El teorema de recuperación de Ross. Explicación, extensiones y algunas aplicaciones

John Freddy Moreno Trujillo*

* Magíster en Matemática Aplicada. Docente-Investigador, CIPE-ODEON, Universidad Externado de Colombia. Bogotá (Colombia). [jhon.moreno@uexternado.edu.co].

Artículo recibido el 02 de noviembre de 2017.
Aceptado el 30 de noviembre de 2017.
Para citar este artículo
Moreno Trujillo, J. F. (2017). El teorema de recuperación de Ross. Explicación, extensiones y algunas aplicaciones. *ODEON*, 13, pp. 45-74.
DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n13.04

Introducción

El objetivo central de la teoría de valoración de activos contingentes es determinar el precio de este tipo de activos financieros, a partir del precio de otros más líquidos cuyo valor es conocido. En un mercado sin oportunidades de arbitraje, el teorema fundamental de valoración permite establecer el precio de un activo bajo una *medida de riesgo neutral* (también llamada medida martingala local equivalente), que por lo general se denota mediante la letra $\mathbb{Q}$. Por otro lado, los agentes que participan en el mercado modelan las distribuciones de probabilidad de los precios de los activos basados en una *medida real*, la cual es una medida subjetiva de probabilidad, que por lo general se denota mediante la letra $\mathbb{P}$. Una presentación completa de estos conceptos puede consultarse en Moreno Trujillo (2012).

La diferencia entre estas dos medidas puede entenderse como una *prima por riesgo*, que es la tasa de retorno que demandan los inversionistas por encima de la tasa libre de riesgo. Esto se puede explicar si se considera que, bajo la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$, el retorno esperado de todos los activos es la tasa libre de riesgo, lo cual hace que bajo esta medida los activos sean valorados como si los agentes fueran riesgo neutrales. Por el contrario, los agentes son típicamente aversos al riesgo en el mundo real, y demandan un retorno mayor que la tasa libre de riesgo por invertir en activos riesgosos. De esta forma, la diferencia entre el retorno esperado en el mundo real (bajo $\mathbb{P}$) y la tasa libre de riesgo (bajo $\mathbb{Q}$) es la prima por riesgo.

Esta prima por riesgo no es negociable o directamente observable en el mercado, pero se pueden considerar múltiples aplicaciones prácticas de poder determinar su valor de alguna manera. Por ejemplo, basados en los precios de los derivados pactados sobre algún activo, se puede recuperar la distribución de probabilidad subjetiva que tiene el mercado del retorno de dicho activo, para derivar estrategias de inversión óptimas o calcular medidas de control de riesgo.

En un *working paper* de 2013, que posteriormente pasó a ser un artículo publicado en el *Journal of Finance*, titulado “The recovery theorem”, el profesor Stephen Alan Ross presenta una nueva forma de conectar estas dos medidas de probabilidad. En su artículo, el profesor Ross muestra una forma en la que, dada una medida de riesgo neutral, se reconstruye (recupera) la medida real y se deduce la prima por riesgo. Este modelo está basado en una economía con espacio de tiempo y estados discretos, y considera restricciones sobre las preferencias de un agente representativo del mercado. El resultado de este trabajo ha arrojado luces sobre aproximaciones alternativas en campos como la administración de riesgo, la optimización de portafolios, el diseño de estrategias de negociación, entre otros.

El teorema de recuperación tiene varias extensiones teóricas. Peter Carr y Jiming Yu (2012) investigan los supuestos sobre los que está basado el trabajo de Ross y proponen una modificación del modelo que los lleva a un resultado similar, pero partiendo de un conjunto diferente de supuestos. Ellos asumen un proceso de difusión continuo para describir el mercado, sin considerar la existencia de un agente representativo, e introducen el concepto de portafolio numerario (que es un portafolio autofinanciado estrictamente positivo) tal que, cuando un activo es medido en unidades del portafolio numerario, resulta ser una martingala local bajo la medida real. Imponiendo restricciones sobre la forma y la dinámica del portafolio numerario, Carr y Yu presentan una prueba del teorema de recuperación en el contexto de una difusión acotada univariada.

Dubynskiy y Goldstein (2013) investigan las implicaciones de acotar el espacio de estados y muestran que esto lleva a algunas inconsistencias econométricas del modelo. Martin y Ross (2013) extienden los resultados incorporando en el mercado activos de renta fija y discuten las implicaciones en el largo plazo de los supuestos de Ross. Huang y Shaliastovich (2014) consideran una extensión que tiene en cuenta preferencias que rápidamente resuelven la incertidumbre a partir de datos históricos. Audrino, Huitema y Ludwig (2015) construyen una superficie de densidad precio-estado a partir del precio de opciones y desarrollan una estrategia de estimación no paramétrica para el teorema de recuperación. En su trabajo utilizan opciones sobre el S&P 500, e investigan si el teorema de recuperación produce o no información predictiva más allá de lo que se puede deducir de las densidades de riesgo neutral. Para el periodo de observación considerado encuentran que las estrategias de sincronización con el mercado basadas en los momentos recuperados superan significativamente a las basadas en sus contrapartes de riesgo neutral.

En el presente documento se realiza una presentación formal del teorema de recuperación de Ross y de la extensión continua propuesta por Carr y Yu. Se desarrollan los elementos necesarios para la demostración en cada caso, y se muestran las implicaciones de no considerar difusiones acotadas para el modelo Black-Scholes, en el caso del teorema de recuperación en tiempo y estados continuos. Se dan las definiciones y algunos detalles de los teoremas de Perron-Frobenius y Sturm-Liouville, que son centrales en las demostraciones de estos teoremas.

También se quiere rendir una homenaje al profesor Stephen Alan "Steve" Ross quien falleció en marzo de 2017, dejándonos el legado de una brillante carrera teórica y práctica en los campos de las finanzas y la economía.

1. El teorema de Ross

En esta sección se presenta el modelo desarrollado por el profesor Stephen A. Ross en 2013 y 2015. Se describen los elementos matemáticos subyacentes a este resultado con el ánimo de realizar una presentación formal del modelo siguiendo el trabajo de Tsui (2013), que difiere del trabajo original de Ross en el tratamiento de la existencia de un agente representativo en el mercado y la forma de su función de utilidad, pero que hace más simple de explicar el resultado.

El análisis se realiza sobre un espacio de probabilidad filtrado $(\Omega, \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{F}, \mathbb{P})$, donde $\mathbb{F}$ es la filtración generada por las σ-álgebras $\mathcal{F}_t$. Para $n \in \mathbb{N}$ fijo se considera el vector de $n+1$ activos $S_t = (S_t^0, S_t^1, S_t^2, .., S_t^n) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$, donde:

- S_t^0: activo libre de riesgo.
- S_t^i: activos riesgosos, para $i = 1, 2, ..., n$

El objetivo del teorema de Ross es determinar la probabilidad de transición del mundo real ($\mathbb{P}$) desde la información precio-estado de los activos, la cual se obtiene de los precios de los derivados pactados sobre estos activos (que son las variables estado subyacentes). Los supuestos del modelo de Ross son:

1. Existe un espacio de estados de la naturaleza finito.
2. Las negociaciones ocurren en momentos discretos de tiempo.
3. No hay oportunidades de arbitraje.
4. Las funciones de precio-estado y de probabilidad de transición bajo $\mathbb{P}$ son homogéneas en el tiempo.
5. Los precios de estado son conocidos.
6. La transición es independiente del núcleo (Kernel) de valoración.
7. La matriz de precio-estado es no negativa e irreducible.

