

Valoración de opciones americanas por el método de malla estocástica bajo movimiento Browniano fraccional del activo subyacente

American option pricing by the stochastic meshmethod under Fractional Brownian movement of the underlying asset

Daniel Aragón Urrego*

* Secretaría Distrital de Cultura. Magíster en Finanzas, Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [daragon66@gmail.com].

Artículo recibido el 16 de mayo de 2018.

Aceptado el 01 de julio de 2018.

Para citar este artículo:

Aragón Urrego, D. (2018). Valoración de opciones americanas por el método de malla estocástica bajo movimiento Browniano fraccional del activo subyacente. ODEON, 14, pp. 131-161.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n14.06>

Introducción

La valoración de opciones financieras implica tres elementos, los cuales hacen referencia a: la determinación de la función de pago o *payoff* que muestra cómo se comporta el precio de la opción frente al subyacente, el proceso estocástico que sigue el precio del activo subyacente, y las condiciones de no arbitraje que están vinculadas con la ley del único precio y medidas de riesgo neutral.

La valoración de opciones financieras puede ser abordada considerando diferentes métodos, los cuales pueden brindar soluciones analíticas, semianalíticas o numéricas. Dentro de las soluciones analíticas se destaca el trabajo de Black-Scholes (1973), en el cual, bajo una serie de supuestos sobre el comportamiento del precio del activo subyacente y de las características del mercado, se desarrolla una ecuación que permite encontrar el valor de opciones europeas de compra y venta (*call* y *put*). En este caso, el análisis que se realiza está enmarcado en lo que puede llamarse el “paradigma de la normalidad” de las finanzas modernas, encontrando un único valor para la opción.

Por otro lado, en los métodos semianalíticos se destaca el trabajo de Cox, Ross y Rubinstein (1979), que se caracteriza por el supuesto hecho sobre el comportamiento del precio del subyacente, del cual se deriva el nombre de “árboles binomiales”, con el cual se conoce al modelo. El método consiste en representar los posibles caminos o trayectorias que sigue el precio de un activo subyacente en diferentes momentos del tiempo, como agregación de variables Bernulli de subida y bajada, con probabilidades definidas para cada escenario.

Históricamente, los modelos de valoración han incorporado un mayor rigor matemático, lo cual ha posibilitado el desarrollo de métodos numéricos como el de diferencias finitas (explícitas o implícitas), pero estas metodologías no son ajenas al problema de dimensionalidad, ya que a medida que se aumenta el número de estados considerados aumenta exponencialmente la complejidad para encontrar la respuesta. Por lo anterior, se han desarrollado métodos alternativos como la simulación de Monte Carlo, la cual presenta ventajas frente a los métodos mencionados previamente, entre estas se destaca que permite valorar opciones europeas sin tomar en cuenta el número de variables de estado (Broadie y Glasserman, 1997).

Aunque el método de Monte Carlo presenta ventajas, también es pertinente señalar que dicho método tiene visión hacia adelante, en tanto que la valoración

de opciones americanas implica que se inicie desde el final hasta el comienzo, es decir, valorar el *payoff* en el vencimiento frente a momentos anteriores a este (hacia atrás). Sin embargo, desarrollos recientes en programación dinámica han permitido robustecer el método de Monte Carlo y han propiciado la aparición de otros métodos numéricos, como las mallas estocásticas, las cuales son el objeto de estudio en este documento.

