

Consistencia del ratio Omega con el criterio de dominancia estocástica de segundo orden: evaluación del desempeño de ETF

**Consistency of the Omega ratio with
second order stochastic dominance:
performance evaluation of ETFs**

Iván Leonardo Acosta Osorio*

* Consultor independiente. Magíster en Finanzas, Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [lacosta1302@gmail.com].

Artículo recibido el 05 de junio de 2018.

Aceptado el 24 de julio de 2018.

Para citar este artículo

Acosta Osorio, I. L. (2018). Consistencia del ratio Omega con el criterio de dominancia estocástica de segundo orden: evaluación del desempeño de ETF. ODEON, 14, pp. 99-130.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n14.05>

Introducción

Ante la presencia de múltiples y diversos vehículos de inversión al interior de las economías, existe un debate en curso con respecto a cómo comparar las diferentes oportunidades de inversión disponibles en los mercados. De acuerdo con la literatura, el enfoque tradicional de media-varianza, basado en la teoría de selección de portafolios Markowitz (1952), y el enfoque de dominancia estocástica (SD por sus siglas en inglés) introducido por Hadar y Russell (1969), Hanoch y Levy (1969) y Whitmore (1970) son los métodos frecuentemente utilizados para resolver el problema de la selección de activos bajo incertidumbre. El análisis de media-varianza aborda el problema a través de la estimación de los dos primeros momentos (la media y la varianza) de la distribución de retornos, mientras que el análisis de dominancia estocástica compara la distribución completa de los retornos y no requiere fuertes suposiciones acerca de la función de utilidad de los inversionistas.

Una de las medidas más populares en la medición de desempeño es el ratio de Sharpe (SR) introducido por Sharpe (1966), el cual funciona bien bajo el supuesto de que los rendimientos se encuentran normalmente distribuidos. Para Klar y Müller (2017), uno de los problemas con el ratio de Sharpe es que no es consistente con el criterio de dominancia estocástica de primer orden (FSD). Esto implica que un inversionista que maximiza el ratio de Sharpe puede tener una preferencia por una inversión A sobre una inversión B aun cuando sus rendimientos de seguro son inferiores. En palabras de los autores, esto es claramente un comportamiento irracional. Merton (1981) y Engle y Bollerslev (1986), citados por Caporin, Costola, Jannin y Maillet (2018), expresan que la pertinencia de utilizar esta medida de desempeño depende en gran medida de la precisión y la estabilidad de las estimaciones del primer y segundo momento. Además, la llamada “Paradoja $\mu - \sigma$ ” ilustra que el ratio de Sharpe no es consistente, en el sentido del criterio de dominancia estocástica de segundo orden (SSD), cuando las distribuciones de retorno no son gaussianas (Weston y Copeland, 1998; Hodges, 1998).

Según la literatura, la dominancia estocástica establece criterios de clasificación de variables aleatorias, cuyo objetivo es poder determinar que, para una determinada clase de individuos, una variable aleatoria es preferida a otra; asimismo, la dominancia estocástica proporciona reglas para clasificar entre dos distribuciones y se aplica a todas las funciones de utilidad crecientes. En particular, la dominancia estocástica de segundo orden es válida para todas las funciones

de utilidad cóncavas que incluyen todos los individuos aversos al riesgo, mientras que la dominancia estocástica de primer orden es aún más general, ya que se aplica a todas las funciones de utilidad, independientemente de sus formas (Fong, 2016).

A partir de las críticas realizadas a las medidas tradicionales de desempeño derivadas del análisis de media-varianza, en los últimos años, académicos y profesionales de la industria han propuesto criterios alternativos que pueden adaptarse a entornos más complejos que los gaussianos (Caporin *et al.*, 2018). El ratio Omega de Keating y Shadwick (2002) surge como uno de esos criterios alternativos para comparar el desempeño de diferentes oportunidades de inversión. Según los autores, el ratio Omega fue desarrollado para superar la insuficiencia de las medidas tradicionales de desempeño cuando se emplea en inversiones que no cuentan con distribuciones de retorno normalmente distribuidas y, a diferencia de otras medidas de desempeño, el ratio Omega incorpora toda la distribución de los retornos, y según la literatura, es consistente con SSD.

Balder y Schweizer (2017) aclaran cuándo el ratio Omega es consistente con SSD y cuándo no lo es. Asimismo, determinan condiciones suficientes para que el *ranking* propuesto por el ratio Omega esté en línea con el propuesto por SSD.

El objetivo del presente trabajo es medir el desempeño de ETF de renta variable del mercado norteamericano utilizando SSD y el ratio Omega como medida alternativa de desempeño; asimismo, con base en el trabajo de Balder y Schweizer (2017), se pretende ilustrar la consistencia del ratio Omega con SSD en la evaluación del desempeño de ETF, y responder a la pregunta: ¿Los ETF clasificados como superiores para todos los inversionistas aversos al riesgo no saciados (SSD) serán también clasificados como superiores utilizando el ratio Omega?

Este documento está dividido en cinco secciones. La sección 1 contiene los datos utilizados en la evaluación de desempeño de los ETF seleccionados para este ejercicio. Las secciones 2 y 3 describen la metodología desarrollada. La sección 4 describe los resultados del estudio empírico. Finalmente, en la sección 5 se presentan las conclusiones.

1. Datos

Los datos analizados en este estudio son los retornos diarios de los 5 ETF más representativos por totalidad de activos reportados por ETF Database | ETFdb, obtenidos de Bloomberg de nueve categorías definidas por tamaño y estilo de in-

versión (Large Cap Blend, Large Cap Growth, Large Cap Value, Mid Cap Blend, Mid Cap Growth, Mid Cap Value, Small Cap Blend, Small Cap Growth y Small Cap Value) agrupadas por tipo de activo (renta variable) del mercado norteamericano, para el periodo de muestra de enero de 2006 a diciembre de 2017. Adicionalmente, se incluyen tres índices de mercado tradicionales de renta variable, el S&P 500 Index, el S&P MidCap 400 Index y el S&P SmallCap 600 Index.

2. Metodología

2.1. Dominancia estocástica

Según los axiomas de von Neumann y Morgenstern (1953), citados por Almaraz (2009), de manera intuitiva, un individuo no saciable y con aversión al riesgo prefiere aquel activo que le dé mayor utilidad esperada.

De acuerdo con lo enunciado por la autora, en la literatura existen distintos criterios basados en las propiedades estocásticas de los retornos (o de las funciones de probabilidad de los retornos) que le aseguren al individuo la elección del activo que le proporcione mayor utilidad esperada. Estos criterios de comparación son conocidos como criterios de dominancia estocástica de primer orden (FSD), de segundo orden (SSD), introducidos por Hadar y Russell (1969), Hanoch y Levy (1969) y de tercer orden (TSD), introducido por Whitmore (1970), los cuales se relacionan con el nivel del retorno y con la dispersión o variabilidad del mismo.

Un activo es dominante desde el punto de vista estocástico si el individuo recibe mayor riqueza con este activo que con cualquier otro que se le presente (Almaraz, 2009).

Sean F y G las funciones de distribución acumulada de los activos de riesgo X y Y , respectivamente (sin pérdida de generalidad se supone que el soporte es el intervalo $[0; 1]$) donde:

$$F(x) = P[r_X \leq x] = \int_0^x f(z)dz,$$

$$G(x) = P[r_Y \leq x] = \int_0^x g(z)dz,$$

donde: r_X y r_Y son los rendimientos de los activos X y Y , y f y g sus funciones de densidad, respectivamente.

La dominancia estocástica es caracterizada a través de criterios mínimos sobre las propiedades estocásticas de los retornos que nos aseguren que:

$$E_F[U(r_X)] \geq E_G[U(r_Y)]$$

con $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ función no decreciente, o escrito de otra forma, el activo X domina estocásticamente a Y si para toda función no decreciente $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se cumple:

$$\int_0^1 U(x)dF(x) \geq \int_0^1 U(x)dG(x)$$

2.1.1. Dominancia estocástica de primer orden

El criterio de dominancia estocástica de primer orden corresponde a la noción estocásticamente menos fuerte y clasifica los activos riesgosos de forma consistente para individuos que prefieren más a menos riqueza (Almaraz, 2009). Lo que implica $U' > 0$.

