i \sum_{i=1}^n e_{i-1}}{n \sum_{i=1}^n e_{i-1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n e_{i-1} \right)^2} \quad (23)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{i=1}^n (e_i \bar{d} e_{i-1})}{n(1 - \bar{d})} \quad (24)$$

$$\hat{\delta}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n e_i - \bar{d} e_{i-1} - \bar{\theta}(1 - \bar{d})^2 \quad (25)$$

Expresiones que permiten estimar los parámetros del proceso de difusión, de forma que:

$$\alpha = -\frac{\ln(d)}{\Delta t}; \quad b = -\frac{\theta \ln(d)}{\Delta t}; \quad \sigma = \frac{\delta}{\sqrt{(1 - d^2)/2} \alpha} \quad (26)$$

Los resultados de la estimación se presentan en la tabla 2.

Tabla 2. Parámetros del proceso de difusión

Parámetros proceso de difusión	
α	3,256700
b	0,000001
σ	0,019150

Fuente: elaboración propia.

Para la estimación de los parámetros del proceso de saltos de Poisson se sigue la metodología propuesta en el trabajo de Rodríguez y Venegas (2010), donde se considera que el número de saltos de Poisson por periodo (dN_t) es el número de observaciones que superan entre tres desviaciones estándar, ya sea por encima o por debajo de la media. La intensidad del salto, que se denota λ , se calcula como el número de saltos totales en el periodo de estudio entre el total de observaciones $\lambda = dN_t/n$. Por último, el tamaño medio esperado del salto se calcula como la varianza del proceso de Poisson por unidad de tiempo entre el número de saltos totales $\eta = \lambda/dN_t$.

De igual forma, como se procedió con los parámetros del proceso de difusión, se calculan los valores de los parámetros del proceso de salto de Poisson, que se resumen en la tabla 3.

Tabla 3. Parámetros del proceso de saltos de Poisson

Parámetros proceso de salto	
dN_t	91
N_t	1
n	3912
λ	0,0232617
η	0,0002556

Fuente: elaboración propia.

Con base en los resultados anteriores se procede a realizar las simulaciones del modelo consideradas para la tasa de cambio, para luego incorporar los resultados en las ecuaciones estocásticas del déficit fiscal, evaluar los resultados y la conveniencia de utilizar la técnica propuesta.

7. Simulación a partir de las ecuaciones estocásticas del déficit fiscal

Para realizar las simulaciones de la variación del tipo de cambio se utilizó la serie diaria (sin fines de semana) de la tasa de cambio nominal. Una vez se tienen los estimadores del modelo calibrados con los datos históricos, se procede a realizar las simulaciones por el método de Montecarlo. El primer ejercicio consistió en generar una simulación de las variaciones del tipo de cambio para el periodo que contempla la serie utilizada: enero de 2000 a diciembre de 2014. Para este ejercicio se realizaron 1000 simulaciones. Estas variaciones, previamente anualizadas, se incorporaron en la ecuación estocástica del déficit fiscal en términos nominales y se generaron los resultados para los años observados de la muestra. Paralelo a esto, se calculó el déficit fiscal con las variaciones observadas en el periodo.

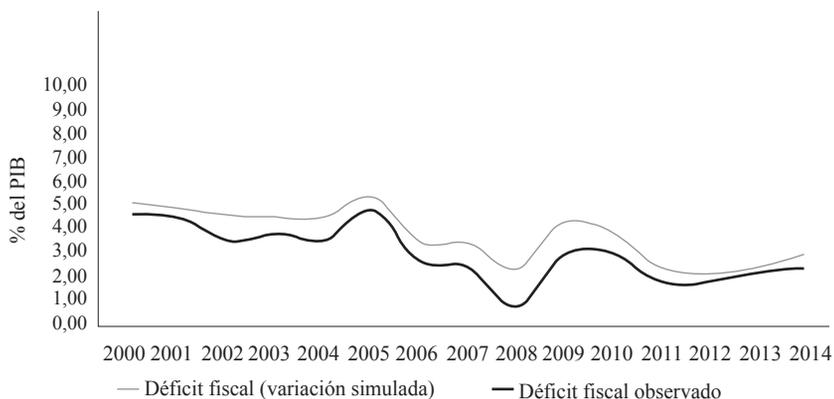
Para los resultados mostrados se utilizó solamente la ecuación estocástica del déficit en términos nominales, ya que este se presenta como proporción del PIB, que es un estándar internacional para la presentación de estadísticas fiscales, por lo cual el cálculo en términos reales se encontraría redundante al ser la misma cifra, a menos que se quisiera ver el crecimiento real del déficit, el cual no es el objetivo de este trabajo. Para la tasa de interés de la deuda interna del Gobierno nacional se calculó una tasa de interés implícita, la cual es compatible con el planteamiento del modelo propuesto ya que asume una tasa única para el total de la deuda interna, y que servirá para realizar el supuesto de paridad de tasas de interés interna y externa.