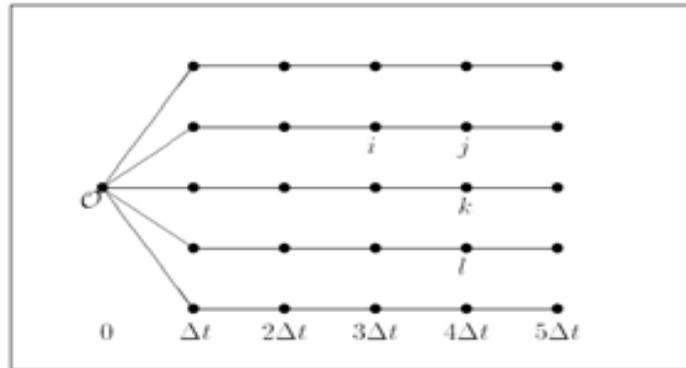
1. Método de malla estocástica

El método de malla estocástica es un método numérico que se apoya en el uso de herramientas computacionales para solucionar problemas generales de parada óptima, entre ellos la valoración de opciones americanas en tiempo discreto (Broadly y Glasserman, 2000). Este método permite, a través de la programación dinámica, realizar la valoración de opciones americanas aproximando el problema mediante la valoración de opciones bermuda, calculando el valor de ejercer previamente la opción y estimando su valor de continuación mediante la simulación de múltiples trayectorias del precio del activo subyacente, S_t , para diferentes momentos o ventanas temporales definidas.

De esta manera, cada ventana temporal y el correspondiente valor del proceso del subyacente en cada trayectoria determinan un nodo y el total de nodos genera un conjunto de puntos que configuran una malla, siendo importante determinar la cantidad de nodos necesarios y la manera de pasar de uno a otro para poder realizar las estimaciones de los precios en la malla.

En el método de malla estocástica se generan n cantidad de nodos, dadas las simulaciones de las trayectorias que sigue el precio del activo subyacente en los diferentes momentos o ventanas temporales contempladas, asumiendo que la transición dentro de la malla está relacionada con pesos o ponderadores asociados a una función de densidad de probabilidad.

Figura 1: Trayectorias en la malla estocástica



Fuente: Broady y Glasserman (2000).

1.1. El problema de valoración

Se asumirá que S_t es un proceso de Markov con valor vectorial en \mathbb{R}^n y con valor inicial fijo S_0 , considerado en los instantes de tiempo discretos $t = 0, 1, \dots, T$. El *payoff* por el ejercicio de una opción americana en un momento t , dado un estado S_t , se puede representar mediante una función $f(t, S_t)$.

Respecto a la característica markoviana del proceso, Broady y Glasserman (2000) afirman que, de ser necesario, la propiedad se consigue al incorporar variables adicionales en el vector estado S_t , con lo cual, en caso de ser requerido, las trayectorias dependientes del *payoff* se pueden ajustar de nuevo mediante la incorporación de otras variables de estado.

Considerando la existencia de una función de pagos $f(t, S_t)$ asociada a la opción, y dada su característica americana, se consideran momentos $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T$, en los cuales la opción puede ser ejercida. La función de pagos permite estimar el valor de ejercer o continuar con la opción en cada momento y considerar alguna expresión para establecer el valor de la opción en el instante cero.

$$V(0, S_0) = \max_{\tau} E[f(\tau, S_{\tau})] \quad (1)$$

La ecuación (1) sintetiza el objetivo de la valoración, esto es, encontrar el valor de la opción en el instante $t = 0$ dado un valor inicial S_0 y el tiempo de

parada τ , todo ello con respecto al proceso de Markov del subyacente en cada instante de tiempo. De acuerdo con Broady y Glasserman (2000), este problema de parada óptima tiene como caso importante la valoración correspondiente al escenario de riesgo neutral, en donde f denota el *payoff* descontado a la tasa libre de riesgo. Sin embargo, en el caso general de la ecuación (1), el valor esperado se da con respecto a otra medida martingala y f puede ser descontado por el activo numerario.

Asumiendo que la función f es explícita, se tiene que su valor $f(T, S_T)$ en el vencimiento (T) es función de S_T . Para llegar al valor en $t = 0$ se considera:

$$V(T, s) = f(T, s) \quad (2)$$

$$V(k\Delta t, s) = \max\{f(k\Delta t, s), E[V((k+1)\Delta t, S_{(k+1)\Delta t}) | S_{k\Delta t} = s]\}, \quad (3)$$

$$\text{Para } k = d-1, d-2, \dots, 1, 0 \quad \text{con } k\Delta t < T \quad \text{y} \quad V(T, s) = f(T, s).$$

donde k decrece conforme a los incrementos en el tiempo de parada respecto al proceso de Markov que sigue el subyacente en cada instante Δt . De la ecuación (3) se observa que el valor de la opción (V) en el instante $k\Delta t$ con precio s depende del valor de ejercicio, denotado por el primer término (máximo de la función f) y por el valor de continuidad, denotado por la esperanza condicional.