1.1. El modelo de mercado

De acuerdo con los supuestos anteriores, la economía en el modelo de Ross es de tiempo discreto y con espacio de estados finito, es decir:

- $t = t_1, t_2, t_3, ...$ son el conjunto de instantes de tiempo, a intervalos igualmente espaciados, en los que ocurren las negociaciones.
- El espacio de estados de la naturaleza (Π) es finito, con variable de estado $X_t \in \Pi$ y $|\Pi| = M \in \mathbb{N}$.
- Existe un proceso estocástico de tasa de interés $r_t \in \mathbb{R}_+$ tal que S_t^0 satisface:

$$S_{t+1}^0 = S_t^0(1 + r_t) \quad \text{para todo } t \in \mathbb{N} \tag{1}$$

con $S_0^0 = 1$.

Los precios de estado (también llamados precios Arrow-Debreu), son los precios de contratos en los que se acuerda pagar una unidad de un activo numerario de la economía si un estado particular de la naturaleza se presenta en el siguiente instante de tiempo, o pagar cero en cualquier otro estado. Por el primer teorema fundamental de valoración de activos, la no existencia de oportunidades de arbitraje implica la existencia de precios de estado (lo que no implica que los contratos a los que hacen referencia los precios de estado sean efectivamente negociados en los mercados, pero sí permiten el uso de estos precios con propósitos teóricos). Es importante destacar que, bajo las condiciones impuestas hasta este momento, el conjunto de precios de estado no necesariamente es único.

La función precio-estado es el precio de un activo precio-estado en un momento de tiempo específico, dado un estado inicial y la transición al siguiente estado. Esta función, que se denotará con p, satisface la propiedad de Markov, es homogénea en el tiempo y solo depende del estado inicial y del siguiéndote estado de transición, es decir, $p : \Pi \times \Pi \Rightarrow [0, 1]$. Cada precio-estado es denotado por $p_{i,j}$ donde i representa el estado inicial y j el siguiente estado, y la matriz de precio-estado del modelo (P) es:

$$P = \begin{pmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & \cdots & p_{1,M} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & \cdots & p_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M,1} & p_{M,2} & \cdots & p_{M,M} \end{pmatrix} \tag{2}$$

a partir de la cual se puede definir la matriz de probabilidad de riesgo neutral Q como:

$$Q = \begin{pmatrix} p_{1,1}/\sum_{j=1}^{M} p_{1,j} & p_{1,2}/\sum_{j=1}^{M} p_{1,j} & \cdots & p_{1,M}/\sum_{j=1}^{M} p_{1,j} \\ p_{2,1}/\sum_{j=1}^{M} p_{2,j} & p_{2,2}/\sum_{j=1}^{M} p_{2,j} & \cdots & p_{2,M}/\sum_{j=1}^{M} p_{2,j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{M,1}/\sum_{j=1}^{M} p_{M,j} & p_{M,2}/\sum_{j=1}^{M} p_{M,j} & \cdots & p_{M,M}/\sum_{j=1}^{M} p_{M,j} \end{pmatrix} \quad (3)$$

La función de densidad de transición del modelo se denotará como f y representa la probabilidad de transición entre estados bajo $\mathbb{P}$. Esta función satisface la propiedad de Markov, es homogénea en el tiempo y solo depende del estado inicial y del siguiente estado de transición, es decir, $f : \Pi \times \Pi \Rightarrow [0,1]$. Se denota por $f_{i,j}$ a la función de densidad de transición del estado inicial i al estado j, y la matriz de probabilidad de transición del modelo (F) es:

$$F = \begin{pmatrix} f_{1,1} & f_{1,2} & \cdots & f_{1,M} \\ f_{2,1} & f_{2,2} & \cdots & f_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{M,1} & f_{M,2} & \cdots & f_{M,M} \end{pmatrix} \quad (4)$$

Considerando las definiciones anteriores, la meta del modelo de Ross es recuperar la matriz F desde la matriz P. Para esto, se asume que la matriz de precio-estado P es conocida *ex-ante*. El kernel de valoración del modelo, del estado i al estado j, es definido mediante el cociente:

$$\phi_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{f_{i,j}} \quad (5)$$

y la matriz de Kernel de valoración como:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_{1,1} & \phi_{1,2} & \cdots & \phi_{1,M} \\ \phi_{2,1} & \phi_{2,2} & \cdots & \phi_{2,M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{M,1} & \phi_{M,2} & \cdots & \phi_{M,M} \end{pmatrix} \quad (6)$$

El kernel de valoración es independiente de la transición si este puede escribirse como:

$$\phi_{i,j} = \frac{p_{i,j}}{f_{i,j}} = \delta \frac{h(j)}{h(i)} \tag{7}$$

donde $h : \Pi \Rightarrow \mathbb{R}_+$ es una función positiva y δ es una constante positiva llamada factor de descuento. En el modelo propuesto se asume que se tiene esta propiedad.

Se debe aclarar que el modelo original de Ross no asume la independencia de la transición del Kernel de valoración, esta es derivada desde la optimización de la utilidad de un agente representativo con utilidad aditiva intertemporal separable.

El último supuesto en el modelo de Ross indica que la matriz de precio-estado P es no negativa[1] e irreducible[2], y es importante mencionar, como lo hace Ross (2015), que las medidas $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ son equivalentes[3], luego que P sea irreducible implica que F también lo es, y la no negatividad de las dos matrices se puede deducir fácilmente. Un argumento similar muestra que la no negatividad e irreducibilidad de P implica estas mismas propiedades sobre Φ.

1.2. Derivación del teorema de recuperación de Ross

Al considerar la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} h(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & h(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & h(M) \end{pmatrix} \tag{8}$$

[1]Una matriz cuadrada A de orden n se dice no negativa si todos sus elementos son mayores o iguales a cero.

[2]Una matriz cuadrada A de orden n se dice irreducible si no existe alguna matriz de permutación que transforma a esta matriz en triangular por bloques, es decir, A es irreducible si no existe una matriz de permutación P tal que:

$$PAP^T = \begin{pmatrix} M_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M_{n,1} & M_{n,2} & \cdots & M_{n,n} \end{pmatrix}$$

con M_ij matrices cuadradas.

[3]Para cualquier evento A en $\mathcal{F}$ se tiene que $\mathbb{P}(A) = 0$ si y solo si $\mathbb{Q}(A) = 0$.

