Ausencia de arbitraje, medidas equivalentes y teorema fundamental de valoración

Carlos Andrés Zapata Quimbayo*

* Magíster en Finanzas. Docente-Investigador, CIPE-ODEON, Universidad Externado de Colombia. Bogotá (Colombia). [carlosa.zapata@uexternado.edu.co].
Artículo recibido el 1 de noviembre de 2017.
Aceptado el 30 de noviembre de 2017.
Para citar este artículo:
Zapata Quimbayo, C. A. (2017). Ausencia de arbitraje, medidas equivalentes y teorema fundamental de valoración. *ODEON*, 13, pp. 7-29.
DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n13.02

Introducción

Antes de los trabajos de Black y Scholes (1973) y Merton (1973), el campo de valoración estaba dominado por el modelo de valoración de activos de capital (CAPM, por su sigla en inglés) desarrollado por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), y el razonamiento de equilibrio (Lewis, 2013). Black y Scholes (1973) derivaron una fórmula de valoración (teórica) de opciones europeas sobre acciones que consiste en la creación de una estrategia de negociación dinámica en tiempo continuo donde los precios son modelados mediante procesos estocásticos[1]. Por medio de esta estrategia se crea un portafolio replicante, compuesto por dos activos: el activo riesgoso (la acción) y el activo libre de riesgo (el bono), el cual permite reproducir los pagos de la opción en cada instante. La condición de replicación perfecta se logra al asumir la ausencia de oportunidades de arbitraje y la exclusión de fricciones en el mercado[2].

Gracias a esta propuesta de valoración, el resultado del modelo permite estimar el valor de la opción usando una fórmula determinada por cinco parámetros: i) el precio actual de la acción, ii) el precio de ejercicio, iii) el vencimiento de la opción, iv) la tasa de interés libre de riesgo y v) la volatilidad. Gran parte del éxito del modelo de Black y Scholes (BS) se debe a que los parámetros son conocidos al momento de la valoración, lo cual permite ver la fórmula de valoración con una función determinística. Merton (1973) desarrolla una generalización del modelo BS, al incorporar otros activos y reclamaciones contingentes, así como su incorporación al tratamiento de problemas corporativos (Merton, 1974, 1977).

Por su parte, Cox y Ross (1976) formularon un tratamiento alternativo donde proponen estimar el valor de la opción a partir de su valor esperado (su función de pagos) descontado bajo una medida de probabilidad riesgo-neutral. Los autores derivan una expresión analítica que satisface la ecuación diferencial estocástica de Black-Scholes, al modificar la tasa de rendimiento esperada de la acción por la tasa libre de riesgo, bajo el supuesto de ausencia de oportunidades de arbitraje. Este enfoque se concibe como el primer modelo de valoración basado en el cambio de medida y produce un resultado equivalente al modelo BS.

---

[1] Es importante aclarar que este principio de valoración no es propio del modelo de Black-Scholes (de ahora en adelante BS), sino que tiene su fundamento en las técnicas actuariales basadas en el principio de equivalencia (Delbaen y Schachermayer, 1994), e incluso fueron utilizadas en la tesis doctoral de Bachelier en 1900.

[2] La ausencia de fricciones indica que no hay costos de transacción, restricciones de venta en corto, impuestos, y se asume que los activos son perfectamente divisibles.

Desde entonces, la relación entre no arbitraje y valoración, junto con la incorporación de la teoría de martingalas y el cálculo estocástico, han creado un poderoso campo de investigación teórica denominado finanzas matemáticas, el cual permitió la definición del teorema fundamental de valoración de activos (TFVA) con el objetivo de determinar el precio de opciones financieras y reclamaciones contingentes, al igual que el diseño de estrategias de cobertura y la optimización de portafolios (Delbaen y Schachermayer, 2006). Además, el principio de no arbitraje ha permitido unificar diferentes campos de la economía financiera[3], gracias a la integración de estas herramientas con la noción de valoración en el marco del modelo CAPM, la hipótesis de mercados eficientes y la idea de mercados completos introducida por Arrow y Debreu (Ross, 2005; Johnson, 2017). Esta propuesta de valoración es, sin duda, conceptualmente diferente de los modelos de valoración anteriores basados en el enfoque de equilibrio.

Este fue el resultado de grandes esfuerzos matemáticos presentados a largo de las décadas de 1980 y 1990, donde se identifican importantes contribuciones en los trabajos de Stephen Ross, gracias a la formulación del *principio básico de valoración* introducido en Ross (1978), y el desarrollo de un enfoque de valoración fundamentado en el principio de *no arbitraje* desarrollado en Cox y Ross (1976), y Cox, Ross y Rubinstein (1979), donde se establece una relación básica entre

- la ausencia de oportunidades de arbitraje y,
- la existencia de reglas de valoración lineal explícitas y de una medida de probabilidad riesgo-neutral.

Harrison y Kreps (1979) y Harrison y Pliska (1981), mediante rigurosas pruebas de validación, confirman la existencia de estos principios teóricos y crean un marco general para la definicón del TFVA. Su formulación inicia un campo de investigación con múltiples extensiones en espacios de probabilidad no finitos que llevan a cabo Dalang, Morton y Willinger (1990), Back y Pliska (1991), Schachermayer (1992), Delbaen y Schachermayer (1994, 1995, 1998), y muchos otros.

[3] Ross (2005) reconoce que el principio de no arbitraje ha permitido consolidar los principales campos de la teoría de las finanzas al crear lo que podría llamarse la teoría neoclásica de las finanzas, la cual comprende los temas de: i) mercados eficientes; ii) teoría de portafolio, relación riesgo-retorno y modelo de valoración de activos de capital (CAPM); iii) valoración de opciones y derivados financieros; y iv) finanzas corporativas.