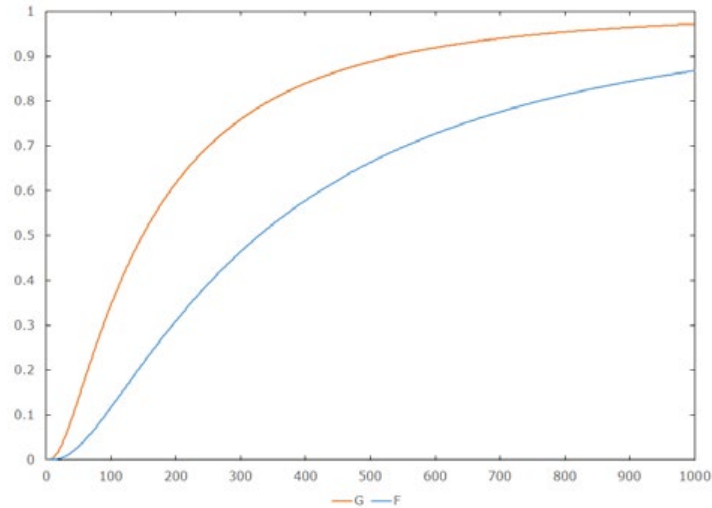
El activo X domina estocásticamente en primer orden a Y , y se denota $X \succeq_{\text{FSD}} Y$ si

$$F(x) \leq G(x) \tag{1}$$

para todo $x \in \mathbb{R}$ y con al menos un x_0 en el que la desigualdad sea estricta.

Dicho de otra forma, la función de distribución acumulada del activo Y (G) siempre se va a encontrar a la izquierda de la función de distribución acumulada del activo X (F) y no se van a cruzar entre sí (figura 1).

Figura 1: Dominancia estocástica de primer orden



Fuente: elaboración propia.

La condición anterior puede reescribirse como (Levy, 2016):

$$1 - F(x) \geq 1 - G(x)$$

Esto significa que la probabilidad de obtener cualquier valor va a ser mayor para el activo X cuya función de distribución acumulada es F , que para el activo Y cuya función de distribución acumulada es G .

Esta definición supone aversión al riesgo por parte del inversionista y quiere decir que se preferirá al activo X , pues acumula menor probabilidad en la cola izquierda de la distribución, que es la menos desfavorable, sin importar la renuncia a un mejor rendimiento (Almaraz, 2009).

2.1.2. Dominancia estocástica de segundo orden

El criterio de dominancia estocástica de segundo orden clasifica a los individuos que prefieren más a menos riqueza ($U' > 0$) y son aversos al riesgo ($U'' < 0$). En este particular el individuo se preocupa por la dispersión del retorno (Almaraz, 2009).

Sean X y Y dos pagos¹ integrables de valor real con medias μ_X y μ_Y . Se

¹ Balder y Schweizer (2017) no asumen que los pagos se distribuyan continuamente.

denota $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ para indicar que X (débilmente) domina estocásticamente en segundo orden a Y . Balder y Schweizer (2017) definen para un número real K las expresiones:

$$P_X(K) = E[(K - X)^+] \quad \text{y} \quad C_X(K) = E[(X - K)^+],$$

y análogamente P_Y y C_Y , donde $(\cdot)^+$ denota la parte positiva y E el operador de esperanza. Las letras P y C enfatizan que estas cantidades se pueden interpretar como pagos esperados de opciones *put* y *call* con *strike* K .

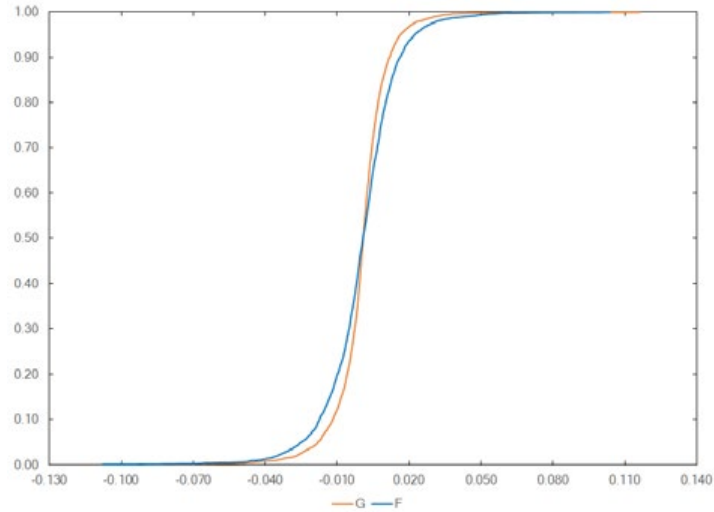
El activo X domina estocásticamente en segundo orden a Y , y se denota $X \succeq_{\text{SSD}} Y$, si $E[U(X)] \geq E[U(Y)]$ se cumple para cualquier función cóncava creciente U . $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ significa que cualquier agente maximizador de utilidad esperada averso al riesgo prefiere a X sobre Y . $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ implica $\mu_X \geq \mu_Y$. Además, los autores sostienen que al utilizar la expresión $-(K - x)^+$, de acuerdo con el orden cóncavo creciente (Shaked y Shanthikumar, 2007), la función es creciente y cóncava en x , y se puede ver que $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ implica $P_X(K) \leq P_Y(K)$ para todos los K . De hecho, según los autores, las siguientes equivalencias son válidas: $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ es equivalente a $P_X(K) \leq P_Y(K)$ para todo K y equivalente a

$$\int_{-\infty}^K F(x)dx \leq \int_{-\infty}^K G(x)dx \quad \text{para todo } K \in \mathbb{R} \quad (2)$$

donde: F denota la función de distribución acumulada de X y G la función de distribución acumulada de Y ².

² De acuerdo con los autores, la equivalencia de $X \succeq_{\text{SSD}} Y$ y (2) es bien conocida. Para la equivalencia entre (2) y $P_X(K) \leq P_Y(K)$, por ejemplo, ver el capítulo 4.A Shaked y Shanthikumar (2007), donde SSD es llamado el “orden cóncavo creciente”.

Figura 2: Dominancia estocástica de segundo orden



Fuente: elaboración propia.

2.2. Dominancia estocástica: cuantiles de la distribución

El análisis de dominancia estocástica puede ser abordado desde un enfoque diferente a las funciones de distribución acumuladas. Levy (2016) reformula las reglas de dominancia estocástica en términos de cuantiles de la distribución en lugar de distribuciones acumuladas, lo cual aplica para los dos primeros criterios (FSD y SSD), pero no para el tercero (TSD).

El autor demuestra que las reglas basadas en cuantiles conducen a la misma relación de dominancia que aquellas basadas en distribuciones acumuladas y, por tanto, también son óptimas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que, si bien el cambio de distribuciones acumuladas a cuantiles es legítimo con FSD y SSD, este no es el caso con TSD y las reglas de dominancia estocástica superiores, donde solo las fórmulas acumulativas son correctas.

Se denota por $Q_F(P)$ y $Q_G(P)$ a los cuantiles de orden P de las distribuciones F y G , respectivamente.

Para el caso de FSD se dirá que la distribución F domina a la distribución G si y solo si

$$Q_F(P) \geq Q_G(P) \quad (3)$$

con desigualdad estricta para al menos un valor de P.

Y para el caso de SSD se dirá que la distribución F domina a la distribución G si y solo si

$$\int_0^P [Q_F(t) - Q_G(t)] dt \geq 0 \quad (4)$$

para todo P, con desigualdad estricta para al menos algún valor P.

2.3. El ratio Omega

En la literatura, el ratio Omega es categorizado como una medida de desempeño basada en momentos parciales inferiores (LPM por sus siglas en inglés). Los LPM miden el riesgo considerando solo las desviaciones que caen por debajo de un umbral definido previamente (*ex-ante*). Esto puede ser la media de la distribución u otro tipo de rendimiento mínimo (Wiesinger, 2010). De acuerdo con Kaplan y Knowles (2004), citados por Wiesinger (2010), un LPM de orden m se puede estimar empíricamente a partir de una muestra de n retornos utilizando la fórmula para observaciones discretas presentada a continuación

$$LPM_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max[\tau - r_i; 0]^m, \quad (5)$$

donde: r_i es una realización de retorno única y τ es el umbral mínimo de retorno o retorno mínimo aceptable (MAR, por sus siglas en inglés).