Su inversa es:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1/h(1) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/h(2) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/h(M) \end{pmatrix} \tag{9}$$

Por el supuesto de independencia de la transición del kernel de valoración se tiene que $\phi_{i,j} = p_{i,j}/f_{i,j}$, lo cual puede reescribirse como:

$$p_{i,j} = \phi_{i,j} f_{i,j} = \delta \frac{h(j)}{h(i)} f_{i,j} \tag{10}$$

y en forma matricial:

$$P = \delta D^{-1} F D \tag{11}$$

de donde,

$$F = \frac{1}{\delta} D P D^{-1} \tag{12}$$

que representa el objetivo básico del teorema de recuperación de Ross. Como $\sum_{j=1}^{M} f_{i,j} = 1$ para todo $i = 1, 2, ..., M$, lo cual puede expresarse como $Fe = e$, siendo $e = (1, 1, ..., 1)^T$ de tamaño $M \times 1$, entonces, al multiplicar ambos lados en (12) por e y reordenando los términos se tiene:

$$P D^{-1} e = \delta D^{-1} e \tag{13}$$

Denotando por $x = D^{-1}e$, la expresión (13) se reescribe como:

$$Px = \delta x \tag{14}$$

lo cual transforma la ecuación en un problema de cálculo de valores y vectores propios de la matriz P, y se debe notar que:

- Los elementos de x son los elementos en la diagonal de la matriz D^{-1} $(1/h(i))$, que deben ser positivos.

- δ es un factor de descuento subjetivo, por lo cual debe ser un número no negativo menor o igual que uno.

El teorema de recuperación de Ross garantiza una solución única al problema (14), si se satisfacen las dos condiciones anteriores.

Teorema 1 (**Teorema de recuperación de Ross**). *Existe una única solución positiva para x (hasta una escala positiva) y δ en (14), y es posible recuperar la matriz D (hasta una escala positiva) y la matriz F.*

Demostración 1. *Del modelo se tiene que P es una matriz irreducible. Aplicando el teorema de Perron-Frobenius*[4]*, cuya demostración puede consultarse en Meyer (2000), el único vector propio de P cuyas entradas son todas positivas es su vector de Perron (que es único hasta una escala positiva), por lo tanto, esta es la única solución posible para x. Adicionalmente, δ debe ser el correspondiente valor propio de Perron tal que $\rho(P) > 0$.*

δ está acotado por el mínimo y el máximo de la suma por filas de P, y dado que P es una matriz de precio-estado, cada una de estas sumas debe ser no negativa, además, el máximo pago de cada activo precio-estado es uno (lo que indica que si todos los activos precio-estado son comprados es posible garantizar un pago de 1). Esto implica que la suma por cada fila es siempre menor o igual a uno, es decir:

$$0 \leq \delta \leq 1 \tag{15}$$

Una vez determinada x, se puede recuperar D dado que $x = D^{-1}e$ (hasta alguna escala positiva) y también la matriz F desde (12).

1.3. Algunos comentarios sobre el modelo de Ross

Sobre el modelo de Ross es importante destacar que: 1) puede considerarse como una cadena de Markov homogénea en el tiempo, de estados finitos e irreducible; 2) el proceso de tasa de interés r_t es homogéneo en el tiempo y el proceso de descuento asociado está acotado. Adicional a esto, si el proceso de

[4]El teorema de Perron-Frobenius establece que: *Sea A una matriz cuadrada n-dimensional para la cual se cumple: 1. A es irreducible; 2. $a_{ii} \geq 0$. En estas condiciones, la matriz A posee un valor propio λ real, simple y positivo que marca su radio espectral (si $\lambda_1, ..., \lambda_n$ son los valores propios de A, entonces su radio espectral $\rho(A)$ se define como: $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$), y está acotado por:*

$$\min \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}| \leq \lambda \leq \max \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

Además, el vector propio asociado a este valor propio puede tomarse positivo.

interés se asume constante, la medida de probabilidad real es igual a la medida riesgo neutral.

Una cadena de Markov[5] puede definirse como un sistema que transita de un estado a otro, entre un número finito de posibles estados, y que satisface la propiedad de Markov . Es sencillo ver que el modelo de Ross es una cadena de Markov de estados finitos, homogénea en el tiempo e irreducible, con variable de estado $X_n \in \Pi$, matriz de densidad de transición F y matriz de transición de probabilidad Φ. En el análisis de cadenas de Markov es importante determinar la distribución estacionaria o distribución de estado estable de la cadena[6], y en el caso del modelo de Ross es posible demostrar, por una aplicación directa del teorema de Perron-Frobenius, que existe una distribución estacionaria única para el mismo. La demostración para el caso de la matriz F parte de considerar que esta es una matriz doblemente estocástica, y por el teorema de Perron-Frobenius se tiene que su radio espectral (r) debe ser tal que:

[5]Una cadena de Markov con estados finitos es una sucesión de variables aleatorias $\{X_1, X_2, ...\}$ que toman valores en conjunto de estados finito Π, y satisfacen la propiedad de Markov:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = x|X_1 = x_1, X_2 = x_2, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_{n+1} = x_{n+1}|X_n = x_n]$$

donde $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad. La función de probabilidad de transición de una cadena de Markov es una función $p : \Pi \times \Pi \times \mathbb{N}_+ \to [0, 1]$ que está definida como la probabilidad:

$$p_{i,j}(n) = \mathbb{P}[X_n = j|X_{n-1} = i]$$

y la cadena de Markov se dice homogénea en el tiempo si:

$$\mathbb{P}[X_{n+1} = j|X_n = i] = \mathbb{P}[X_n = j|X_{n-1} = i] \quad \forall i, j \in \Pi; n \in \mathbb{N}_+$$

es decir, la función de transición de probabilidad no depende del tiempo. Cuando una cadena de Markov es homogénea en el tiempo es posible definir su matriz de transición $P = [p_{i,j}]_{M \times M}$ donde $|\Pi| = M$. Una cadena de Markov se dice irreducible si todo estado es alcanzable desde cualquier estado inicial, y si una cadena es irreducible su matriz de transición también lo será (en el sentido de esta definición para matrices).

[6]Si $\{X_n\}$ denota una cadena de Markov homogénea en el tiempo, con espacio de estados Π y matriz de transición de probabilidad P, entonces la distribución de probabilidad estacionaria (π) es tal que:

$$P\pi = \pi$$

Lo anterior significa que si la cadena alcanza su distribución estacionaria entonces mantiene la distribución para todo instante futuro.

$$1 = \min_i \sum_j f_{i,j} \leq r \leq \max_i \sum_j f_{i,j} = 1 \tag{16}$$

luego 1 es un valor propio de la matriz F, y el correspondiente vector de propio v satisface:

$$Fv = v \tag{17}$$

entonces v es la distribución estacionaria de la cadena de Markov en el modelo de Ross.

Con relación al proceso de tasa de interés r_t, este solo depende del estado actual y es independiente del tiempo, es decir, es un proceso homogéneo en el tiempo. Además, se tiene que:

$$r_t = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M} p_{i,j}} - 1 \tag{18}$$

dado que, si i es el estado actual, y un agente del mercado adquiere todos los activos precio-estado $p_{i,j} \in \Pi$, este garantiza ganar 1 sin importar el estado que se realice. Esto, en un mercado sin oportunidades de arbitraje, implica que la suma $\sum_{j=1}^{M} p_{i,j}$ debe ser igual a 1 descontado a la tasa r_t, es decir:

$$\sum_{j=1}^{M} p_{i,j} = \frac{1}{1 + r_t} \tag{19}$$

que puede escribirse como (18), lo que muestra que r_t es homogénea en el tiempo pues no depende de t.