Este trabajo identifica las principales contribuciones que han permitido definir el TFVA, partiendo de los aportes de Stephen Ross. Para ello, el documento se ha estructurado en cuatro secciones que incluyen esta introducción. En la segunda sección se presentan los principios básicos del TFVA. En la tercera sección se introduce una definición formal del principio de no arbitraje y se presenta el modelo de valoración de opciones en tiempo discreto a partir de los desarrollos anteriores y, finalmente, se presentan algunas de sus limitaciones y extensiones.

1. Reglas de valoración y medidas martingala equivalente

La estrategia de negociación dinámica en tiempo continuo presentada en Black y Scholes (1973) asume que los precios de los activos son modelados mediante procesos estocásticos, por ejemplo, el modelo considera que el precio de una acción (S_t) en un horizonte de tiempo $t \in [0, T]$ se describe por un proceso estocástico del tipo movimiento geométrico Browniano (MGB)

$$S_t = S_0 \ \exp \ \left[\left(\mu - {}^1\!/\!_2\, \sigma^2\right) \ dt + \sigma \ dW_t\right] \tag{1}$$

donde, μ corresponde a la tasa esperada de retorno instantánea del activo subyacente, σ su volatilidad y W_t denota un proceso estándar de Wiener con $W_t \sim N(0, t)$. Además, $S_t \in X$, donde X representa un sistema de precios definido en el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ con una filtración $\mathcal{F}_t$ y, P representa una medida de probabilidad real, tal que $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$. Los cambios instantáneos de S_t vienen dados por la ecuación diferencial estocástica (EDE):

$$dS_t = \mu \ S_t + \sigma \ S_t \ dW_t \tag{2}$$

Por su parte, el proceso del precio del bono es determinístico y viene dado por B_0 en $t = 0$ y $B_t = B_0 \ e^r t$ en un instante $t > 0$, mientras sus cambios instantáneos están dados por

$$dB_t = rB_t \tag{3}$$

donde r es la tasa de interés libre de riesgo y se asume que $B_0 = 1$.

Si el valor de una opción *call*[4] de tipo europeo está determinado por la función $C_t = f(S_t, t)$, es decir, es una función del precio del activo subyacente y del tiempo, y se define una estrategia de negociación autofinanciada[5] (un portafolio replicante) conformada por γ cantidad de bonos y δ unidades de acciones, con valor V_t tal que

$$V_t = \gamma\, B_t + \delta\, S_t \tag{4}$$

donde, $V_t > 0$ con probabilidad uno. Un aporte importante del modelo BS es el argumento que vincula la valoración con el principio de no arbitraje (Harrison y Kreps, 1979; Delbaen y Schachermayer, 1994), de esta forma, es posible determinar el valor de la opción al diseñar una estrategia de replicación, lo anterior dado el cumplimiento de la ley de un solo precio[6]. Por tanto, si esta economía no permite oportunidades de arbitraje, se encuentra que para cada instante $t \in [0, T]$

$$V_t \equiv C_t \tag{5}$$

Por tanto, el valor de la opción (C_t) siempre debe ser igual al valor de portafolio construido para replicar sus pagos (V_t).

La necesidad de obtener una visión más profunda del modelo de valoración originó un amplio campo de desarrollos matemáticos que llevaron a la formulación del TFVA. La primera presentación formal de esta intuición básica de valoración, basada en la ausencia de oportunidades de arbitraje, aparece en Ross (1978) al formular el "teorema básico de valoración". Este teorema básico representa la primera prueba de la existencia de un operador lineal $\pi : M \to \mathbb{R}$, el cual establece una regla general para valorar opciones financieras o cualquier otra reclamación contingente negociada[7].

[4] La opción *call* indica que el comprador tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar una determinada cantidad del activo riesgoso (por ejemplo, una acción) en el momento t con un precio preestablecido K.

[5] Esto significa que i) representa una posición corta o venta en corto en uno de los activos y una posición larga en el otro. Así, es posible pedir dinero prestado a una tasa de interés fija (la tasa libre de riesgo) para invertir en el activo riesgoso (la acción); y ii) las variaciones en su precio están determinadas por las variaciones en el precio de la acción.

[6] La ley muestra que si dos activos tienen un precio igual en un periodo de tiempo $t = 0$, deberían mantener una relación de precios igual en cada momento $t > 0$.

[7] De acuerdo con Dybving y Ross (1987), Ross (1978) no solo demostró la existencia de esta regla de valoración, sino su extensión a todos los activos (reales e hipotéticos), incluidos aquellos que no se negocian, definidos en el mismo espacio de probabilidad. De igual forma, Schwartz y Trigeorgis (2004) muestran que este enfoque de valoración evita la necesidad de calcular una

Para ello, Ross (1978) definió un sistema de precios formalizado en un espacio vectorial topológico (M, π), donde M, el conjunto de precios de los activos comercializados, es un subespacio de X, y π es un operador lineal definido sobre M[8] en un horizonte de tiempo tal que $0 \leq t \leq T$. Para un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, se tiene que $X = L^p(\Omega, \mathcal{F}, P)$. De igual forma, M podría representar los resultados de una inversión inicial V_0, tal que $V_0 \in \mathbb{R}$, más el resultado de una negociación de acuerdo con una estrategia $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$, la cual es $\mathcal{F}$-predecible[9], con el objetivo de encontrar el *payoff* de la opción en el instante t, es decir V_t. De esta forma se tiene

$$V_t = V_0 + \int_0^T H_t dS_t \tag{6}$$

donde $V_t \in M$, tal que $V_t \geq 0$ y $P(V_t \geq 0) > 0$, por tanto, $\pi(V_t) > 0$. De igual forma, la integral estocástica (ecuación (6)) también se puede ver como una sumatoria de Riemann

$$V_t = V_0 + \sum_{i=0}^{N} H_i(S_{ti} - S_{ti-1}) \tag{7}$$

donde $V_0 = \sum_{i=0}^{N} H_{i0}\ S_{t0}$. Dado que la estrategia de negociación H_t es $\mathcal{F}$-predecible, esta debe ser determinada por cierta información contenida en $\mathcal{F}$ que ocurre en cualquier momento antes de T[10]. Esto significa que no es posible encontrar un resultado de V_t que sea riesgoso o que presente alguna ganancia menor o igual a cero con probabilidad estrictamente positiva, lo cual debe tener sentido desde el punto de vista tanto matemático como teórico. Si V_t tiene un precio único que sea consistente con (M, π), se dice que tiene un valor de no arbitraje.