Los resultados del ejercicio comparativo se plasman en la figura 6, en la cual se puede observar el comportamiento de ambas series, y se encuentra que la serie resultante del modelo que incorpora las variaciones simuladas del tipo de cambio explica de buena manera el comportamiento del déficit fiscal del Gobierno nacional. Al realizar un análisis a la trayectoria del déficit, se ve cómo esta presenta valores altos desde la última década del siglo xx, lo cual es de esperarse ya que la economía y las finanzas públicas colombianas se encontraban resentidas por la crisis hipotecaria y financiera reciente. Luego, en el año 2009, se ve el deterioro en el déficit que coincidió con una depreciación del peso colombiano frente al dólar durante los momentos recientes de la crisis financiera estadounidense, donde se restringió la liquidez en los países emergentes, luego de que la tasa de cambio nominal estuvo en mínimos durante 2008. Durante los años siguientes vemos que la tendencia del déficit es a reducirse, lo cual coincidió con un periodo de apreciación del peso motivada por los planes de *relajamiento monetario* establecidos por la autoridad monetaria norteamericana. En conclusión, se puede determinar

que el comportamiento de la tasa de cambio, y, en específico, sus variaciones, guardan una relación significativa con el resultado fiscal del Gobierno nacional colombiano, lo cual, no obstante, no minimiza la importancia de otras variables que inciden de forma más directa.

Validado el modelo con los datos del periodo observado, se continúa con la realización de un ejercicio de proyección del déficit fiscal del Gobierno nacional, lo que permite tener una senda proyectada de la deuda pública. Esto sería de gran utilidad para el planteamiento de las metas fiscales que se proyectan de manera anual.

Figura 6. Evolución del déficit fiscal 2000-2014



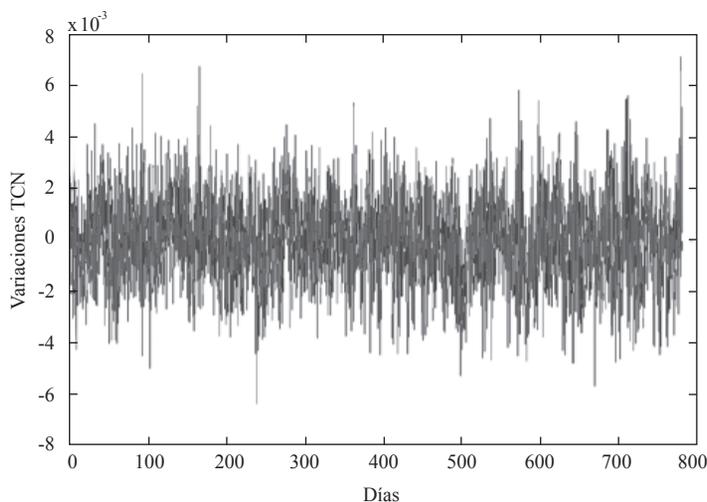
Fuente: elaboración propia con datos del Banco de la República y el Ministerio de Hacienda, 2000-2014.