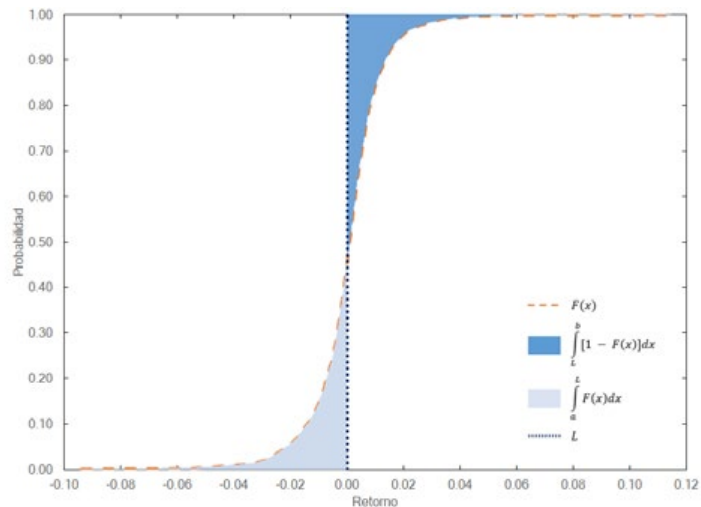
Según Wiesinger (2010), la principal ventaja de medir el riesgo con LPM es que no se necesitan suposiciones paramétricas (por ejemplo, en la media y la desviación estándar) y que no hay restricciones en la forma de la distribución subyacente (Keating y Shadwick, 2002).

De acuerdo con la categorización propuesta por Kaplan y Knowles (2004), en relación con el orden de LPM (1^{er}, 2^o y 3^{er}), la primera medida de rendimiento basada en LPM es Omega, introducida por Keating y Shadwick (2002), la cual se define como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx}, \quad (6)$$

donde: x es la tasa de retorno aleatorio de un periodo, $F(x)$ es la distribución acumulada del retorno de un periodo, L es un umbral de rendimiento mínimo y (a, b) representan los límites superior e inferior de la distribución de retorno, respectivamente (Kazemi, Schneeweis y Gupta, 2004). Omega es definido como el ratio de la probabilidad ponderada de ganancias frente a pérdidas (López de Prado e Illera, 2004), en otras palabras, es el ratio del área a la derecha del umbral y por encima de $F(x)$, sobre el área a la izquierda del umbral y por debajo de $F(x)$ (figura 3).

Figura 3: Ilustración gráfica del ratio Omega



Fuente: elaboración propia.

El ratio Omega utiliza la función de distribución acumulada $F(x)$ de los retornos obtenidos con la estrategia y un umbral L , a partir del cual se delimitan las áreas de ganancia y pérdidas esperadas. Un ratio mayor indica que el activo proporciona más ganancias en relación con las pérdidas para un umbral L , por lo que sería preferible para un inversionista.

Omega otorga una calificación superior a aquellas carteras que, para un nivel de rendimiento objetivo dado L , reservan una masa probabilística mayor, más allá de dicho nivel de rendimiento, siempre que no sea a costa de incurrir en pérdidas extremas (López de Prado e Illera, 2004). Según los autores, la mayor diferencia entre ésta y las medidas tradicionales como Sharpe, Treynor, Jensen,

ratio de ganancias-pérdidas de Bernardo Ledoti, es que Omega no es un estadístico o variable muestral, sino una función de transformación monótona, afín y característica de la distribución de densidad de rendimientos, lo que la convierte en una medida óptima para calificar el desempeño de inversiones. Los autores reescriben Omega como:

$$\Omega(L) = \frac{\int_L^b [1 - F(x)] dx}{\int_a^L F(x) dx} = \frac{\int_L^b \left[1 - \int_L^b f(x) dx \right] dx}{\int_a^L \left[\int_a^L f(x) dx \right] dx} \quad (7)$$

donde: F es la función de distribución y f es la función de densidad de la variable aleatoria x de retornos netos.

Aquí, la integral simple sobre la función de distribución es equivalente a una doble integración sobre la función de densidad, lo que implica que se tiene en cuenta cómo se distribuye la probabilidad de pérdidas y ganancias respecto al umbral (no solo su valor absoluto) (López de Prado e Illera, 2004).

Kazemi *et al.* (2004), citados por Wiesinger (2010), afirman que Omega no es un concepto totalmente nuevo en finanzas, ya que el ratio Omega puede ser expresado como un cociente de opciones, en el que el numerador corresponde al precio de una opción *call* europea C y el denominador al precio de una opción *put* europea P . Según Kazemi *et al.* (2004), el numerador de Omega representa el “costo” de adquirir el rendimiento por encima de un umbral, y el denominador representa el “costo” de proteger el rendimiento por debajo del umbral. Por tanto, según los autores, parece razonable utilizar el ratio como una medida de riesgo-retorno de una inversión. Lo anterior produce la siguiente expresión siendo τ el precio de ejercicio de la opción *put*.

$$\Omega(\tau) = \frac{C(\tau)}{P(\tau)} = \frac{E[\max(x - \tau; 0)]}{E[\max(\tau - x; 0)]} \quad (8)$$

El precio de la opción *put* puede interpretarse como el LPM de orden 1 (Wiesinger, 2010). Transformaciones adicionales³ conducen a la expresión presentada a continuación. En esta versión, que claramente se asemeja al ratio de Sharpe original, el autor indica que Omega es la relación entre el exceso de retorno sobre un umbral τ y el LPM de orden 1:

³ El detalle de estas transformaciones puede verse en el Apéndice de Kazemi *et al.* (2004).

$$\Omega_x(\tau) = \frac{\bar{x} - \tau}{\text{LPM}_1(\tau)} + 1 \quad (9)$$

donde: \bar{x} es la tasa de retorno esperada de la inversión.

La anterior expresión proporciona la misma información que la medida Omega y siempre produce el mismo *ranking* de inversiones que Omega ofrece. Para Kazemi *et al.* (2004), la principal ventaja de la versión transformada es que es más intuitiva ya que se asemeja al ratio de Sharpe en su estructura y es la razón por la cual los autores se refieren a la primera parte de la expresión como el ratio Sharpe-Omega.

De acuerdo con Balder y Schweizer (2017), y en concordancia con lo planteado por Kazemi *et al.* (2004) anteriormente, el ratio Omega puede interpretarse como una medida de riesgo-retorno. El retorno se mide como la ganancia esperada por encima de cierto umbral, mientras que el riesgo se mide como la pérdida esperada por debajo del mismo umbral. Dado que solo las desviaciones adversas del umbral contribuyen al componente de riesgo del ratio Omega, esta medida es particularmente atractiva para situaciones donde la distribución de retorno es fuertemente asimétrica. A juicio de los autores, esto difiere con el ratio de Sharpe que mide el riesgo por la desviación estándar y, por tanto, no diferencia entre las desviaciones ascendentes y descendentes del *benchmark*, suponiendo implícitamente que son de la misma magnitud.

Considerando algún pago X con media μ y desviación estándar σ , para cualquier número real K , los autores definen un ratio de Sharpe generalizado con umbral K , $S_K(X)$, por

$$S_K(X) = \frac{\mu - K}{\sigma}.$$

Asimismo, y de acuerdo con lo establecido en 2.1.2, los autores definen el ratio Omega Ω_K de X con umbral K , por

$$\Omega_K(X) = \frac{C_X(K)}{P_X(K)} = 1 + \frac{\mu_X - K}{P_X(K)} \quad (10)$$

donde las letras P y C enfatizan que estas cantidades se pueden interpretar como pagos esperados de opciones *put* y *call* con *strike* K . La segunda igualdad se deriva de la “paridad *put-call*”

$$C_X(K) = P_X(K) + \mu_X - K$$

que resulta de la identidad $(X - K)^+ = (K - X)^+ + X - K$. El ratio Omega no es negativo. Toma los valores 0 o $+\infty$ cuando $C_X(K) = 0$ o $P_X(K) = 0$. El ratio es mayor que uno cuando $\mu_X > K$ y menor que uno cuando $\mu_X < K$. Para $\mu_X = K$, se tiene $\Omega_K(X) = 1$. En particular, el único caso donde $C_X = 0$ y $P_X = 0$ se cumplen simultáneamente es cuando $X = K$ se cumple casi seguramente. Los autores extienden la definición a este caso estableciendo $\Omega_K(K) = 1$. Se dice que X domina a Y en el sentido del ratio Omega con umbral K , $X \succeq_K Y$, siempre que $\Omega_K(X) \geq \Omega_K(Y)$.