Los trabajos de Harrison y Kreps (1979), Harrison y Pliska (1981) y Dalang *et al.* (1990), no solo confirman la existencia de este principio teórico básico

tasa de descuento ajustada al riesgo, es decir, una vez que el ajuste por riesgo se ha realizado adecuadamente a los flujos futuros esperados, la tasa de descuento relevante es la tasa de interés libre de riesgo.

[8] Al tomar el subespacio M y el funcional lineal π, se asume un mercado sin fricciones.

[9] Por ejemplo, una estrategia de negociación que modela el comportamiento de S_t en un intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$

[10] La condición de $\mathcal{F}$-medibilidad describe el hecho de que H depende del proceso que rige el precio de la acción.

mediante la aplicación de rigurosas pruebas basadas en el teorema Hahn-Banach, sino que extienden los resultados a espacios de probabilidad más generales[11]. En estas aplicaciones derivan una regla de valoración lineal que sigue siendo directa, es decir, se pueden probar las condiciones de linealidad y positividad de precios definidas en Ross (1978), a partir del cumplimiento del principio de no arbitraje.

Harrison y Kreps (1979) presentaron la primera prueba rigurosa del TFVA para un horizonte temporal finito al demostrar las condiciones exactas bajo las cuales la ausencia de oportunidades de arbitraje es equivalente a la existencia de una medida martingala[12]. En este contexto mostraron que el operador lineal, formulado por Ross (1978), podría representarse como una expectativa con respecto a una medida martingala[13], donde la probabilidad real (P) puede ser reemplazada por una probabilidad equivalente (Q), definida en el mismo espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Esta medida de probabilidad se obtiene al aplicar el teorema de Girsanov sobre el proceso estocástico que caracteriza el comportamiento del precio de la acción, lo cual les permite encontrar la derivada de Radon-Nikodym con resultados idénticos al modelo BS.

Si se asume que el operador lineal (π) puede extenderse a un operador (π^*) no negativo definido sobre $X = L^P(\Omega, \mathcal{F}, P)$, se tiene una función ($g$) tal que $g \in L^Q(\Omega, \mathcal{F}, P)$, donde la no negatividad del operador π^* es equivalente a decir que $g \geq 0$. Por tanto, g es la densidad de una medida de probabilidad Q con derivada Radon-Nikodym igual a $dQ/dP = g$.

Entonces, si la extensión π^* de π existe, se encuentra una medida de probabilidad Q que es equivalente a P, para lo cual

$$\pi^* \left(\sum_{i=0}^{N} H_i (S_{ti} - S_{ti-1}) \right) = E^Q \left(\sum_{i=0}^{N} H_i (S_{ti} - S_{ti-1}) \right) \tag{8}$$

[11] En su definición del operador de valoración $\pi : M \to \mathbb{R}$ junto con el supuesto de que $M \subseteq X$, Ross (1978) simplifica la definición del espacio topológico y elude algunos problemas propios de su formulación (Delbaen y Schachermayer, 2006).

[12] Su principal preocupación giró en torno a la consistencia interna del modelo BS, el cual requiere asumir tanto la negociación continua de los activos como la ausencia de oportunidades de arbitraje. En este contexto, los autores encontraron la presencia de estrategias de duplicación, la cuales podían invalidar el principio de ausencia de arbitraje. Para ello, proporcionaron rigurosas pruebas de validación con el objetivo de entender esta relación.

[13] La teoría de martingalas se introduce con el objetivo de describir un precio justo de la opción financiera.

Si la expresión (8) se cumple para cada proceso predecible H limitado, es posible replicar su valor en cada instante t, al generar un valor libre de arbitraje de V_t bajo la medida de probabilidad Q. A esta medida Q se le denomina medida martingala equivalente. Si la medida martingala existe, entonces la ecuación (6) genera un valor único de V_t, de tal forma que la existencia de la medida martingala es esencialmente equivalente a la ausencia de oportunidades de arbitraje, lo cual permite valorar reclamaciones negociadas a partir de la construcción de portafolios replicantes al tomar combinaciones de activos existentes.

El resultado de este esfuerzo matemático se sintetiza en dos teoremas que, a su vez, son equivalentes con la existencia de reglas de valoración explícitas de Ross (1978), las cuales definen el TFVA.

- *Primer teorema*: el mercado está libre de oportunidades de arbitraje si existe la medida martingala equivalente Q;

- *Segundo teorema*: el mercado es completo, si y solo si, la medida martingala es única.

De igual forma, Harrison y Kreps (1979) impusieron algunas condiciones de *admisibilidad* en la estrategia de negociación. De acuerdo con Schachermayer (2006) y Downarowicz (2010), desde el trabajo de Harrison y Kreps (1979), gran parte de la literatura financiera se ha centrado en la discusión de las condiciones precisas de admisibilidad que deberían imponerse a la integral estocástica de la ecuación (6)[14]. La condición de admisibilidad se ha convertido en un requisito fundamental de la teoría de valoración por no arbitraje, ya que garantiza la existencia de una estrategia de negociación continua.