8. Proyecciones de déficit fiscal y deuda

Una herramienta utilizada de manera recurrente para la programación de política fiscal son las proyecciones de los resultados fiscales. Aunque existen diversos modelos que ayudan en esta tarea, la aproximación que se propone en este trabajo podría colaborar con la profundización del debate acerca de la incidencia que tienen las variaciones de la tasa de cambio. Para esto, ejecutamos simulaciones de las variaciones del tipo de cambio peso-dólar americano, siguiendo la misma metodología usada en la simulación del periodo observado, es decir de forma diaria y con 1000 trayectorias. En este caso, la simulación representa 780 días, que se constituyen los días hábiles de los años 2015 a 2017. En la figura 7 se presentan las trayectorias simuladas para la tasa de cambio, cuyo promedio será el insumo para realizar el cálculo de la ecuación estocástica del déficit fiscal. Como información

necesaria para las proyecciones se utilizaron los ingresos y gastos sin intereses, estimados para esos años, en el documento de marco fiscal de mediano plazo del Ministerio de Hacienda y Crédito Público colombiano, que es la fuente oficial para estas cifras. Como tasa de interés implícita se utilizan los promedios móviles de orden tres. Para el dato de PIB nominal necesario para la expresión final se utilizan las proyecciones del Banco de la República (banco central colombiano).

Figura 7. Simulación de la variación de la tasa de cambio
(corresponde a la proyección diaria de las variaciones
de la tasa de cambio de 2015 a 2017 para 1000 trayectorias)

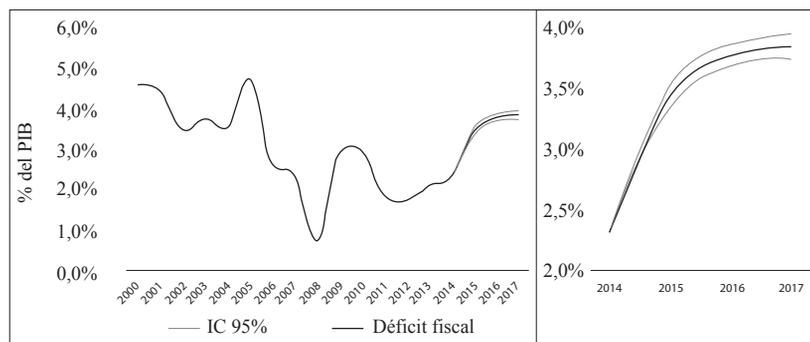


Fuente: elaboración propia con datos del Banco de la República y el Ministerio de Hacienda y Crédito Público colombianos, 2015-2017.

En la figura 8 se presentan los resultados del ejercicio de proyección del déficit fiscal del Gobierno nacional entre 2015 y 2017, los cuales fueron construidos a partir de la ecuación nominal propuesta en este trabajo. En la gráfica se observa que en la tendencia para los próximos años se prevé un deterioro de la situación fiscal del Gobierno nacional, lo cual deja entrever una relación con las variaciones positivas simuladas del tipo de cambio, lo que lleva a pensar una vez más que una depreciación del peso está correlacionada, en este sentido, con el deterioro en las cuentas fiscales. Para los años proyectados se estima que el déficit fiscal, con un nivel confianza del 95 %, se encuentra en el rango de 3,2 a 3,5 % del PIB para 2015, y 3,7 a 3,9 % del PIB para 2016 y 2017. En términos monetarios, el déficit alcanzaría \$35 billones de pesos colombianos en 2017. Es necesario recalcar que

en estas proyecciones se asume como estocástica únicamente la variación de la tasa de cambio, ya que el objetivo es simular solo esta variable.

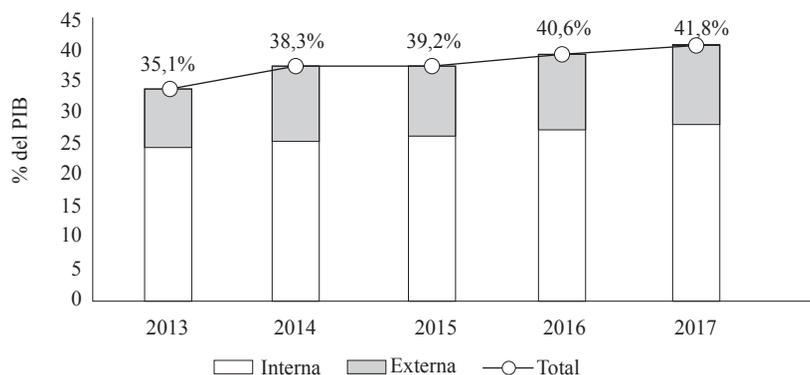
Figura 8. Proyección del déficit fiscal



Fuente: elaboración propia.