Según los autores, la idea detrás de este *ranking* es interpretar el ratio de valores *call* y *put* como un ratio de ganancias a pérdidas. Por tanto, un mayor valor de Ω_K es interpretado como un signo de mejor desempeño. La segunda formulación en (10) muestra que, si se omite la constante 1, el ratio Omega también se puede ver como una variación del ratio de Sharpe donde la desviación estándar se reemplaza por una medida de riesgo unilateral, las desviaciones esperadas por debajo de K .

3. Consistencia del ratio Omega con SSD

Balder y Schweizer (2017) recientemente publicaron un artículo en el que aclaran cuándo el ratio Omega es consistente con SSD y cuándo no lo es. El artículo establece que, para evitar problemas de consistencia, el parámetro umbral en el ratio debe elegirse como el rendimiento esperado de algún *benchmark*, como suele hacerse en el ratio de Sharpe. Cuando el ratio es inferior a uno, su valor debe descartarse, al igual que un ratio de Sharpe negativo.

De acuerdo con los autores, en ciertas ocasiones la literatura afirma que una de las ventajas del ratio Omega con relación al ratio de Sharpe es que es consistente con SSD. Según los autores, la consecuencia más importante de esta propiedad es que cuando cualquier inversionista averso al riesgo prefiere un pago potencial sobre otro, entonces este pago también exhibe un mayor Omega.

Asimismo, Balder y Schweizer (2017) proporcionan una condición suficiente para que SSD y el ratio de Omega sean consistentes: al elegir entre más de dos pagos, un pago que es dominante en SSD también tiene el ratio Omega más alto, siempre que, al menos un pago en el set de elección tenga un valor esperado por encima del parámetro umbral elegido en el ratio.

Los autores proporcionan una visión general completa e independiente de las propiedades de consistencia de Omega con un énfasis en los problemas potencia-

les y una visión hacia las aplicaciones. En este último aspecto, los dos mensajes principales de su trabajo son los siguientes:

1. Al clasificar oportunidades de inversión, el ratio Omega debe aplicarse cuidadosamente. Hay una regla simple que caracteriza este comportamiento cuidadoso: los ratios Omega inferiores a uno deben descartarse antes de la clasificación.
2. Uno de los principales atractivos del ratio Omega en comparación con el ratio de Sharpe es que permite trazar *rankings* para distintos niveles de aversión al riesgo a través de la variación del umbral.

Según Balder y Schweizer (2017), su trabajo presenta un espíritu más cercano a las intenciones normativas (en lugar de conductuales) de Keating y Shadwick (2002), en el cual identifican criterios de decisión adecuados para agentes aversos al riesgo que capturan variaciones en el grado de aversión, manteniendo la simplicidad del ratio de Sharpe. Si bien no siguen a Keating y Shadwick (2002) hasta el punto de ver a Omega como un reemplazo adecuado para la teoría de la utilidad, sí están de acuerdo en que a menudo el impacto de la aversión al riesgo en las decisiones es lo suficientemente simple como para ser modelado por un solo parámetro.

Con el fin de estudiar la consistencia de SSD con el ratio Omega, la pregunta principal que se plantean los autores es si un *ranking* en SSD implica un *ranking* en el ratio Omega, en otras palabras, si el ratio Omega recomienda todas las decisiones con las que todos los agentes aversos al riesgo pueden estar de acuerdo, afirmación que pretende ser ilustrada en el presente trabajo por medio de un ejercicio empírico en el que se evalúe el desempeño de ETF de renta variable del mercado norteamericano. La respuesta, de acuerdo con los mismos, va a depender de *la relación entre el umbral K y las medias μ_X y μ_Y* .

La consistencia de SSD con el ratio Omega es planteada por Balder y Schweizer (2017) a través de las siguientes proposiciones:

Proposición 1. (*Proposición 1 en Balder y Schweizer, 2017*) Suponga que $X \succeq_{SSD} Y$ y $\mu = \mu_X = \mu_Y$.

- (i) Cuando $K \leq \mu$, entonces se tiene $X \succeq_K Y$.
- (ii) Cuando $K \geq \mu$, entonces se tiene $Y \succeq_K X$.

Para ver esto, basta con considerar el lado derecho de (10), teniendo en cuenta la relación $P_X(K) \leq P_Y(K)$ y el signo de $\mu - K$.

Para completar el cuadro de $\mu_X \neq \mu_Y$, se debe recordar primero que $X \succeq_{SSD} Y$ implica $\mu_X \geq \mu_Y$. Lo anterior lleva a tres casos, dependiendo de si K se encuentra entre estos dos valores, por encima de ambos valores o por debajo de ambos valores. En el caso final, según los autores, se obtiene nuevamente un resultado claro:

Proposición 2. (*Proposición 2 en Balder y Schweizer, 2017*) Suponga que $X \succeq_{SSD} Y$ y $\mu_X > \mu_Y \geq K$. Entonces se tiene $X \succeq_K Y$.

En este caso, $X \succeq_K Y$ es equivalente a

$$\frac{P_Y(K)}{P_X(K)} \geq \frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K},$$

En el siguiente caso, donde $\mu_X \geq K \geq \mu_Y$, resulta que $\Omega_K(X) \geq 1$ mientras que $\Omega_K(Y) \leq 1$. Por tanto, existe un claro *ranking* sin siquiera requerir $X \succeq_{SSD} Y$.

Proposición 3. (*Proposición 3 en Balder y Schweizer, 2017*) Suponga que $\mu_X \geq K \geq \mu_Y$. Entonces se tiene $X \succeq_K Y$.

Por tanto, de forma similar al ratio de Sharpe, el ratio Omega divide los pagos en pagos con una media superior o inferior a K . Aquellos con media superior a K se clasifican como superiores a los de media inferior, independientemente de su riesgo. Cuando K es igual al retorno de un pago de un *benchmark*, esta división separa los pagos con exceso de retorno positivo (en comparación con el *benchmark*) de los pagos con exceso de retorno negativo.

Finalmente, está el caso donde $K > \mu_X > \mu_Y$. Aquí, de acuerdo con los autores, no se puede inferir un *ranking* de $\Omega_K(X)$ y $\Omega_K(Y)$ de asumir $X \succeq_{SSD} Y$. $X \succeq_K Y$ es equivalente a

$$\frac{P_Y(K)}{P_X(K)} \leq \frac{K - \mu_Y}{K - \mu_X},$$

y todo lo que $X \succeq_{SSD} Y$ implica es que ambos lados de la desigualdad son mayores que 1.

4. Resultados

Con el objetivo de ilustrar las afirmaciones hechas en la literatura en relación con la consistencia del ratio Omega con SSD en la selección de activos bajo incertidumbre, hemos medido y evaluado el desempeño de un conjunto de ETF del mercado norteamericano. La razón por la cual se seleccionó este instrumento como objeto del presente estudio obedece a la relevancia que han cobrado estos instrumentos en los mercados financieros internacionales y a la variedad de características en cuanto a diversidad de estrategias, volúmenes negociados, accesibilidad e información disponible. Hemos considerado tres escenarios diferentes en nuestro análisis, para lo cual se definieron los umbrales ($K1$, $K2$ y $K3$) a partir de los índices de mercado descritos en 1 y los ocho ETF más representativos del estudio con $\Omega's \geq 1$, dentro de los que se encuentran los cuatro fondos con las mejores posiciones en los *rankings* de SSD y Omega, y que además son consistentes entre sí (escenario 1, 2 y 3), tres fondos cuyas posiciones no son consistentes en los *rankings* de SSD y Omega (escenario 1) y el fondo con la última posición en el *ranking* de SSD y Omega (escenario 1). Información presentada en la tabla 1.