Por su parte, Harrison y Pliska (1981) demostraron una versión general de este teorema y trataron principalmente la formulación para mercados completos, mientras Delbaen y Schachermayer (1994, 1998) desarrollaron un concepto que caracteriza la existencia de una medida martingala equivalente para una definición alternativa y, más general, del principio de no arbitraje. En consecuencia, gran parte de estos desarrollos teóricos han permitido establecer una relación básica entre la ausencia de oportunidades de arbitraje, o sus definiciones equivalentes, con la existencia de reglas de valoración y de una medida de probabilidad riesgo-neutral, también conocida como medida martingala equivalente.

[14] Una estrategia comercial H_t se denomina admisible si y solo si su proceso generador de ganancias ($\int_0^T H_t dS_t$) tiene un límite inferior determinado por alguna constante, por ejemplo 0.

2. Principio de no arbitraje y modelo de valoración en tiempo discreto

2.1. Principio de no arbitraje

La necesidad de entender este enfoque de valoración nos lleva a introducir una definición mucho más formal del principio de no arbitraje, basada en la propuesta de Stephen Ross, desarrollada en Ross (1976, 1977) y Dybving y Ross (1987). Para ello se requiere aclarar la definición del portafolio de arbitraje y del operador lineal, los cuales, a su vez, definen reglas de valoración explícitas.

Portafolio de arbitraje

Un portafolio de arbitraje (η) es aquel formado por combinaciones de activos con precio s_j. Si existen n activos disponibles en el mercado, se pueden formar los portafolios de arbitraje $(\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n)$, donde cada elemento de η denota la presencia del activo j-ésimo. Así, cada portafolio de arbitraje tendrá un valor

$$s\,\eta = \Sigma_{j=1}^{n} s_j\,\eta_j \tag{9}$$

De esta forma, una oportunidad de arbitraje es un portafolio (η), tal que:

i) la inversión inicial es menor o igual que cero, es decir, $s\,\eta \leq 0$, y

ii) su *payoff* futuro es no negativo: $X\,\eta \geq 0$.

Estas dos propiedades se pueden expresar en forma matricial como

$$\begin{bmatrix} -s \\ X \end{bmatrix} \eta > 0 \tag{10}$$

El principio de ausencia de arbitraje es la condición que no satisface la expresión 10, es decir, si esta expresión no se cumple, entonces no existen oportunidades de arbitraje en el mercado. En otras palabras, siguiendo a Dybving y Ross (1987): "un portafolio de arbitraje es aquel que permite obtener ganancias sin asumir una inversión inicial"(p. 61). Por tanto, no hay forma alguna de comprar y vender activos con el objetivo de tener ganancias sin haber realizado una inversión inicial o, de forma equivalente, cualquier portafolio que tenga un rendimiento positivo, sin importar cuál sea el estado de la naturaleza futuro, requiere de una inversión inicial.

El operador de valoración

La definición de una regla de valoración (q) la cual representa el operador lineal positivo $L(\cdot)$ definido en el espacio R^m, tal que $q > 0$, permite determinar el precio (s) de un activo, según el estado de naturaleza que se presente

$$s = q\,X \tag{11}$$

El cumplimiento de esta regla excluye la presencia de oportunidades de arbitraje, dado que cualquier estrategia de arbitraje implica una violación directa de la ecuación (11). Por ejemplo, si η representa un portafolio de arbitraje, entonces se tiene

$$\begin{aligned} s\,\eta &\leq 0 \\ (qX)\eta &\leq 0 \end{aligned} \tag{12}$$

como q es positivo, entonces $qX < 0$, lo cual es inconsistente con el principio de no arbitraje. Lo anterior muestra que no existe arbitraje si y solo si existe una regla de valoración lineal positiva q consistente[15]. Además, si el mercado es completo, siguiendo la propuesta clasica de Arrow (1964)[16], esta relación de precios presenta una única solución, de forma que

$$q = sX^{-1} \tag{14}$$

[15] De acuerdo con Dybving y Ross (1987), una regla de valoración lineal q es un vector de precios de estado que relaciona correctamente a todos los activos comercializados.

[16] Arrow (1964) propone tomar combinaciones lineales de activos primitivos conocidos como activos Arrow-Debreu (AD). Un activo AD es aquel que, teniendo un precio actual ϕ, promete un pago de una unidad monetaria (\$1) si se presenta el estado de naturaleza m o cero (\$0) en cualquier otro estado. Lo anterior se puede representar en una matriz de pagos de forma análoga a una matriz identidad ϑ, definida para k estados de naturaleza

$$\vartheta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Estos activos pueden verse como un seguro que se adquiere con el objetivo de recibir una cantidad de dinero si se presenta un estado de naturaleza determinado. En el momento $t = 1$, la incertidumbre se resuelve y el mundo está solo en uno de los k estados de la naturaleza posibles. Bajo esa idea básica, los activos AD pueden utilizarse para valorar activos financieros cuyos pagos puedan especificarse en cada estado de naturaleza. Por ejemplo, si X_{jk} representa el precio futuro de un activo riesgoso j en el estado k, es posible replicar dicho precio mante-

Por tanto, el principio de completitud[17] del mercado también es compatible con la ecuación (11). De lo contrario, si el mercado es incompleto, el operador q será indeterminado (esta limitación se discutirá al final del documento). Este resultado se puede generalizar al tomar un número mayor, pero finito, de n activos negociados con un vector de precios actual definido en $(s_1, s_2, ..., s_n)$.

Este principio de no arbitraje, como afirman Dybving y Ross (1987), también se puede relacionar directamente con el problema de maximización de la utilidad esperada de un agente: cualquier agente optimizador (racional) desearía explotar una oportunidad de arbitraje de forma infinita, sin embargo, la existencia de oportunidades de arbitraje es incompatible con la presencia de una demanda finita de los activos[18], de forma que no existen oportunidades de arbitraje si y solo si existe algún agente optimizador con preferencias crecientes cuyo problema de elección tiene un máximo[19], por tanto, es posible encontrar un estado de equilibrio. Por construcción, el equilibrio en esta economía tendrá los precios deseados y cualquier resultado de valoración sin arbitraje es consistente. En otras palabras, la ausencia de arbitraje está implícita en la existencia de un óptimo para cualquier agente que prefiera más a menos.