Ahora, si la tasa de interés es constante $(r_t = r)$, de (19) se concluye que la suma por filas de P es siempre igual a un valor k, que es un factor de descuento constante.

$$\sum_{j=1}^{M} p_{i,j} = \frac{1}{1 + r} = k \quad \text{para todo } i \in \Pi \tag{20}$$

que puede expresarse en forma matricial como $Pe = ke$, donde e es un vector de unos de tamaño $M \times 1$. Por el teorema de Perron-Frobenius el vector propio asociado a P es e, y el valor propio asociado es uno. De (12) se concluye que:

$$F = \frac{1}{k} P \tag{21}$$

y de (3), la definición de la matriz de riesgo neutral Q es:

$$Q = \frac{1}{\sum_{j=1}^{M} p_{i,j}} P = (1+r)P = \frac{1}{k} P = F \tag{22}$$

entonces, bajo estas condiciones, la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$ es igual a la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$.

2. El modelo de Carr y Yu

Como una extensión del modelo de Ross, Peter Carr y Jiming Yu (2012) establecen un teorema de recuperación bajo el contexto de una difusión acotada. En su modelo utilizan el concepto de portafolio numerario, de forma que, cualquier activo que sea medido en unidades de dicho portafolio resulta ser una martingala local bajo la medida real $\mathbb{P}$. El modelo de Carr y Yu difiere del modelo de Ross en dos elementos esenciales: 1) es desarrollado en el contexto de tiempo y estados continuos; 2) se reemplaza la restricción sobre las preferencias de un agente representativo, por restricciones sobre la estructura de la dinámica del portafolio numerario.

El objetivo principal del modelo de Carr y Yu es recuperar la medida $\mathbb{P}$ desde la medida de riesgo neutral $\mathbb{Q}$ junto con la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$. Más detalles sobre este concepto y sus aplicaciones en el campo de las finanzas pueden consultarse en Moreno Trujillo (2015).

Los supuestos del modelo son:

1. Tiempo y estados se consideran continuos.

2. No hay oportunidades de arbitraje en el mercado, y el portafolio numerario L_t es igual a $\frac{S_t^0}{M_t}$ donde $M_t = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}}$.

3. Existe un proceso de control univariado, continuo, acotado y homogéneo en el tiempo desde el cual los precios de todos los activos pueden ser determinados.

4. La dinámica de la tasa de interés y del proceso de control bajo la medida $\mathbb{Q}$ es conocida.

5. El portafolio numerario depende solamente del valor actual del proceso de control y del tiempo.

6. El proceso de tasa de interés y el coeficiente de tendencia del portafolio numerario son homogéneos en el tiempo.

7. Las condiciones de frontera del portafolio numerario son conocidas.

8. Se tienen las condiciones de continuidad y derivabilidad necesarias para desarrollar el modelo.

Basados en este conjunto de supuestos, si el coeficiente de difusión del portafolio numerario es determinado, el precio del riesgo en el mercado puede ser establecido. El problema de la determinación de este coeficiente se puede transformar en un problema de cálculo de valores y vectores propios, cuya solución se puede encontrar aplicando el teorema regular de Sturm-Liouville. Los teoremas de Girsanov y de cambio de numerario se aplican para determinar la dinámica del proceso de control bajo la medida real $\mathbb{P}$ y la densidad de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$.

2.1. El modelo de mercado

En este caso se tiene que:

- t es un conjunto de índices con valores en el intervalo $[0, T]$.
- El espacio de estados es continuo.
- Existe una tasa de interés estocástica $r_t \in \mathbb{R}_+$ tal que S_t^0 satisface la ecuación diferencial:

$$dS_t^0 = r_t S_t^0 dt \quad t \in [0, T] \tag{23}$$

o de forma equivalente

$$S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds} \tag{24}$$

con $S_0^0 = 1$.

Por el teorema fundamental de valoración de activos (ver Moreno Trujillo, 2015) existe una medida martingala local equivalente $\mathbb{Q}$, tal que (S_t^i/S_t^0) es una martingala local bajo esta medida para todo $i = 1, 2, ..., n$. Además, se define la derivada de Radon-Nikodym (M_t) como:

$$M_t = \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}} \tag{25}$$

Un portafolio numerario es un portafolio de valor estrictamente positivo y autofinanciado tal que, el valor de cualquier activo, medido en unidades de este portafolio (S_t^i/L_t), es una martingala local bajo $\mathbb{P}$, para $i = 0, 1, ..., n$. La noción de portafolio numerario es introducida en el trabajo de John Long Jr. (1990), en el contexto de un modelo de tiempo discreto[7], y en el trabajo de Becherer (2001) se introduce este mismo concepto en tiempo continuo. Karatzas y Kardaras (2007) prueban que la no existencia de utilidades ilimitadas y sin riesgo es suficiente para garantizar la existencia de un portafolio numerario.

La existencia de un portafolio numerario no implica automáticamente que este sea igual a $\frac{S_t^0}{M_t}$, pero en un mercado completo y sin arbitraje sí se cumple esta igualdad[8].

---

[7]Un portafolio numerario N_t en una economía a tiempo discreto es un portafolio de valor estrictamente positivo y autofinanciado para el cual se cumple que:

$$\frac{S_t^j}{N_t} = E\left[\frac{S_{t+1}^j}{N_{t+1}}|\mathcal{F}_t\right]$$

para todo $0 \leq t \leq T$ y donde $E[\cdot]$ denota el valor esperado bajo la medida de probabilidad real.

[8]Un portafolio $(h_t^0, h_t^1, ..., h_t^n)$ se dice autofinanciado si para

$$V_t = \sum_{i=0}^{n} h_t^i S_t^i$$

se cumple que:

$$dV_t = \sum_{i=0}^{n} h_t^i dS_t^i$$

También se tiene que un portafolio $(h_t^0, h_t^1, ..., h_t^n)$ es autofinanciado si y solo si

$$d\hat{V}_t = \sum_{i=0}^{n} h_t^i d\hat{S}_t^i$$

donde $\hat{Y}_t = \frac{Y_t}{S_t^0}$ denota el valor descontado de un proceso de precio o de una estrategia de negociación.

Teorema 2. *En un mercado completo y sin oportunidades de arbitraje existe el portafolio numerario* $L_t \equiv \frac{S_t^0}{M_t}$.