Tabla 1: Índices de mercado y ETF seleccionados

Instrumento	Descripción
Índice de mercado 1 (K1)	S&P 500 Index
Índice de mercado 2 (K2)	S&P MidCap 400 Index
Índice de mercado 3 (K3)	S&P SmallCap 600 Index
ETF 6 QQQ US Equity	Large Cap Growth
ETF 7 IWF US Equity	Large Cap Growth
ETF 22 IJK US Equity	Mid Cap Growth
ETF 23 MDYG US Equity	Mid Cap Growth
ETF 29 JKI US Equity	Mid Cap Value
ETF 35 SLY US Equity	Small Cap Blend
ETF 36 IWO US Equity	Small Cap Growth
ETF 38 IJT US Equity	Small Cap Growth

Fuente: elaboración propia.

Los resultados presentados en este estudio abordan, en primer lugar, la com-

probación de SSD de los ETF seleccionados a través del enfoque de cuantiles; en segundo lugar, la construcción de *rankings* a partir de Omega para los tres escenarios ($K1$, $K2$ y $K3$) y, finalmente, la consistencia de los *rankings* propuestos por SSD y Omega.

4.1. Comprobación SSD: cuantiles de la distribución

Conforme a lo descrito en 2.2, el análisis de dominancia estocástica puede ser caracterizado a través de los cuantiles de la distribución. La comprobación de SSD en este tipo de análisis se efectúa a través de la implementación de un algoritmo de comprobación de SSD, el cual permite comprobar si dadas dos muestras, una domina a la otra en sentido de SSD. Según la literatura, el primer algoritmo de comprobación de FSD y SSD fue desarrollado por Levy y Hanoch (1970).

4.1.1. Algoritmo de comprobación SSD

Sean X y Y dos variables aleatorias de distribuciones F y G , respectivamente, de las cuales se obtienen muestras de tamaño n : $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Una vez obtenidas las muestras de tamaño n , los n elementos de cada muestra son ordenados de menor a mayor de manera que:

$$\begin{aligned}x_1 &\leq x_2 \leq \dots \leq x_n \\y_1 &\leq y_2 \leq \dots \leq y_n\end{aligned}$$

Seguidamente, se asigna una probabilidad de $1/n$ a cada observación (si hay dos observaciones idénticas, se sitúa una detrás de la otra y se asigna una probabilidad de $1/n$ a cada una) y se construyen las secuencias $\{X'_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ e $\{Y'_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} X'_1 = x_1 \\ X'_2 = x_1 + x_2 \\ \vdots \\ X'_i = \sum_{j=1}^i x_j \\ \vdots \\ X'_n = \sum_{j=1}^n x_j \end{array} \right. \quad \text{y} \quad \left\{ \begin{array}{l} Y'_1 = y_1 \\ Y'_2 = y_1 + y_2 \\ \vdots \\ Y'_i = \sum_{j=1}^i y_j \\ \vdots \\ Y'_n = \sum_{j=1}^n y_j \end{array} \right.$$

Finalmente, se comprueba la existencia de SSD. F (o X) domina a G (o Y) según SSD si y solo si $X'_i \geq Y'_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$ y existe al menos una desigualdad estricta.

4.1.2. Resultados comprobación SSD

La comprobación por pares de los ocho ETF seleccionados para el análisis se efectuó a través de la utilización del algoritmo de comprobación de SSD descrito anteriormente. Los resultados de los fondos evaluados se presentan en la tabla 2.

Tabla 2: Comparación por pares de ETF | Algoritmo de comprobación de SSD

	ETF 6 QQQ	ETF 7 IWF	ETF 22 IJK	ETF 23 MDYG	ETF 29 JKI	ETF 35 SLY	ETF 36 IWO	ETF 38 IJT	DOMINA
ETF 6 QQQ		\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	7
ETF 7 IWF	\prec_2		\prec_2	\prec_2	\succ_2	\succ_2	\prec_2	\prec_2	2
ETF 22 IJK	\prec_2	\succ_2		\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\prec_2	5
ETF 23 MDYG	\prec_2	\succ_2	\prec_2		\succ_2	\succ_2	\succ_2	\prec_2	4
ETF 29 JKI	\prec_2	\prec_2	\prec_2	\prec_2		\prec_2	\prec_2	\prec_2	0
ETF 35 SLY	\prec_2	\prec_2	\prec_2	\prec_2	=		\prec_2	\prec_2	0
ETF 36 IWO	\prec_2	\succ_2	\prec_2	\prec_2	\succ_2	\succ_2		\prec_2	3
ETF 38 IJT	\prec_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2	\succ_2		6
DOMINADO	0	5	2	3	6	6	4	1	

Fuente: elaboración propia.

Los resultados en esta tabla se leen de acuerdo con la información contenida en las filas frente a la información contenida en las columnas. Por ejemplo, la celda " \succ_2 " en la tercera fila (ETF 22 IJK) y la segunda columna (ETF 7 IWF), nos dice que el ETF 22 (IJK) domina estocásticamente en segundo orden al ETF 7 (IWF), mientras que la celda "=" en la sexta fila (ETF 35 SLY) y la quinta columna (ETF 29 JKI), nos dice que no hay dominancia estocástica entre el ETF 35 (SLY) y el ETF 29 (JKI).

Tabla 3: *Ranking* de ETF según algoritmo de comprobación de SSD

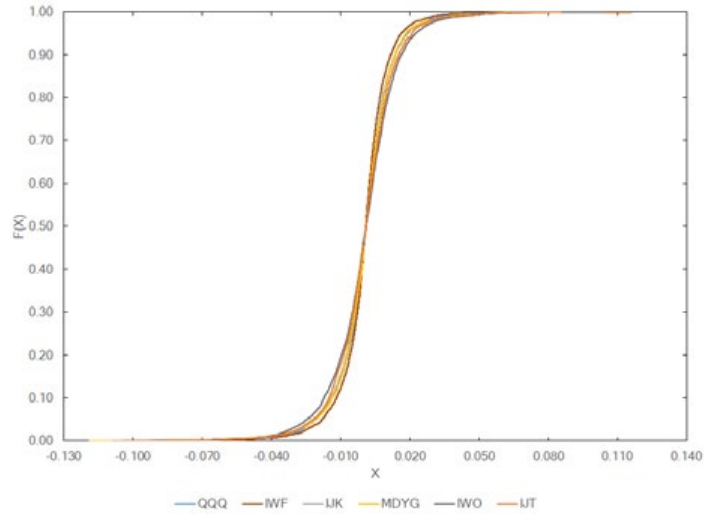
Fondo	μ	Domina	Dominado por	<i>Ranking</i> SSD
ETF 6 QQQ	0,000440	31	0	1
ETF 7 IWF	0,000316	22	9	10
ETF 22 IJK	0,000342	29	2	3
ETF 23 MDYG	0,000336	28	3	4
ETF 29 JKI	0,000251	0	30	32
ETF 35 SLY	0,000294	3	19	28
ETF 36 IWO	0,000320	25	6	7
ETF 38 IJT	0,000350	30	1	2

Fuente: elaboración propia.

La tabla 3 contiene los resultados de la comparación por pares efectuada a través del algoritmo de comprobación de SSD y el *ranking* según SSD de los ocho ETF evaluados. Del total de los 45 fondos seleccionados para el estudio, el análisis de SSD tuvo en cuenta los 32 ETF con Ω 's ≥ 1 , resultantes de la evaluación bajo el escenario 1, es decir, con umbral ($K1 = 0,00025$), el cual corresponde a la media de los retornos diarios del índice de mercado S&P 500 Index, umbral con mayor número de fondos por evaluar.

Según los resultados presentados en la tabla 2, la mejor opción para un inversionista averso al riesgo no saciado sería el ETF 6 (QQQ), ya que domina otros 31 fondos en segundo orden y no es dominado por ningún otro fondo. Asimismo, se puede observar que la opción menos favorable para un inversionista averso al riesgo no saciado sería el ETF 29 (JKI) ya que no domina a ningún otro fondo y está dominado en segundo orden por 30 fondos más. La segunda, tercera y cuarta mejor opción para esta clase inversionista sería el ETF 38 (IJT), el ETF 22 (IJK) y el ETF 23 (MDYG), respectivamente.