---

niendo X_{jk} unidades de activos AD para crear un portafolio (V_j) que replica exactamente su valor. Basado en esto, si en el mercado existen unas constantes positivas φ_k, que representan los precios de estado,el valor de este portafolio en el momento $t = 0$ estará dado por $\sum_{k=1}^{m} X_{jk}\, \varphi_k$. El cumplimiento de esta expresión está dado por la existencia de las constantes positivas φ_k, las cuales garantizan la completitud del mercado. Siempre que existan tantos activos AD como estados de naturaleza el mercado es completo y, por tanto, esta relación de precios tiene una única solución.

[17] Aunque la consideración de completitud del mercado permite la replicabilidad precisa del precio de las opciones financieras, este principio presenta limitaciones que han sido resaltadas en Delbaen y Schachermayer (1994, 1998).

[18] Como resultado, si existe arbitraje, ningún agente que prefiera más a menos tendrá un óptimo. En ausencia de arbitraje es posible tomar la regla de valoración lineal (q) y usarla para definir la utilidad marginal de un agente maximizador, lo anterior, teniendo en cuenta los axiomas de utilidad esperada de von Neumann-Morgenstern. Por su parte, si el arbitraje existe, un agente podría superar cualquier óptimo a raíz de una estrategia de arbitraje.

[19] Dybving y Ross (1987) afirman que es posible usar un modelo de valoración basado en las preferencias de los agentes al tomar las condiciones de primer orden, de acuerdo con el modelo desarrollado por Rubinstein (1976), cuyo resultado es equivalente al modelo de valoración por no arbitraje. Aunque los autores resaltan que este modelo alternativo es conveniente en algunos contextos, el TFVA provee el mismo resultado sin considerar supuestos restrictivos. Esto mismo puede decirse de los resultados obtenidos a partir de modelos de valoración en contextos de "equilibrio"(ver Brown y Werner, 1995) y los modelos de "no arbitraje", no hay distinciones en dichos resultados.

Una forma de demostrar el resultado expresado en la ecuación (11) es usar probabilidades neutrales al riesgo, como fue demostrado en Cox, Ross y Rubinstein (1979), las cuales representan un conjunto de probabilidades (q_k^*), tales que el valor de cualquier opción financiera (V_j), en $t = 0$ para todo $j = (1, 2, ..., n)$, está dado por su valor esperado futuro (X_{jk}) descontado a la tasa libre de riesgo (r)

$$V_j = {}^1\!/\!{}_{(1+r)} \sum q_k^* \, X_{jk} \tag{15}$$

o de forma equivalente,

$$\sum q_k^* \, X_{jk} = V_j \, (1 + r) \tag{16}$$

donde, el factor de descuento $\frac{1}{(1+r)}$ define una regla de valoración que requiere que la probabilidad real de mercado p, la cual caracteriza al precio del activo en cada estado de naturaleza k, sea reemplazada por una medida de probabilidad neutral al riesgo. Esto indica que, en un espacio de probabilidad finito, el operador lineal representa un vector de precios de estado que determina el precio de la opción, de tal forma que el operador lineal q puede verse como $q = {}^1\!/\!{}_{(1+r)}$. La siguiente sección presenta este enfoque de valoración con más detalles.

Los principios de valoración anteriores proveen representaciones alternativas para el TFVA. De esta forma, el principio de ausencia de oportunidades de arbitraje es equivalente a:

i) La existencia de una regla de valoración lineal.

ii) La existencia de una demanda óptima para algún agente que prefiere más a menos.

iii) La existencia de una medida de probabilidad neutral al riesgo.

2.2. El modelo binomial

El modelo de valoración en tiempo continuo empleado por Black-Scholes requiere un conocimiento avanzado del cálculo estocástico, mientras gran parte de las pruebas para validar el cumplimiento del TFVA requieren de herramientas matemáticas más complejas, así como la definición de espacios de probabilidad más generales. Por su parte, Cox, Ross y Rubinstein (1979) presentaron un modelo de valoración sencillo y de fácil comprensión, conocido como modelo binomial, el cual conserva las mismas características esenciales del modelo BS. El modelo binomial expresa de forma directa la existencia de una relación lineal de precios presente en las ecuaciones (11) y (15).

El modelo binomial asume que el proceso del precio de la acción $(St)_{(0 \leq t \leq T)}$ está definido en el espacio de probabilidad (Ω, F, P) con $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, donde los precios de los activos riesgosos en el futuro solo pueden subir (estado ω_1) o caer (estado ω_2)[20]. Si se tiene un mercado financiero (simple) con dos fechas: $t = 0$ (hoy) y $t = 1$, por ejemplo, dentro de un año, y tres activos financieros: i) un bono, ii) una acción y iii) un derivado financiero (por ejemplo, una opción *call*), entonces, el precio de la acción en $t = 0$ es conocido e igual a S_0, pero su precio en $t = 1$ (S_1) es incierto. Esta incertidumbre se modela estocásticamente al definir el precio en los dos estados de naturaleza, donde el precio puede subir a S_1^u en el estado al alza o de crecimiento con una probabilidad p o caer a S_1^d en el estado a la baja o de decrecimiento con una probabilidad $1 - p$.