Por último, en la figura 9 se presenta una senda proyectada de la deuda del Gobierno nacional, la cual se obtiene a partir de los resultados del ejercicio de proyección del déficit. Este cálculo está basado en la identidad que determina que el déficit por debajo de la línea es equivalente a la variación de la deuda. Una vez se obtiene el resultado proyectado del déficit, se genera la senda de la deuda, donde se muestra que, consecuente al crecimiento del déficit del Gobierno nacional, la deuda va a incrementarse hasta llegar a ser el 42 % del PIB en 2017.

Figura 9. Proyección de la deuda bruta del GNC



Fuente: elaboración propia.

9. Conclusiones y extensiones

Se presentó un modelo alternativo para la estimación del déficit fiscal del Gobierno colombiano, donde se modelaron las variaciones de la tasa de cambio peso colombiano-dólar americano como un proceso estocástico de difusión con saltos de Poisson. Dichas variaciones se incorporaron en el cálculo del déficit fiscal siguiendo la metodología planteada por Rodríguez y Venegas (2010). Para la calibración se dividió el proceso en su componente estocástico de reversión a la media y en su componente de saltos de Poisson. El primero se calibró por máxima verosimilitud y el segundo siguiendo la metodología de Rodríguez y Venegas (2010). Además, en la calibración del modelo se tomó la serie diaria de la tasa de cambio nominal, entre enero de 2000 y diciembre de 2014, donde se simularon 1000 trayectorias y se compararon los resultados con los valores observados.

En la comparación con el periodo observado se encontró que el modelo sigue bien la tendencia del déficit para esos años, en donde se advierte que depreciaciones del tipo de cambio llevan a aumentos del déficit fiscal, y las apreciaciones parecen tener el resultado contrario. El modelo se aleja un poco del resultado observado en los años de la crisis *subprime* acontecida en Estados Unidos, donde las variaciones de la tasa de cambio tuvieron valores sustancialmente altos; sin embargo, para el resto del periodo tiene resultados cercanos.

Para complementar el ejercicio empírico se realizaron proyecciones para tres años hacia adelante (2015 a 2017) de las variaciones de la tasa de cambio, con el propósito de generar valores estimados para el déficit fiscal, y se encontró que el déficit para estos años tendría una tendencia a aumentar sus valores dentro del rango de 3,2 a 3,5 % del PIB para 2015, y 3,7 a 3,9 % del PIB para 2016 y 2017, con un nivel de confianza de 95 %. Resultado consistente con la proyección de variaciones positivas de la tasa de cambio para esos años. Además, como resultados de estas proyecciones se construyó una senda proyectada de la deuda del Gobierno nacional, la cual estima que esta llegará a ser 42 % del PIB en 2017.

Se plantea como una primera extensión de trabajo futuro un modelo que incorpore una estructura a término de la tasa de interés, ya que para en el modelo empleado se tomó una tasa de interés implícita constante. Este planteamiento incorporaría al modelo las volatilidades del mercado de capitales, específicamente el de deuda pública. Como una segunda extensión se pueden incorporar las variaciones del tipo de cambio en la función que describe los ingresos del Gobierno nacional, ya que un porcentaje relevante de estos depende de su comportamiento,

principalmente por los ingresos denominados en dólares derivados del impuesto al valor agregado (IVA) externo y por los aranceles.

Una tercera línea de extensión es la consideración de un proceso no homogéneo para describir los saltos que presenta la tasa de cambio.