Figura 4: Funciones de distribución acumulada de ETF según SSD

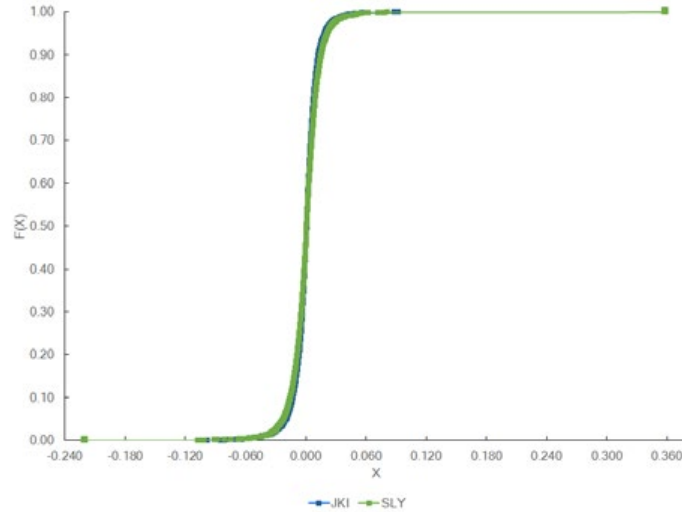


Fuente: elaboración propia.

Las distintas funciones de distribución acumuladas de los fondos evaluados en nuestro estudio son presentadas en la figura 4. En esta encontramos los ETF: 6 (QQQ), 7 (IWF), 22 (IJK), 23 (MDYG), 36 (IWO) y 38 (IJT), fondos que ocupan la 1ª, 10ª, 3ª, 4ª, 7ª y 2ª posición, respectivamente, en el *ranking* según SSD.

Como caso particular, en la figura 5 encontramos el ETF 35 (SLY), el cual ocupa la posición 28 en el *ranking* según SSD; la función de distribución acumulada de este fondo presenta valores extremos (-0,220 y 0,359) con relación a los otros siete fondos evaluados, y esto obedece a que el 18-sep-2008, el precio de cierre de este instrumento presentó un fuerte incremento en el valor de su cotización, el cual pasó de 53,1 a 76 del 17 al 18 de septiembre, y corrigió de 76 a 61 del 18 al 19 del mismo mes; esto representa unas variaciones de 35,86 % y -21,99 %, respectivamente.

Figura 5: Funciones de distribución acumulada ETF JKI y SLY según SSD



Fuente: elaboración propia.

La comparación por pares efectuada a través del algoritmo de comprobación de SSD mostró que en 9 de las 31 comparaciones llevadas a cabo no se presentó dominancia estocástica entre el ETF 35 (SLY) y sus pares evaluados, dentro de los que se encuentra el ETF 29 (JKI), fondo que ocupa la posición 32 en el *ranking* según SSD y contra el cual se hace la comparación en la figura 5.

Al momento de validar la existencia de SSD por medio del algoritmo de comprobación, se identificó que el valor extremo positivo de (0,359) en el ETF 35 (SLY), contribuyó a que en 9 de las 31 comparaciones anteriormente descritas, el fondo cumpliera con la primera condición para comprobar SSD, en la que F (o X) domina a G (o Y) según SSD si y solo si $X'_i \geq Y'_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$, pero no cumplió con la segunda condición en la que se exige que exista al menos una desigualdad estricta, razón por la cual no se presentó dominancia estocástica en estos 9 casos.

Tabla 4: Momentos muestrales de distribución de retornos de ETF

	Media	Desv. Std.	Asimetría	Curtosis
ETF 6 QQQ	0,000440	0,012898	-0,125461	7,632761
ETF 7 IWF	0,000316	0,011642	-0,258360	10,520812
ETF 22 IJK	0,000342	0,013510	-0,557571	7,059355
ETF 23 MDYG	0,000336	0,013660	-0,583850	8,361088
ETF 29 JKI	0,000251	0,013389	-0,563672	8,471159
ETF 35 SLY	0,000294	0,016504	2,216920	87,293775
ETF 36 IWO	0,000320	0,015377	-0,281088	4,947927
ETF 38 IJT	0,000350	0,014199	-0,385484	5,407033

Fuente: elaboración propia.

Otra forma de ilustrar lo anteriormente descrito es a través de la descomposición de los primeros cuatro primeros momentos de la distribución de retornos para cada uno de los ETF evaluados. Como se observa en la tabla 4, la distribución de retornos del ETF 35 (SLY) presenta un coeficiente de asimetría positivo de 2.216920 en relación con los demás fondos evaluados que presentan coeficientes de asimetría negativos, lo cual nos indica que la distribución está sesgada hacia la derecha, es decir, retornos positivos.

En cuanto al cuarto momento de la distribución de los retornos, se puede observar que el ETF 35 (SLY) presenta un coeficiente de curtosis de 87.293775, significativamente mayor al de los demás fondos evaluados, lo cual refleja una mayor densidad de este instrumento hacia los extremos de la distribución, lo que significa que los retornos presentes en los extremos son más frecuentes y está en concordancia con lo expuesto como caso particular en la figura 5.

4.2. Resultados ratio Omega

Conforme a lo descrito en 2.3, el ratio Omega es categorizado por la literatura como una medida de desempeño que puede ser expresada en términos de momentos parciales inferiores (9), de distribuciones acumuladas de retornos (6) o como un cociente de opciones (10). Para el cálculo de Omega en este estudio decidimos apoyarnos, en primer lugar, en el uso del paquete PerformanceAnalytics de R, el cual calcula Omega como un cociente de opciones, y en segundo lugar y con el objetivo de verificar y contrastar los resultados arrojados en R, decidimos

apoyarnos en el uso de la función *lpm* (lower partial moments) de MATLAB®), la cual calcula Omega a través de momentos parciales. A partir de los índices de mercado descritos en 1, hemos considerado tres escenarios diferentes para el cálculo de Omega.

El **escenario 1** corresponde a los fondos evaluados con umbral $K1 = 0,00025$, parámetro definido como la media de los retornos diarios del índice de mercado S&P 500 Index. Del total de los 45 ETF considerados en este estudio, el escenario 1 agrupa los 32 fondos con Ω 's ≥ 1 resultantes del cálculo de Omega con umbral $K1$. La tabla 5 contiene los resultados del cálculo del ratio Omega para este umbral de los ocho ETF evaluados en nuestro estudio.

Tabla 5: *Ranking* de ETF según el ratio Omega con umbral $K1$

N°	ETF	$K1$	Ω	<i>Ranking</i> Ω
6	QQQ	0,00025	1,0443	1
7	IWF	0,00025	1,0175	5
22	IJK	0,00025	1,0203	3
23	MDYG	0,00025	1,0194	4
29	JKI	0,00025	1,0003	32
35	SLY	0,00025	1,0088	21
36	IWO	0,00025	1,0130	14
38	IJT	0,00025	1,0204	2

Fuente: elaboración propia.

Según los resultados presentados en la tabla 5, la mejor opción para un inversionista que utiliza Omega como medida de desempeño sería el ETF 6 (QQQ), ya que presenta el mayor valor de Omega (1,0443) con respecto a los otros 31 fondos evaluados; lo anterior indica que este fondo en particular tiene una mayor probabilidad de entregar rendimientos superiores a los demás fondos evaluados por encima del umbral definido $K1$, es decir, proporciona más ganancias en relación con las pérdidas para el umbral $K1$. Asimismo, se puede observar que la opción menos favorable para este inversionista sería el ETF 29 (JKI) ya que presenta el menor valor de Omega (1,0003), lo que significa que la probabilidad de generar valor agregado con respecto de $K1$ va a ser menor en comparación con el ETF 6 (QQQ), en otras palabras, su retorno esperado se va encontrar muy cerca de $K1$. La segunda, tercera y cuarta mejor opción para este inversionista sería el

ETF 38 (IJT), el ETF 22 (IJK) y el ETF 23 (MDYG), respectivamente.