Los precios S_1^u y S_1^d pueden verse como los resultados de multiplicar S_0 por dos factores u y d, donde $0 < d < 1 < u$, es decir $S_1^u = u\, S_0$ y $S_1^d = d\, S_0$, o de forma equivalente

$$u = \frac{S_1^u}{S_0} \text{ y } d = \frac{S_1^d}{S_0} \tag{17}$$

El hecho de que $d > 0$ implica que siempre se van a representar precios positivos. Por su parte, el precio del bono está dado por

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \\ B_1 &= (1 + r) \end{aligned} \tag{18}$$

Si se tiene una opción *call* cuyo valor en $t = 1$ es una función del precio del activo riesgoso determinado por $C_1 = max(S_1 - K, 0)$, donde K es el precio de ejercicio y, como $S_1 = S_1^u$ o $S_1 = S_1^d$, entonces para C_1 se tiene

$$\begin{aligned} C_u &= max(S_1^u - K, 0) \\ C_d &= max(S_1^d - K, 0) \end{aligned} \tag{19}$$

El objetivo es determinar el precio de la opción en el momento $t = 0$ (C_0). La condición necesaria para demostrar la ausencia de oportunidades de arbitraje en el modelo es

$$d < 1 + r < u \tag{20}$$

[20] La incertidumbre representa el hecho de que no se sabe con *certeza* cuál de los dos estados de naturaleza ocurrirá en $t = 1$, cuando cada uno tiene cierta probabilidad positiva de ocurrir.

donde r es la tasa libre de riesgo. Por tanto, S_0 es martingala si y solo si la condición que representa la ecuación (20) se cumple[21]. Esto es equivalente a decir que la cantidad $(1 + r)$ es una combinación convexa de los factores u y d. Dado que u ocurre con probabilidad q_u, y d ocurre con probabilidad $q_d = 1 - q_u$, tenemos que

$$1 + r = u\, q_u + d\, q_d \tag{21}$$

donde q_u y q_d son interpretadas como probabilidades neutrales al riesgo o, de forma equivalente, como la medida martingala Q, de manera que $q_u + q_d = 1$[22], y están determinadas por

$$\begin{aligned} q_u &= \frac{(1 + r) - d}{u - d} \\ q_d &= \frac{u - (1 + r)}{u - d} \end{aligned} \tag{22}$$

Por lo tanto, bajo la medida Q, el precio del activo riesgoso en $t = 1$, es igual a su valor esperado ponderado por q_u y q_d, es decir

$$E^Q[S_1] = q_u\, u\, S_0 + q_d\, d\, S_0 \tag{23}$$

Además, es fácil notar que $q_u = p\,(1+r)$ y $q_d = 1-p\,(1+r)$, lo cual significa que $E^Q[S_1]$ descontado a la tasa r, determina su precio actual

$$S_0 = \frac{1}{1 + r}\, E^Q[S_1] \tag{24}$$

Cox y Ross (1976) demostraron que este enfoque de valoración riesgo-neutral permite resolver el problema de valoración de opciones financieras a partir del principio de ausencia de arbitraje, donde el precio actual (S_0) ya no depende de la medida de probabilidad real y, por tanto, no se requiere explicitar información alguna de las preferencias de los agentes. De esta forma, la solución resultante

[21] Si la condición impuesta en la ecuación (20) no se cumple se presentan oportunidades de arbitraje; por ejemplo, es posible obtener ganancias de arbitraje en un periodo de tiempo determinado si $(1 + r) < d$ al comprar acciones o $(1 + r) > u$ al realizar una venta en corto.

[22] De forma equivalente se puede interpretar que la probabilidad riesgo-neutral descontada a la tasa r es el precio de estado (φ).

debe ser la misma que se obtendría en un mundo neutral al riesgo[23]. En un mundo así, las probabilidades de estado deben ser tales que los rendimientos esperados de los activos sean los mismos e iguales a la tasa r. En otras palabras, la sustitución de P por Q es equivalente al ajuste de la tasa de deriva del activo.

Como resultado, la ecuación (25) genera un valor único para la opción *call* en $t = 0$, bajo la medida de probabilidad Q

$$\begin{aligned} C_0 &= \frac{1}{1+r}\, E^Q[max(S_1 - K, 0)] \\ C_0 &= \frac{1}{1+r}\, [q_u\, C_u + q_d\, C_d] \end{aligned} \tag{25}$$

De forma alternativa, la ausencia de arbitraje indica que es posible construir un portafolio replicante (V) con γ cantidad de bonos y δ unidades de acciones, cuyos pagos replican el precio de la opción en cada momento t:

$$\begin{aligned} C_0 &\equiv V_0 \\ C_1 &\equiv V_1 \end{aligned} \tag{26}$$

Si el valor de este portafolio (V) en $t = 0$ está dado por

$$V_0 = \gamma + \delta\, S_0 = C_0 \tag{27}$$

Entonces, en $t = 1$, su valor estará determinado por

$$V_1 = \gamma\,(1 + r) + \delta\, S_1 = C_1 \tag{28}$$

Ahora, dado que S_1 refleja dos precios $u\, S_0 = S_1^u$ y $d\, S_0 = S_1^d$, entonces la ecuación (28) realmente puede representarse como

$$C_u = \gamma\,(1 + r) + \delta\, u\, S_0 \tag{29a}$$

$$C_d = \gamma\,(1 + r) + \delta\, d\, S_0 \tag{29b}$$

[23] En este mundo neutral al riesgo todos los agentes son indiferentes a este, es decir, no requieren ser compensados por una prima de riesgo de mercado. Asimismo, el rendimiento esperado en una estrategia de inversión conformada por la combinación de acciones y bonos (o un préstamo) es igual al rendimiento que proporciona la tasa libre de riesgo (r). Sin embargo, como afirman Dybving y Ross (1987), la valoración bajo este enfoque no solo es válida en el mundo neutral al riesgo, sino también en el mundo real.

Al resolver (29a) y (29b) para δ y para γ, se encuentra

$$\delta = \frac{C_u - C_d}{S_0(u-d)} \tag{30}$$

$$\gamma = \frac{u\,C_d - d\,C_u}{(1+r)(u-d)} \tag{31}$$

Por no arbitraje se encuentra que el portafolio replica los precios de la opción, entonces las cantidades δ y γ determinan el precio de la opción en $t = 0$, de acuerdo con la ecuación (27).