Referencias

- Aase, K. K. (1988). Contingent claims valuation when the security price is a combination of an itô process and random point process. *Stochastic Processes and Their Applications*, 28, 185-220.
- Agnello, L., Furceri, D. y Sousa, R. M. (2013). How best to measure discretionary fiscal policy? Assessing its impact on private spending. *Economic Modelling*, 34, 15-24. <http://doi.org/10.1016/j.econmod.2012.10.020>
- Akgiray, V. y Booth, G. G. (1988). Mixed Diffusion-Jump Process Modeling of Exchange Rate Movements. *The Review of Economics and Statistics*, 70(4), 631-637. <http://doi.org/10.2307/1935826>
- Baldacci, E. y Kumar, M. (2010). *Fiscal deficits, public debt, and sovereign bond yields*. *IMF Working Papers* (Vol. 10). Recuperado de <http://elibrary.imf.org/view/IMF001/11210-9781455202188/11210-9781455202188/11210-9781455202188.xml>
- Ball, C. y Torous, W. (1983). A simplified jump process for common stock returns. *Journal of Financial and Quantitative*, 18(1), 53-65. <http://doi.org/10.2307/2330804>
- Bates, D. S. (1988). *Pricing options under jump-diffusion processes*. Rodney L. White Center for Financial Research.
- Bouakez, H., Chihi, F. y Normandin, M. (2014). Measuring the effects of fiscal policy. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 47, 123-151. <http://doi.org/10.1016/j.jedc.2014.08.004>
- Bouakez, H. y Eyquem, A. (2014). Government spending, monetary policy, and the real exchange rate. *Journal of International Money and Finance*, 56, 178-201. <http://doi.org/10.1016/j.jimonfin.2014.09.010>

- Branger, N. y Larsen, L. S. (2013). Robust portfolio choice with uncertainty about jump and diffusion risk. *Journal of Banking and Finance*, 37(12), 5036-5047. <http://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.08.023>
- Buiter, W. H. (1983). Measurement of the public sector deficit and its implications for policy evaluation and design. *Staff Papers*, 30(2), 306-349.
- Checherita-Westphal, C. y Rother, P. (2012). The impact of high government debt on economic growth and its channels: An empirical investigation for the euro area. *European Economic Review*, 56(7), 1392-1405. <http://doi.org/10.1016/j.euroeco-rev.2012.06.007>
- Duffie, D. (2005). Credit risk modeling with affine processes. *Journal of Banking & Finance*, 29(11), 2751-2802. <http://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2005.02.006>
- Erceg, C. J., Guerrieri, L. y Gust, C. (2005). Expansionary fiscal shocks and the us trade deficit. En *International Finance* (Vol. 8, pp. 363-397). <http://doi.org/10.1111/j.1468-2362.2005.00164.x>
- Jiang, G. J. (1998). Jump-Diffusion Model of Exchange Rate Dynamics — Estimation via Indirect Inference, Working Paper, University of Groningen, The Netherlands.
- Jin, X. y Zhang, K. (2013). Dynamic optimal portfolio choice in a jump-diffusion model with investment constraints. *Journal of Banking and Finance*, 37(5), 1733-1746. <http://doi.org/10.1016/j.jbankfin.2013.01.017>
- Kim, S. y Roubini, N. (2008). Twin deficit or twin divergence? Fiscal policy, current account, and real exchange rate in the U.S. *Journal of International Economics*, 74(2), 362-383. <http://doi.org/10.1016/j.jinteco.2007.05.012>
- Mao, X. (1997). Stochastic differential equations and applications, Horwood, Chichester.
- Moreno, J. (2011). Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas. *ODEON*, 6, 131-144.
- Penati, A. (1983). Expansionary fiscal policy and the exchange rate: A review (Politique budgétaire expansionniste et taux de change: une analyse) (Políticas fiscales expansionistas y el tipo de cambio: un examen de la cuestión). Staff Papers (International Monetary Fund), 30(3), 542-569. Recuperado de <http://www.jstor.org>

- Phillips, P. C. B. (1972). The structural estimation of a stochastic differential equation system. *Econometrica*, 40, pp. 1021-1041.
- Rodríguez, A. y Venegas, F. (2010). Efectos del tipo de cambio sobre el déficit público: modelos de simulación Monte Carlo. *Contaduría y administración*, 232, 11-40. Recuperado de /scielo.php?script=sci_arttext&pid=&lang=pt
- Tsay, R. (2002). *Analysis of Financial Time Series*. New Jersey: Wiley.
- Uhlenbeck, G. E. y Ornstein, L. S. (1930). On the theory of Brownian motion. *Physical Review*, 36, pp. 823-841.
- Vaciseck, O. (1977). An equilibrium characterization of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, 5, pp. 177-188.
- Zhong, Y., Bao, Q. y Li, S. (2015). FX options pricing in logarithmic mean-reversion jump-diffusion model with stochastic volatility. *Applied Mathematics and Computation*, 251, 1-13. <http://doi.org/10.1016/j.amc.2014.11.040>.