El **escenario 2** corresponde a los fondos evaluados con umbral $K2 = 0,00031$, parámetro definido como la media de los retornos diarios del índice de mercado S&P MidCap 400 Index. Del total de los 45 ETF considerados en este estudio, el escenario 2 agrupa los 13 fondos con Ω 's ≥ 1 resultantes del cálculo de Omega con umbral $K2$. La tabla 6 contiene los resultados del cálculo del ratio Omega con umbral $K2$ de seis de los ocho ETF evaluados en nuestro estudio, ya que el ETF 29 (JKI) y el ETF 35 (SLY) no cumplen con la condición de $\Omega \geq 1$ para $K2$.

Tabla 6: *Ranking* de ETF según el ratio Omega con umbral $K2$

Nº	ETF	K2	Ω	<i>Ranking</i> Ω
6	QQQ	0,00031	1,0301	1
7	IWF	0,00031	1,0015	10
22	IJK	0,00031	1,0070	3
23	MDYG	0,00031	1,0059	4
36	IWO	0,00031	1,0018	7
38	IJT	0,00031	1,0081	2

Fuente: elaboración propia.

Según los resultados presentados en la tabla 6, la mejor opción para un inversionista que utiliza Omega como medida de desempeño en este escenario sería igualmente el ETF 6 (QQQ), ya que presenta el mayor valor de Omega (1,0301) con respecto a los demás fondos evaluados, aunque inferior con relación al escenario 1. Asimismo, se puede observar que la opción menos favorable para este inversionista en este caso ya no sería el ETF 29 (JKI), sino el ETF 7 (IWF), ya que presenta el menor valor de Omega (1,0015). La segunda, tercera y cuarta mejor opción para este inversionista seguiría siendo el ETF 38 (IJT), el ETF 22 (IJK) y el ETF 23 (MDYG), respectivamente. Como se puede observar, las cuatro primeras posiciones en el *ranking* con parámetro $K2$ coinciden con las posiciones del *ranking* con parámetro $K1$.

El **escenario 3** corresponde a los fondos evaluados con umbral $K3 = 0,00032$, parámetro definido como la media de los retornos diarios del índice de mercado S&P SmallCap 600 Index. Del total de los 45 ETF considerados en este estudio, el escenario 3 agrupa los 6 fondos con Ω 's ≥ 1 resultantes del cálculo de Omega con umbral $K3$. La tabla 7 contiene los resultados del cálculo del ratio Omega

con umbral $K3$ de cuatro de los ocho ETF evaluados en nuestro estudio, ya que adicionalmente al ETF 29 (JKI) y al ETF 35 (SLY), el ETF 7 (IWF) y el ETF 36 (IWO) no cumplen con la condición de $\Omega \geq 1$ para $K3$.

Tabla 7: *Ranking* de ETF según el ratio Omega con umbral $K3$

N°	ETF	$K3$	Ω	<i>Ranking</i> Ω
6	QQQ	0,00032	1,0277	1
22	IJK	0,00032	1,0048	3
23	MDYG	0,00032	1,0037	4
38	IJT	0,00032	1,0061	2

Fuente: elaboración propia.

Según los resultados presentados en la tabla 7, la mejor opción para un inversionista que utiliza Omega como medida de desempeño en este escenario sería igualmente el ETF 6 (QQQ), ya que presenta el mayor valor de Omega (1,0277) con respecto a los demás fondos evaluados, aunque inferior con relación a los escenarios 1 y 2. Asimismo, se puede observar que la opción menos favorable para este inversionista en este caso ya no sería el ETF 7 (IWF), sino el ETF 23 (MDYG), ya que presenta el menor valor de Omega (1,0061). La segunda y tercera mejor opción para este inversionista seguiría siendo el ETF 38 (IJT) Y el ETF 22 (IJK), respectivamente. Como se puede observar, las cuatro posiciones en el *ranking* con parámetro $K3$ coinciden con las posiciones de los *rankings* con parámetros $K1$ y $K2$, respectivamente.

4.3. Resultados de consistencia del ratio Omega con SSD

La consistencia del ratio Omega con SSD es determinada a través de la comprobación de las propiedades descritas en 3. En cuanto a las propiedades de consistencia de Omega con SSD, los resultados de nuestro análisis son congruentes con lo planteado en la Proposición 2. A partir de lo anterior, se evaluó la consistencia de Omega con SSD en los tres escenarios previamente considerados, donde cada escenario se construyó con base en la definición de los umbrales $K1$, $K2$ y $K3$.

Según los resultados presentados en la tabla 8, la mejor opción tanto para un inversionista averso al riesgo no saciado (SSD) como para un inversionista que utiliza Omega como medida de desempeño sería el ETF 6 (QQQ), ya que no

solo domina otros 31 fondos en segundo orden y no es dominado por ningún otro fondo en términos de SSD, sino que además presenta el mayor valor de Omega (1,0443) con respecto a los otros 31 fondos evaluados. Asimismo, se puede observar que la opción menos favorable tanto para un inversionista averso al riesgo no saciado como para un inversionista que utiliza Omega como medida de desempeño sería el ETF 29 (JKI), ya que no domina a ningún otro fondo y está dominado en segundo orden por 30 fondos más, sino que además presenta el menor valor de Omega (1,0003). La segunda, tercera y cuarta mejor opción tanto para un inversionista averso al riesgo no saciado como para uno que utiliza Omega como medida de desempeño sería el ETF 38 (IJT), el ETF 22 (IJK) y el ETF 23 (MDYG), respectivamente.

Tabla 8: *Ranking* de ETF según SSD y el ratio Omega con umbral K1

Nº	ETF	μ	D+	D-	K1	Ω	$\frac{P_Y(K)}{P_X(K)}$	$\frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K}$	Ranking SSD	Ranking Ω
6	QQQ	0,000440	31	0	0,00025	1,0443	1,1456	0,5272	1	1
7	IWF	0,000316	22	9	0,00025	1,0175	1,0168	0,9926	10	5
22	IJK	0,000342	29	2	0,00025	1,0203	0,9872	0,9393	3	3
23	MDYG	0,000336	28	3	0,00025	1,0194	1,1150	0,9539	4	4
29	JKI	0,000251	0	30	0,00025	1,0003	-	-	32	32
35	SLY	0,000294	3	19	0,00025	1,0088	0,7594	0,1770	28	21
36	IWO	0,000320	25	6	0,00025	1,0130	0,9305	0,9874	7	14
38	IJT	0,000350	30	1	0,00025	1,0204	0,9223	0,9204	2	2

Fuente: elaboración propia.

Para $K1$ identificamos tres casos en los que las posiciones de los fondos en el *ranking* de Omega difieren de las posiciones en el *ranking* de SSD, donde las posiciones de los ETF 7 y 36 (IWF e IWO) se invierten.

Conforme a las verificaciones efectuadas a las rentabilidades esperadas por encima del umbral $K1$, se puede observar que los fondos evaluados en el escenario 1 reservan una masa probabilística mayor más allá del umbral $K1$ en comparación con los fondos evaluados para $K2$. Lo anterior ocasiona que las posiciones del *ranking* según Omega en el escenario 1 de los ETF 7, 35 y 36 (IWF, SLY e IWO) difieran de las posiciones del escenario 2 como consecuencia del mayor número de instrumentos evaluados en dicho escenario. En cuanto a las diferencias de los ETF 7 y 35 (IWF y SLY) presentadas con el *ranking* según SSD, y de acuerdo con lo ilustrado en la tabla 4, se puede observar que SSD captura en

forma más completa el efecto en los momentos superiores de la distribución en la evaluación del desempeño de los fondos analizados en el escenario 1.

La comparación por pares para $K1$, efectuada a través de $\frac{P_Y(K)}{P_X(K)} \geq \frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K}$, muestra que en 9 de las 31 comparaciones llevadas a cabo no se presenta dominancia en sentido de Omega ($X \succeq_K Y$), dentro de las que se encuentra la comparación entre el ETF 36 (IWO), fondo que ocupa la séptima posición en el *ranking* según SSD, y el ETF 40 (JJK), fondo que ocupa la octava posición en el *ranking* según SSD. En relación con lo ilustrado en la tabla 4, se puede observar que SSD captura en forma más completa, no solo los momentos superiores de la distribución, sino que además lo hace mejor con los momentos inferiores y genera *rankings* más consistentes en términos de riesgo-retorno para los fondos analizados en el escenario 1.