Demostración 2. *Para la demostración primero se muestra que* $\frac{S_t^i}{L_t}$ *es una martingala local bajo la medida* $\mathbb{P}$, *para* $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Por el teorema fundamental de valoracion de activos, y bajo las condiciones del presente teorema, existe una medida martingala local equivalente $\mathbb{Q}$ *tal que* $\frac{S_t^i}{S_t^0}$ *es una martingala local bajo* $\mathbb{Q}$, *para* $i = 0, 1, 2, ..., n$, *es decir, para cada* $i = 0, 1, 2, ..., n$ *existe una sucesión de tiempos de parada* τ_m *con* $\tau_m \to \infty$ *casi seguramente, que cumple:*

$$E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{(S_t^i)^{\tau_m}}{(S_t^0)^{\tau_m}}, \quad t \in [0, T],\ i = 0, 1, 2, ..., n \tag{26}$$

para todo m, *y donde la notación* $(S_t)^{\tau_m}$ *indica el proceso parado* $S_{\min\{t,\tau_m\}}$.

Al considerar el valor esperado condicional $E^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_T^{\tau_m}}{M_t^{\tau_m}}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right]$, *se tiene que:*

$$\begin{aligned}
E^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_T^{\tau_m}}{M_t^{\tau_m}}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] &= \frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\tau_m>t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] + \mathbf{1}_{\tau_m\le t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\tau_m>t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[E^{\mathbb{P}}[M_T|\mathcal{F}_{\min\{\tau_m,t\}}]\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&+ \mathbf{1}_{\tau_m\le t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\tau_m>t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[E^{\mathbb{P}}\left[M_T\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_{\min\{\tau_m,t\}}\right]|\mathcal{F}_t\right] \\
&+ \mathbf{1}_{\tau_m\le t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\tau_m>t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] + \mathbf{1}_{\tau_m\le t}\frac{1}{M_t^{\tau_m}}E^{\mathbb{P}}\left[M_T^{\tau_m}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbf{1}_{\tau_m>t}E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] + \mathbf{1}_{\tau_m\le t}E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right]
\end{aligned}$$

El cambio de medida de probabilidad en la última línea de la expresión anterior es por la aplicación del teorema generalizado de Bayes[9]*. Se sigue que, al escribir todo en un solo término:*

$$E^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_T^{\tau_m}}{M_t^{\tau_m}}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] = E^{\mathbb{Q}}\left[\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] = \frac{(S_t^i)^{\tau_m}}{(S_t^0)^{\tau_m}}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} E^{\mathbb{P}}\left[\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(L_T)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] &= E^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_t^{\tau_m}}{M_t^{\tau_m}}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}/M_T^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= M_t^{\tau_m} E^{\mathbb{P}}\left[\frac{M_T^{\tau_m}}{M_t^{\tau_m}}\frac{(S_T^i)^{\tau_m}}{(S_T^0)^{\tau_m}}|\mathcal{F}_t\right] \\ &= M_t^{\tau_m}\frac{(S_t^i)^{\tau_m}}{(S_t^0)^{\tau_m}} = \frac{(S_t^i)^{\tau_m}}{(L_t)^{\tau_m}} \end{aligned}$$

lo que demuestra que $\frac{S_t^i}{L_t}$ es una martingala local bajo la medida $\mathbb{P}$, para $i = 0, 1, 2, ..., n$.

La segunda parte de la demostración consiste en establecer que L_t es un portafolio autofinanciado.

Como la derivada de Radon-Nikodym $M_t = \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ es martingala bajo $\mathbb{P}$, entonces $\frac{1}{M_t} = \left.\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t}$ es martingala bajo $\mathbb{Q}$, y dado que $d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = d\left(\frac{S_t^0/M_t}{S_t^0}\right) = d\left(\frac{1}{M_t}\right)$, entonces $\frac{L_t}{S_t^0}$ es martingala. Bajo $\mathbb{Q}$ se tiene que $\hat{S}_t^{\,i}$ es martingala para

[9]Dadas dos medidas de probabilidad $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ definidas sobre un mismo espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$ y dada una filtración $\{\mathcal{F}_t\}$, estas también son medidas de probabilidad sobre $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ y se utiliza la notación $\mathbb{P}_t$ y $\mathbb{Q}_t$ cuando las medidas están restringidas por $\mathcal{F}_t$. Si $\mathbb{Q}$ es absolutamente continua respecto a $\mathbb{P}$ ($\mathbb{Q} << \mathbb{P}$), entonces $\mathbb{Q}_t << \mathbb{P}_t$, y se denota la derivada de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ respecto a $\mathbb{P}$ como:

$$\Lambda_t = \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_t = \frac{d\mathbb{Q}_t}{d\mathbb{P}_t}$$

Proposición 1 (Bayes generalizado)**.** *Sean $\mathbb{P}$ y $\mathbb{Q}$ dos medidas de probabilidad equivalentes definidas sobre el espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, y sea $\mathcal{F}_t$ una filtración sobre este espacio tal que $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}$, entonces:*

$$E^{\mathbb{Q}}[X|\mathcal{F}_t] = \frac{E^{\mathbb{P}}[\Lambda_T X|\mathcal{F}_t]}{\Lambda_t}$$

para toda variable aleatoria X $\mathcal{F}_T$-medible.

todo i, y por el teorema de representación martingala:

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = d\hat{L_t} = \sum_{i=1}^{n} h_t^i d\hat{S_t}^0$$

lo que demuestra que L_t es autofinanciado.

La dinámica del portafolio numerario bajo la medida $\mathbb{P}$ se describe como:

$$\frac{dL_t}{L_t} = (r_t + \sigma_t^2)dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{27}$$

resultado que se puede demostrar partiendo de los desarrollos anteriores y de la fórmula de Itô. De la primera parte de la demostración anterior se tiene que (S_t^i/L_t) es martingala para todo $i = 0, 1, ..., n$. Por el teorema de representación martingala se tiene que:

$$\frac{d(S_t^0/L_t)}{(S_t^0/L_t)} = -\sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{28}$$

para algún proceso adaptado σ_t. Si X_t es un proceso de Itô[10], entonces por la fórmula de Itô[11] se tiene que:

[10]Un proceso estocástico X_t se dice proceso de Itô si puede expresarse en la forma

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s)ds + \int_0^t b(s, X_s)dW_s \quad t \geq 0$$

donde X_0 es un valor inicial, y $\{a(t, X_t)_{t\geq 0}\}$ y $\{b(t, X_t)_{t\geq 0}\}$ son procesos estocásticos que satisfacen condiciones de regularidad que se denominan coeficiente de tendencia y difusión. En notación diferencial se tiene que

$$dX_t = a(t, X_t)dt + b(t, X_t)dW_t \quad t \geq 0$$

[11]Dados los procesos de Itô X_t, Y_t y una función $f(t, x, y) \in C^{1,2,2}$ se tiene que

$$\begin{aligned} df(t, X_t, Y_t) &= \frac{\partial f(s, X_s, Y_s)}{\partial s}ds + \frac{\partial f(s, X_s, Y_s)}{\partial X_s}dX_s + \frac{\partial f(s, X_s, Y_s)}{\partial Y_s}dY_s \\ &+ \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 f(s, X_s, Y_s)}{\partial X_s^2}(dX_s)^2 + \frac{\partial^2 f(s, X_s, Y_s)}{\partial Y_s^2}(dY_s)^2 + 2\frac{\partial^2 f(s, X_s, Y_s)}{\partial X_s Y_s}(dX_s)(dY_s)\right\} \end{aligned}$$

$$d\left(\frac{1}{X_t}\right) = -\frac{1}{X_t^2}dX_t + \frac{1}{X_t^3}(dX_t)^2 \tag{29}$$