Es fácil generalizar el resultado anterior a n intervalos de tiempo con longitud Δt, donde Δt representa el paso discreto de un periodo de tiempo t a otro, donde $t \in [0, T]$. Si u_n y d_n representan los factores de crecimiento y descenso en el precio de la acción para cada Δt, definidas en un espacio de probabilidad finito $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, con $\Omega = (\omega_1, \omega_2)$, entonces el precio de la acción en un momento $\Delta t + 1$ estará dado por $S^n_{(t+\Delta t)} = u_n\ S^n_{\Delta t}$ y $S^n_{(t+\Delta t)} = d_n\ S^n_{\Delta t}$, para todo $t = 0, 1, 2, ..., T$.

3. Limitaciones y extensiones del teorema fundamental de valoración

Como se ha demostrado, el principio de ausencia de oportunidades de arbitraje garantiza la existencia de medidas martingala o probabilidades neutrales al riesgo para cada conjunto finito de activos en un mercado sin fricciones. Sin embargo, Harrison y Kreps (1979), Harrison y Pliska (1981) y Kreps (1981) resaltaron algunas limitaciones del "teorema básico de valoración" propuesto por Ross (1978) y desarrollan un marco general del TFVA donde el principio de ausencia de arbitraje y la existencia de un vector de precios de estado definido en un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, no puede extenderse a espacios no finitos (Back y Pliska, 1991; Schachermayer, 1992; Delbaen y Schachermayer, 1994, 1995, 1998).

La dificultad anterior radica en que el operador de valoración puede no tener una representación como vector de precios en los diferentes estados de naturaleza, bajo la cual el valor de la opción sea único. En este contexto, Back y

Pliska (1991) y Schachermayer (1992) demostraron que en mercados con infinitos activos, la existencia de medidas martingala a través de la ausencia de arbitraje no se cumple. De igual forma, Artzner y Heath (1995) proporcionan una demostración para un mercado completo donde la medida martingala equivalente no es única para un número infinito de activos.

Esta limitación también es identificada en Kreps (1981) para mercados incompletos. Si el número de activos o el conjunto de fechas de negociación son infinitos, o bien si aparecen nuevos activos en el mercado, una versión simple del TFVA no se puede probar, dado que la ausencia de arbitraje no es suficiente para construir las probabilidades neutrales al riesgo, ya que el TFVA solo permite la valoración de activos cuyos precios pueden ser replicados por otros activos que se negocian en el mercado. De igual forma, si existen fricciones en el mercado, como costos de transacción o diferenciales de precios *bid-ask*, la aplicación del TFVA es limitada. Para resolver este problema, diferentes autores han utilizado conceptos más generales que el de arbitraje o nociones nuevas de este, como *free-lunch* (Kreps, 1981) o *no free lunch with vanishing risk* (NFLVR) (Delbaen y Schachermayer, 1994). Allí, el término de ausencia de *free-lunch* se puede concebir como un *arbitraje aproximado*, es decir, aunque es casi arbitraje, no es un arbitraje *per se*. Sin embargo, la ausencia de arbitraje es un concepto mucho más intuitivo y de más fácil comprobación empírica, en comparación con la ausencia de *free-lunch* o NFLVR.

El concepto de ausencia de *free-lunch* se introduce en Kreps (1981) con el objetivo de formular un modelo general de valoración en tiempo continuo, dada su naturaleza de dimensión infinita. Sin embargo, la concepción económica de *free-lunch* no es tan clara, como señalan Delbaen y Schachermayer (1994). Para superar esta dificultad, los autores extienden la ausencia de *free-lunch*, al introducir el concepto de NFLVR, el cual permite el establecimiento de una medida martingala equivalente local (MMEL) para el proceso de precio de un activo, es decir, una nueva medida de probabilidad según la cual el proceso del precio del activo descontado es sigma-martingala. Este enfoque, basado en NFLVR, ha sido extendido a la teoría estocástica de portafolios (Fernholz y Karatzas, 2009) y el diseño de estrategias de cobertura (Platen y Heath, 2006).

De igual forma, Kabanov y Kramkov (1994) y Karatzas y Kardaras (2007) extienden el concepto de NFLVR al incorporar otra noción más débil de arbitraje denominada *no unbounded profit with bounded risk* (NUPBR), como condición mínima en la optimización estocástica de portafolios. En ambos enfoques se asume que la condición de no arbitraje es equivalente a estas condiciones de no arbitraje aproximado bajo la MMEL, sin embargo, el concepto de NUPBR es mucho más restringido que el de NFLVR, como muestran Karatzas y Kardaras (2007), Fontana y Runggaldier (2013) y Fontana (2015), dado que aquellos mercados que solo satisfacen la condición de NUPBR pueden admitir oportunidades de arbitraje, lo cual representa fuertes limitaciones de estos nuevos enfoques.

Por su parte, Balbás *et al.* (2002) demostraron la posibilidad resolver la limitación identificada por Back y Pliska (1991), sin necesidad de acudir a la ausencia de *free-lunch*, lo cual ha permitido la construcción de modelos de valoración dinámicos en tiempo discreto. Para ello, los autores construyeron un sistema proyectivo de medidas de probabilidad equivalentes para cada subconjunto finito de fechas de negociación que garantizan la existencia de las derivadas de Radon-Nikodym.

Como resultado, en contextos más generales no es posible probar una versión simple de TFVA, ya que la ausencia de arbitraje no es suficiente para construir una medida martingala. Estos nuevos enfoques han generalizado el concepto de arbitraje que permite resolver el problema de valoración para un número infinito de activos o espacios de probabilidad de dimensión no finita, a pesar de sus limitaciones.

Referencias

Arrow, K. (1964). The role of securities in the optimal allocation of riskbearing. *The Review of Economic Studies*, 31(2), 91-96.

Artzner, P. y Heath, D. (1995). Approximate completeness with multiple martingale measures. *Mathematical Finance*, 5(1), 1-11.