Tabla 9: *Ranking* de ETF según SSD y el ratio Omega con umbral K2

N°	ETF	μ	D+	D-	K2	Ω	$\frac{P_Y(K)}{P_X(K)}$	$\frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K}$	<i>Ranking</i> SSD	<i>Ranking</i> Ω
6	QQQ	0,000440	12	0	0,00031	1,0301	1,1448	0,3083	1	1
7	IWF	0,000316	3	9	0,00031	1,0015	1,0167	0,9172	10	10
22	IJK	0,000342	10	2	0,00031	1,0070	0,9874	0,8255	3	3
23	MDYG	0,000336	9	3	0,00031	1,0059	1,1142	0,8492	4	4
36	IWO	0,000320	6	6	0,00031	1,0018	0,9308	0,9104	7	7
38	IJT	0,000350	11	1	0,00031	1,0081	0,9226	0,8009	2	2

Fuente: elaboración propia.

Tabla 10: *Ranking* de ETF según SSD y el ratio Omega con umbral K3

N°	ETF	μ	D+	D-	K3	Ω	$\frac{P_Y(K)}{P_X(K)}$	$\frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K}$	<i>Ranking</i> SSD	<i>Ranking</i> Ω
6	QQQ	0,000440	5	0	0,00032	1,0277	1,1447	0,2505	1	1
22	IJK	0,000342	3	2	0,00032	1,0048	0,9875	0,7462	3	3
23	MDYG	0,000336	2	3	0,00032	1,0037	1,1141	0,7573	4	4
38	IJT	0,000350	4	1	0,00032	1,0061	0,9226	0,7344	2	2

Fuente: elaboración propia.

Según los resultados presentados en las tablas 9 y 10, se puede observar que utilizar K con valores superiores corrige las diferencias en cuanto a posiciones

en el *ranking* según Omega del escenario 1, y muestra que al evaluar los fondos con los umbrales $K2$ y $K3$, Omega es consistente con SSD en la totalidad de los trece y los seis fondos evaluados con $\Omega's \geq 1$, en los escenarios 2 y 3, respectivamente. Asimismo, la comparación por pares para $K2$ y $K3$, efectuada a través de $\frac{P_Y(K)}{P_X(K)} \geq \frac{\mu_Y - K}{\mu_X - K}$, muestra que en la totalidad de las 12 comparaciones para $K2$ y de las 5 comparaciones para $K3$ llevadas a cabo en nuestro estudio, se presenta dominancia en sentido de Omega.

5. Conclusiones

Los resultados presentados en este trabajo muestran que los ETF clasificados como superiores para todos los inversionistas aversos al riesgo no saciados (SSD) son igualmente clasificados como superiores utilizando el ratio Omega. Lo anterior indica que este ratio es consistente con SSD en la determinación de la preferencia de una variable aleatoria sobre otra para una determinada clase de individuos (inversionistas aversos al riesgo no saciados).

A diferencia del enfoque tradicional de media-varianza –que considera los dos primeros momentos de la distribución de retornos–, Omega, dependiendo del K seleccionado, proporciona una solución igual de robusta a SSD, ya que tanto Omega como SSD involucran los cuatro momentos de la distribución de retornos; sin embargo, en los casos en los que el K con el que se evalúan las estrategias genera inconsistencias en el *ranking* entre SSD y Omega, se observa que SSD captura en forma más completa el efecto en todos los momentos de la distribución en comparación a como lo hace Omega.

Ante la presencia de fondos con retornos cercanos a K , la cantidad de fondos que acumulan una masa probabilística a partir de ese nivel de K es mayor que los fondos evaluados con un valor de K superior; no obstante, esta mayor cantidad de fondos con $\Omega's \geq 1$, no necesariamente implica que estos sean consistentes con SSD y tampoco que dominen en sentido de Omega, tal como lo observado en los resultados presentados en la tabla 8.

A pesar de las mejores propiedades de Omega en relación con las medidas tradicionales, autores como López de Prado e Illera (2004) advierten que Omega ha sido criticada por ser una caja negra, debido a que para esta medida no existe una especie de teorema de la separación al estilo de Tobin, puesto que, la función de utilidad está integrada dentro del programa de optimización de la cartera, así que diferentes inversionistas obtienen distintas funciones Omega. Los autores

manifiestan que no existe algo así como una única frontera eficiente en el marco conceptual de Omega, e indican que, para Omega, la única cartera relevante es aquella que maximiza el ratio de la probabilidad ponderada de ganancias sobre pérdidas para el umbral de rentabilidad seleccionado por el inversionista.

Pese a lo anterior, académicos y profesionales de la industria consideran a Omega como un criterio alternativo óptimo para calificar el desempeño de inversiones, el cual puede adaptarse a entornos más complejos que los gaussianos y contribuye en gran medida a la toma de decisiones informadas más allá de los dos primeros momentos de la distribución de retornos.

Referencias

Almaraz, E. (2009). *Cuestiones notables de ordenación estocástica en optimización financiera* (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Facultad de Ciencias Matemáticas. Departamento de Estadística e Investigación Operativa, Madrid.

Balder, S. y Schweizer, N. (2017). Risk aversion vs. the Omega ratio: Consistency results. *Finance Research Letters*, 21, 78-84.

Caporin, M., Costola, M., Jannin, G. y Maillet, B. (2018). On the (Ab)use of Omega? *Journal of Empirical Finance*, 46, 11-33.

Engle, R. F. y Bollerslev, T. (1986). Modelling the persistence of conditional variances. *Econometric Reviews*, 5(1), 1-50.

Fong, W. M. (2016). Stochastic dominance and the omega ratio. *Finance Research Letters*, 17, 7-9.

Hadar, J. y Russell, W. R. (1969). Rules for ordering uncertain prospects. *The American Economic Review*, 59(1), 25-34.

Hanoch, G. y Levy, H. (1969). The efficiency analysis of choices involving risk. *The Review of Economic Studies*, 36(3), 335-346.

Hodges, S. (1998). *A generalization of the sharpe ratio and its applications to valuation bounds and risk measures*. Warwick: Financial Options Research Centre, Warwick Business School, University of Warwick.

- Kaplan, P. D. y Knowles, J. A. (2004). Kappa: A generalized downside risk-adjusted performance measure. *Journal of Performance Measurement*, 8(3), 42-54.
- Kazemi, H., Schneeweis, T. y Gupta, B. (2004). Omega as a performance measure. *Journal of Performance Measurement*, 8, 16-25.
- Keating, C. y Shadwick, W. F. (2002). A universal performance measure. *Journal of Performance Measurement*, 6(3), 59-84.
- Klar, B. y Müller, A. (2017). On consistency of the omega ratio with stochastic dominance rules. *SSRN*, 2988951.
- Levy, H. (2016). *Stochastic Dominance: Investment Decision Making under Uncertainty*. Switzerland: Springer International Publishing.
- Levy, H. y Hanoch, G. (1970). Relative effectiveness of efficiency criteria for portfolio selection. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 5(1), 63-76.
- López de Prado, M. M. e Illera, C. R. (2004). *Invertir en Hedge Funds: Análisis de su estructura, estrategias y eficiencia*. Madrid: Díaz de Santos.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Merton, R. C. (1981). On market timing and investment performance. I. An equilibrium theory of value for market forecasts. *The Journal of Business*, 54(3), 363-406.
- Shaked, M. y Shanthikumar, J. G. (2007). *Stochastic Orders*. New York, N.Y.: Springer Science & Business Media.
- Sharpe, W. F. (1966). Mutual fund performance. *The Journal of Business*, 39(1), 119-138.
- von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1953). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton, N.J.: Princeton University Press.
- Weston, J. y Copeland, T. (1998). *Managerial Finance*. New York, N.Y.: CBS College Publishing.
- Whitmore, G. A. (1970). Third-degree stochastic dominance. *The American Economic Review*, 60(3), 457-459.

Wiesinger, A. (2010). *Risk-adjusted performance measurement: State of the art* (Bachelor thesis). University of St. Gallen, School of Business Administration, Economics, Law and Social Sciences (HSG), St. Gallen, Switzerland.