Considerando $X_t = S_t^0/L_t$ y aplicando (29) se tiene que:

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = -\frac{L_t^2}{(S_t^0)^2}d\left(\frac{S_t^0}{L_t}\right) + \frac{L_t^3}{(S_t^0)^3}\left[d\left(\frac{S_t^0}{L_t}\right)\right]^2 \tag{30}$$

De (28) se tiene que:

$$d\left(\frac{S_t^0}{L_t}\right) = -\left(\frac{S_t^0}{L_t}\right)\sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \quad ; \quad \left[d\left(\frac{S_t^0}{L_t}\right)\right]^2 = \left(\frac{S_t^0}{L_t}\right)^2 \sigma_t^2 dt$$

que al ser reemplazadas en (30) llevan a:

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) / \left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = \sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{31}$$

Al aplicar nuevamente la fórmula de Itô, considerando los procesos L_t y S_t^0 junto con la función $f(x,y) = \frac{x}{y}$, se tiene que:

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = \frac{1}{S_t^0}dL_t - \frac{L_t}{(S_t^0)^2}dS_t^0 + \frac{L_t}{(S_t^0)^3}(dS_t^0)^2 - \frac{1}{(S_t^0)^2}dS_t^0 dL_t$$

y como $dS_t^0 = r_t S_t^0 dt$ entonces:

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = \frac{1}{S_t^0}dL_t - \frac{L_t r_t}{S_t^0}dt$$

de donde,

$$d\left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) / \left(\frac{L_t}{S_t^0}\right) = \frac{dL_t}{L_t} - r_t dt$$

y por (31) se tiene que:

$$\sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} = \frac{dL_t}{L_t} - r_t dt \tag{32}$$

Se concluye que:

$$\frac{dL_t}{L_t} = (r_t + \sigma_t^2)dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \tag{33}$$

Una importante consecuencia del resultado anterior es que la prima por riesgo (θ_t) del modelo es igual al coeficiente de difusión del portafolio numerario, es decir:

$$\theta_t = \sigma_t \tag{34}$$

Esto se puede demostrar recordando que la prima por riesgo asociada a un cierto activo o estrategia de negociación es:

$$\theta_t = \frac{\alpha_t - r_t}{\sigma_t} \tag{35}$$

donde:
α_t : coeficiente de tendencia del activo o estrategia.
σ_t : coeficiente de difusión.
r_t : proceso de tasa interés.
Para el caso del portafolio numerario $\alpha_t = r_t + \sigma_t^2$, luego $\theta_t = \sigma_t$.

Como parte de los supuestos del modelo se asume la existencia de un proceso de control o proceso director (X_t) univariado, continuo, acotado y homogéneo en el tiempo, del cual dependen los procesos de precio de los activos considerados en el mercado, es decir, X_t es una difusión de Itô homogénea en el tiempo con $X_t \in [l, u]$, tal que $S_t^i = S^i(t, X_t)$ para $i = 0, 1, ..., n$. Por definición el proceso X_t satisface:

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \tag{36}$$

donde $W^{\mathbb{Q}}$ es un movimiento Browniano estándar bajo $\mathbb{Q}$. Adicinal a lo anterior, de (24) se tiene que $r_t = \frac{\partial}{\partial t}\ln(S_t^0)$, y como $S_t^0 = S^0(t, X_t)$, entonces $r_t = r_t(t, X_t)$, es decir, el proceso de tasa de interés también es determinado por el proceso director X_t.

La dinámica del proceso X_t bajo $\mathbb{Q}$ es calibrada a partir de los datos observados en el mercado[12], y se asume que:

1. El portafolio numerario L_t depende solamente del valor actual del proceso X_t y del tiempo, es decir, $L_t = L(t, X_t)$.

2. El proceso de tasa de interés es homogéneo en el tiempo, es decir, $r(t, x) = r(x)$.

[12] Se asume que $a(x)$, $b(x)$ y $r(t, x)$ son conocidos *ex-ante*, y $b(x) \neq 0$ para $x \in [l, u]$

3. El coeficiente de difusión del portafolio numerario es homogéneo en el tiempo, es decir, $\sigma(t,x) = \sigma(x)$.

De lo anterior, y dado que bajo la medida $\mathbb{Q}$ todos los activos, o combinaciones de estos, tienen coeficiente de tendencia r_t, entonces la dinámica del portafolio numerario bajo $\mathbb{Q}$ puede expresarse como:

$$\frac{dL_t}{L_t} = r(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t^{\mathbb{Q}} \tag{37}$$

lo que indica que el portafolio numerario es homogéneo en el tiempo bajo la medida $\mathbb{Q}$.

Antes de presentar la derivación del teorema de recuperación de Carr y Yu recordemos que, dado un proceso de Itô X_t que satisface:

$$dX_t = a(X_t)dt + b(X_t)dW_t \tag{38}$$

donde W_t es un movimiento Browniano estándar unidimensional y los coeficientes a y b satisfacen las condiciones de continuidad de Lipschitz, se define el operador infinitesimal u operador de Itô de este proceso, aplicado a cualquier función $h(x) \in C^2(\mathbb{R})$ como

$$\mathcal{G}h(t,x) = a(x)\frac{\partial h(x)}{\partial x} + \frac{b^2(x)}{2}\frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} \tag{39}$$

y se tiene que los precios de los activos satisfacen la ecuación diferencial parcial:

$$\frac{\partial S^i(t,x)}{\partial t} + \mathcal{G}S^i(t,x) = r(x)S^i(t,x) \tag{40}$$

en particular, esta ecuación la cumple el portafolio numerario de forma que:

$$\frac{\partial L(t,x)}{\partial t} + \mathcal{G}L(t,x) = r(x)L(t,x)$$

es decir,

$$\frac{\partial L(t,x)}{\partial t} + a(x)\frac{\partial L(t,x)}{\partial x} + \frac{b^2(x)}{2}\frac{\partial^2 L(t,x)}{\partial x^2} = r(x)L(t,x) \tag{41}$$

2.2. Derivación del teorema de recuperación de Carr y Yu

Para la derivación del teorema de recuperación de Carr y Yu se encuentra una expresión para el coeficiente de difusión del portafolio numerario y se aplica el teorema de Girsanov para recuperar la dinámica de X_t bajo la medida $\mathbb{P}$, junto con la dinámica del precio de todos los activos S_t^i también bajo $\mathbb{P}$. Como parte del proceso es necesaria la aplicación del teorema regular de Sturn-Lioville[13].