Bachelier, L. (1900). *Théorie de la Spéculation*. Annales scientiques de l'École Normale Supérieure, 17, 21-86. English translation in: The Random Character of stock market prices (P. Cootner, editor), MIT Press.

Back, K. y Pliska, S. (1991). On the fundamental theorem of asset pricing with an infinite state space. *Journal of Mathematical Economics*, 20(1), 1-18.

Balbás, A., Mirás, M. y Muñoz, M. (2002). Projective system approach to the martingale characterization of the absence of arbitrage. *Journal of Mathematical Economics*, 37(4), 311-323.

Brown, D. y Werner, J. (1995). Arbitrage and existence of equilibrium in infinite asset markets. *The Review of Economic Studies*, 62(1), 101-114.

Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-659.

Cox, J. y Ross, S. (1976). The valuation of options for alternative stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 3(1), 145-166.

Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7(3), 229-263.

Dalang, R., Morton, A. y Willinger, W. (1990). Equivalent martingale measures and no-arbitrage in stochastic securities market model. *International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 29(2), 185-201.

Delbaen, F. y Schachermayer, W. (1994). A general version of the Fundamental Theorem of asset pricing. *Mathematische Annalen*, 300(1), 463-520.

Delbaen, F. y Schachermayer, W. (1995). The no-arbitrage condition under a change of numéraire. *Stochastics and Stochastic Reports*, 53(3-4), 213-226.

Delbaen, F. y Schachermayer, W. (1998). The Fundamental Theorem of asset pricing for unbounded Stochastic processes. *Mathematische Annalen*, 312(1), 215-250.

Delbaen, F. y Schachermayer, W. (2006). *The Mathematics of Arbitrage*. Berlin: Springer Finance.

Dybvig, P. y Ross, S. (1987). Arbitrage. En: Eatwell, J., Milgate, M. y Newman, P. (eds.), *The new Palgrave dictionary of economics*, vol. 1. London: Macmillan.

Fernholz, E. y Karatzas, I. (2009). Stochastic portfolio theory: An overview. En Bensoussan, A. y Zhang, Q. (eds.), *Handbook of numerical analysis, special volume: Mathematical Modelling and Numerical Methods in Finance*. New York: Elsevier.

Fontana, C. (2015). Weak and strong no-arbitrage conditions for continuous financial markets. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 18(1), 1-34.

Fontana, C. y Runggaldier, W. (2013). Diffusion-based models for financial markets without martingale measures. En *Risk Measures and Attitudes*, 45-81. London: Springer.

Guasoni, P., Rásonyi, M. y Schachermayer, W. (2010). The fundamental theorem of asset pricing for continuous processes under small transaction costs. *Annals of Finance*, 6(2), 157-191.

Harrison, J. y Kreps, D. (1979). Martingales and Arbitrage in multiperiod securities markets. *Journal of Economic Theory*, 20(3), 381-408.

Harrison, J. y Pliska, S. (1981). Martingales and Stochastic integrals in the Theory of continuous trading. *Stochastic Processes and their Applications*, 11(3), 215-260.

Harrison, J. y Pliska, S. (1983). A stochastic calculus model of continuous trading: Complete markets. *Stochastic Processes and their Applications*, 15(3), 313-316.

Jacod, J. y Shiryaev, A. (1998). Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete time. *Finance and Stochastics*, 3(2), 259-273.

Johnson, T. (2017). *Ethics in Quantitative Finance*. Edinburgh: Palgrave Macmillan.

Kabanov, Y. y Kramkov, D. (1994). No-arbitrage and equivalent martingale measures: An elementary proof of the Harrison-Pliska theorem. *Theory of Probability and its Applications*, 39(3), 523-527.

Kabanov, Y., Rásonyi, M. y Stricker, C. (2002). No-arbitrage criteria for financial markets with efficient friction. *Finance and Stochastics*, 6(3), 371-382.

Karatzas, I. y Kardaras, C. (2007). The numéraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, 11(4), 447-493.

Kreps, D. (1981). Arbitrage and equilibrium in Economics with infinitely many Commodities. *Journal of Mathematical Economics*, 8(1), 15-35.

Lintner, J. (1965). The valuation of risk assets and the selection of risky investments in stock portfolios and capital budgets. *The Review of Economics and Statistics*, 47(1), 13-37.

Lewis, K. (2013). A simple proof of the fundamental theorem of asset pricing. Documento de trabajo. Recuperado de http://kalx.net/ftapd.pdf

Merton, R. (1973). The theory of rational option pricing. *The Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.

Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica: Journal of the Econometric Society*, 34(1), 768-783.

Platen, E. y Heath, D. (2006). *A Benchmark Approach to Quantitative Finance*. Sidney: Springer.

Ross, S. (1976). The arbitrage theory of capital asset pricing. *Journal of Economic Theory*, 13(3), 341-360.

Ross, S. (1977). Return, risk and arbitrage. En: Rodney, L. *Risk and Return in Finance*, Vol. 1, 189-218. Pennyslvania: White Center for Financial Research, The Wharton School, University of Pennyslvania.

Ross, S. (1978). A simple approach to the valuation of risky streams. *Journal of Business*, 51(1), 453-475.

Ross, S. (2005). *Neoclassical finance*. New Jersey: Princeton University Press.

Rubinstein, M. (1976). The valuation of uncertain income streams and the pricing of options. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 7(2), 407-425.

Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442.

Schachermayer, W. (1992). A Hilbert space proof of the fundamental theorem of asset pricing in finite discrete time. *Insurance: Mathematics and Economics*, 11(4), 249-257.

Schachermayer, W. (1994). Martingale measures for discrete time processes with infinite horizon. *Mathematical Finance*, 4(1), 25-56.

Schwartz, E. y Trigeorgis, L. (2004). *Real Options and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*. Cambridge: MIT press.