Teorema 3. *La dinámica del proceso director X_t, bajo $\mathbb{P}$, está dada por el proceso de difusión homogéneo en el tiempo:*

$$dX_t = [a(X_t) + b(X_t)\sigma(X_t)]dt + b(X_t)dW_t^{\mathbb{P}} \tag{42}$$

[13]Una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden de Sturm-Liouville tiene la forma:

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dy(x)}{dx}\right) - q(x)y(x) = -\lambda\rho(x)y(x)$$

donde las funciones $p(x)$ y $\rho(x)$ son positivas y $q(x)$ es real. En el caso más simple, estas funciones son continuas en un intervalo finito cerrado $[a, b]$, en el que, por lo general, se definen unas condiciones de contorno o frontera. La función $\rho(x)$ es llamada función de densidad o función peso.

El valor de λ no se especifica en la ecuación y encontrar los valores λ para los que exista una solución no trivial de la ecuación y que satisfaga las condiciones de frontera se denomina problema de Sturm-Liouville. Tales valores de λ son llamados valores propios o autovalores de la ecuación, conjuntamente con las condiciones de frontera. Las soluciones correspondientes son las funciones propias o los autovectores del problema.

Si las condiciones de frontera del problema son de la forma:

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0 \quad \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$$
$$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \quad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$$

Entonces:

1. El conjunto de valores propios del problema $\lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, ...\}$ es real y discreto con

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ... \to \infty$$

2. A cada valor propio λ_n le corresponde una única función propia $y_n(x)$ que tiene exactamente $n - 1$ ceros en (a, b).

3. Todos los valores propios y funciones propias pueden ser numéricamente establecidas.

Una explicación detallada y la demostración de este teorema puede consultarse en Birkhoff y Rota (1989).

Demostración 3. *Por el teorema de Girsanov, el cambio de medida de probabilidad solo implica un cambio en el coeficiente de tendencia de (36), luego el término de difusión bajo $\mathbb{P}$ también es $b(X_t)$. Sabemos además que la prima por riesgo es $\sigma(X_t)$, y de nuevo, por el teorema de Girsanov, el coeficiente de tendencia de X_t bajo $\mathbb{P}$ es $a(X_t) + b(X_t)\sigma(X_t)$, es decir:*

$$dX_t = [a(X_t) + b(X_t)\sigma(X_t)]dt + b(X_t)dW_t^{\mathbb{P}}$$

Teorema 4. *El coeficiente de difusión del portafolio numerario $\sigma(x)$ satisface la ecuación*

$$\sigma(x) = b(x)\frac{\partial}{\partial x}\ln[L(t,x)] \tag{43}$$

Demostración 4. *Como $L_t = L(t,x) \in C^{1,2}$ y $L_t = L(t,X_t)$, aplicando la fórmula de Itô sobre esta expresión se tiene que:*

$$dL_t = \frac{\partial L_t}{\partial t}dt + \frac{\partial L_t}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L_t}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

y dividiendo por L_t,

$$\frac{dL_t}{L_t} = \frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial t}dt + \frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{1}{L_t}\frac{\partial^2 L_t}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

De (42) se tiene que $(dX_t)^2 = b^2(X_t)dt$. Al reemplazar dX_t y $(dX_t)^2$ en la expresión anterior, e igualar el coeficiente de difusión resultante con el de la expresión (33), se tiene que:

$$\sigma(X_t) = \frac{1}{L_t}\frac{\partial L_t}{\partial x}b(X_t)$$

lo que es equivalente a:

$$\sigma(x) = b(x)\frac{\partial}{\partial x}\ln[L(t,x)]$$

La expresión (43) puede reescribirse para que tenga la forma de una ecuación de Sturm-Liouville. Dado que $b(x) \neq 0$, para alguna función $f(t)$ se tiene que:

$$\ln[L(t,x)] = \int_a^x \frac{\sigma(y)}{b(y)}dy + f(t) \tag{44}$$

tomando exponencial a ambos lados de la expresión (44) y denotando por $\pi(x) = \exp\left\{\int_a^x \frac{\sigma(y)}{b(y)}dy\right\}$ y $p(t) = \exp\{f(t)\}$, se tiene la siguiente expresión separable para $L(t,x)$,

$$L(t,x) = \pi(x)p(t) \tag{45}$$

Reemplazando en la ecuación (41) se tiene que:

$$\pi(x)p'(t) + a(x)\pi'(x)p(t) + \frac{b^2(x)}{2}\pi''(x)p(t) = r(x)\pi(x)p(t)$$

y al dividir toda la expresión por $\pi(x)p(t)$,

$$\frac{b^2(x)}{2}\frac{\pi''(x)}{\pi(x)} + a(x)\frac{\pi'(x)}{\pi(x)} - r(x) = -\frac{p'(t)}{p(t)} \tag{46}$$

Para una constante $\lambda \in \mathbb{R}$ con $\lambda = \frac{p'(t)}{p(t)}$ se tiene que:

$$\frac{b^2(x)}{2}\pi''(x) + a(x)\pi'(x) - r(x)\pi(x) = -\lambda\pi(x) \tag{47}$$

que es un problema de valores propios y funciones propias.

Teorema 5 (Teorema de recuperación de Carr y Yu). *La única solución válida de la ecuación (47) para la cual el correspondiente portafolio numerario es positivo es:*

$$\pi(x) = \phi(x) \quad ; \quad \lambda = \rho$$

donde:

1. *ρ: valor propio más pequeño del problema.*

2. *ϕ: función propia correspondiente al valor propio ρ.*

Demostración 5. *El problema planteado en (47) puede reescribirse como:*

$$\frac{b^2(x)}{2}\frac{1}{c(x)}\frac{\partial}{\partial x}\left[c(x)\frac{\partial\pi(x)}{\partial x}\right] - r(x)\pi(x) = -\lambda\pi(x) \tag{48}$$

con,

$$c(x) = \exp\left\{\int_a^x \frac{2a(y)}{b^2(y)}dy\right\}$$

y dividiendo (48) por $\frac{b^2(x)}{2c(x)}$ se tiene,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[c(x)\frac{\partial \pi(x)}{\partial x}\right] - q(x)\pi(x) = -\lambda\pi(x)w(x) \tag{49}$$

donde:

$$q(x) = \frac{2c(x)r(x)}{b^2(x)} \quad ; \quad w(x) = \frac{2c(x)}{b^2(x)}$$

y por las condiciones establecidas en los desarrollos anteriores se tiene que (49) es un problema regular de Sturm-Liouville. Es posible determinar numéricamente los valores y las funciones propias de este problema, los cuales se denotan como:

$$\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ... \to \infty$$

y sus correspondientes funciones propias son:

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ...$$

Sea $\phi(x) = y_1(x)$ y $\rho = \lambda_1$. Dado que $L(t,x)$ es positiva, de todas las funciones propias solo $\phi(x)$ es positiva y nunca cambia de signo, por tanto, $\phi(x)$ es la única función propia válida del problema (49) y el único valor propio válido es el correspondiente, es decir, ρ.

Como parte de los resultados previos al teorema se consideró que $\frac{p'(t)}{p(t)} = \lambda$, con $\lambda \in \mathbb{R}$. Al resolver se tiene que:

$$p(t) = p(0)e^{\lambda t} \tag{50}$$

Utilizando los resultados del teorema de recuperación de Carr y Yu, junto con (50), y dado que $L(t,x) = \pi(x)p(t)$ se tiene que:

$$L(t,x) = \phi(x)p(0)e^{\rho t} \tag{51}$$

Al sustituir (51) en la expresión (44) se tiene que:

$$\sigma(x) = b(x)\frac{\partial}{\partial x}\ln[\phi(x)p(0)e^{\rho t}] = b(x)\frac{\partial}{\partial x}\ln[\phi(x)]$$

y se encuentra una expresión para la función $\sigma(x)$. La dinámica del proceso director X_t bajo $\mathbb{P}$ se tiene por el teorema 4, y la derivada de Radon-Nikodym $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}}$ por:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = e^{-\int_0^T r_s ds} \frac{\phi(X_t)}{\phi(X_0)} e^{\rho T} \tag{52}$$

esto porque al utilizar el portafolio numerario como activo numerario se tiene que:

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{Q}} = \frac{S_0^0}{S_T^0} \frac{L(T, X_T)}{L(0, X_0)}$$

y al sustituir los resultados encontrados en los desarrollos anteriores se tiene entonces que la dinámica de X_t bajo $\mathbb{P}$ y la derivada de Radon-Nikodym son recuperadas.

2.3. Algunos comentarios sobre el modelo de Carr y Yu

El teorema de recuperación de Carr y Yu se desarrolla considerando una difusión acotada, pero como los mismos autores indican, su aplicación en el contexto de difusiones no acotadas es un tema abierto y objeto de investigación. En el trabajo de Tsui (2013) se investiga la aplicación de este teorema para el modelo de Black-Scholes y el modelo CIR. A continuación se reseña la aplicación del teorema y los resultados en el caso del modelo Black-Scholes.

2.3.1. El modelo Black-Scholes

El proceso director en el modelo Black-Scholes es el precio de los activos S_t, el cual sigue un movimiento Browniano geométrico bajo la medida de riesgo neutral. Se tiene entonces que

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad S_t \geq 0 \tag{53}$$

donde r y σ son constantes y $W_t^{\mathbb{Q}}$ es un movimiento Browniano estándar bajo $\mathbb{Q}$. Por facilidad en la presentación se asume que no hay dividendos y que $r = 0$, es decir

$$dS_t = \sigma S_t dW_t^{\mathbb{Q}} \quad S_t \geq 0 \tag{54}$$

y como el Browniano geométrico es un proceso no acotado, el análisis estándar de Carr y Yu no es aplicable.

Dado que $b^2(x) = \sigma^2 x^2$, $a(x) = r = 0$, de (47) se sigue que:

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2}\pi''(x) = -\lambda\pi(x) \quad \text{para todo } x \geq 0 \tag{55}$$

que es un problema de valores y funciones propias.

Dado que el proceso no es acotado existe infinitas soluciones para el problema (55) con $\pi(x) \geq 0$ para todo $x \geq 0$. Por ejemplo, si $\pi(x) = x^m$, entonces $\pi''(x) = m(m-1)x^{m-2}$, luego (55) es:

$$\frac{\sigma^2 x^2}{2} m(m-1)x^{m-2} = -\lambda x^m$$

de donde

$$m = \frac{\sigma^2 \pm \sqrt{\sigma^4 - 8\sigma^2\lambda}}{2\sigma^2}$$

Este problema tiene solución real m cuando $\sigma^4 - 8\sigma^2\lambda \geq 0$, es decir, $\lambda \geq \frac{8}{\sigma^2}$, que da infinitos posibles valores para λ. Para cada λ la función propia correspondiente es $\pi(x) = x^m$. Se puede ver que en este caso la medida de probabilidad real $\mathbb{P}$ no puede ser recuperada de forma única dado el conjunto de posibles valores de π.

3. Conclusiones y futura investigación

En este artículo se desarrollaron los elementos necesarios para entender y demostrar el teorema de recuperación de Ross y la extensión continua de Carr y Yu. Las aproximaciones consideradas en cada caso no siguen fielmente las expuestas por sus autores, pero facilitan la presentación y el entendimiento de los temas. Se enfatiza en la importancia de poder desarrollar aproximaciones a la distribución de probabilidad completa, bajo la medida de probabilidad real, para el precio de los activos tranzados en un mercado, con miras a la selección de activos para inversión o el desarrollo de estrategias de control del riesgo.

Se presentan algunas observaciones de cada modelo que buscan establecer nuevos frentes de investigación en este tema. En particular, para el teorema de recuperación de Ross se desarrolla la consideración del mismo como una cadena de Markov y se determina la forma de la distribución de estado estable del sistema. Se deja como objetivo de futuros trabajos revisar las implicaciones que sobre el modelo de mercado tiene dicha distribución. Para el caso del modelo de Carr y Yu, se presenta un ejemplo de los problemas que se tienen si el proceso director es no acotado, como es el caso del modelo Black-Scholes. Considerar formas de extender el resultados a este tipo de casos es, desde luego, una inquietud.

Para los dos modelos queda la cuestión de su implementación práctica. Sin descontar que ya se pueden encontrar publicaciones en las cuales se hace este tipo de ejercicios, siempre está presente la necesidad de complementar los resultados teóricos con elementos empíricos.

Referencias

Audrino, F., Huitema, R., y Ludwig, M. (2015). An empirical analysis of the Ross recovery theorem. Recuperado de SSRN: https://ssrn.com/abstract=2433170 o http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2433170.

Becherer, D. (2001). The numeraire portfolio for unbounded semimartingales. *Finance and Stochastics*, *5*(3), 327-341.

Birkhoff, G., y Rota, G. (1989). *Ordinary differential equations*. John Wiley & Sons.

Carr, P., y Yu, J. (2012). Risk, return, and ross recovery. *The Journal of Derivatives*, *20*(1), 38-59.

Dubynskiy, S., y Goldstein, R. S. (2013). Recovering drifts and preference parameters from financial derivatives. Recuperado de SSRN: https://ssrn.com/abstract=2244394 o http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.2244394.

Huang, D., y Shaliastovich, I. (2014). Risk adjustment and the temporal resolution of uncertainty: Evidence from options markets. Recuperado de SSRN: https://ssrn.com/abstract=2497756.

Karatzas, I., y Kardaras, C. (2007). The numéraire portfolio in semimartingale financial models. *Finance and Stochastics*, *11*(4), 447-493.

Long, J. B. (1990). The numeraire portfolio. *Journal of Financial Economics*, *26*(1), 29-69.

Martin, I., y Ross, S. (2013). The long bond. *London School of Economics and MIT (documento no publicado)*.

Meyer, C. D. (2000). *Matrix analysis and applied linear algebra* (Vol. 2). Siam.

Moreno Trujillo, J. F. (2012). *Valoración de activos contingentes y medidas martingala equivalentes*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Moreno Trujillo, J. F. M. (2015). *Modelos estocásticos en finanzas*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.

Ross, S. A. (2013). The recovery theorem. https://ssrn.com/abstract=2199487.

Ross, S. A. (2015). The recovery theorem. *The Journal of Finance*, *70*(2), 615-648.

Tsui, H. M. (2013). Ross recovery theorem and its extension. *Mathematical Finance*.