1.1.1. Activo subyacente

Una de las principales características del método de malla es incorporar la modelación del precio del activo subyacente a partir de procesos estocásticos, asumiendo que el comportamiento de esta variable sigue trayectorias dadas por un proceso generado a partir del movimiento browniano geométrico (Broady y Glasserman, 1997), lo cual, dado el contexto de valoración de opciones americanas, convierte al método en un problema de parada óptima.

Siguiendo a Broady y Glasserman (2000), se debe abordar la dinámica del precio del activo subyacente, lo cual se logra considerando el precio inicial S_0 , y generando desde este un vector de precios:

$$S_t = (S_t^1, \dots, S_t^n) \quad (4)$$

Suponiendo que se desea realizar el análisis sobre el caso más general, se consideran los procesos lognormales multivariados, en donde el activo subyacente sigue un proceso lognormal, y bajo este contexto se considera un movimiento Browniano n -dimensional, con matriz fija de covarianza Σ , en otras palabras, se tiene una medida martingala que conlleva la no presencia de arbitraje. Por lo anterior, bajo un esquema riesgo neutral, el proceso que sigue el subyacente (lognormal) tiene *drift* o tendencia r , correspondiente a la tasa de interés libre de riesgo, cuyo valor se supone constante y determinístico.

Al aplicar esta metodología a cada uno de los elementos del vector de precios se producen trayectorias que configurarán patrones de movimiento, los cuales de manera agregada representan una malla. Cada fracción de tiempo o incremento gradual es denotado por Δt , de tal manera que el tiempo total o fecha de vencimiento corresponde a T (n -veces Δt).

$$T = n\Delta t$$

La simulación del proceso para cada elemento del vector del subyacente en cada periodo (Δt) configura un nodo o punto, denotado por las letras i, j, k y l en la gráfica 1. En este sentido, para pasar del nodo i al j el subyacente es simulado mediante un movimiento Browniano geométrico estándar en un periodo de tiempo Δt . Se debe anotar que en la simulación las trayectorias son independientes.

De acuerdo con lo anterior, se considera el proceso n -dimensional y el proceso m -factor lognormal:

$$\frac{dS_t^i}{S_t^i} = rdt + \sum_{j=1}^m L_{ij}dW_t^j \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (5)$$

Donde r corresponde a la tasa libre de riesgo, W_t^j son movimientos Brownianos estándar independientes, L es una matriz $n \times m$ (n -dimensiones por m procesos de factores lognormales), de donde el proceso depende de la matriz de covarianza instantánea de $\Sigma = LL^T$. De esta manera, las trayectorias del proceso se pueden simular con la expresión:

$$S_{t+\Delta t}^i = S_t^i \exp \left\{ \left(r - \frac{1}{2} \Sigma_{ii} \right) \Delta t + \sqrt{\Delta t} \sum_{j=1}^m L_{ij} X_j \right\} \quad ; \quad i = 1, \dots, n \quad (6)$$

El uso de un vector de X_j independientes en la ecuación (6), provenientes de la distribución normal estándar, generará una trayectoria, y este procedimiento se replica con varios conjuntos de X_j , lo que permite obtener varias trayectorias que configurarán la malla.

1.1.2. Pesos de transición

Una vez se realizan las simulaciones del vector de precios del subyacente, estableciendo los valores para cada nodo, es necesario determinar los pesos o las ponderaciones mediante las cuales se realizará la transición entre los diferentes nodos.

Se denota como $w_{i,j}$ al peso asociado a la transición del nodo i al nodo j , lo que indica que este cambio no requiere estar sobre la misma trayectoria para que $w_{i,j}$ sea diferente de cero. Se resalta aquí que dada la simulación de las trayectorias, ya no existen nodos exclusivos a cada una de ellas, por lo cual desde cualquier nodo en el momento $k\Delta t$ es posible llegar a cualquier nodo en un momento futuro $(k+1)\Delta t$.

Partiendo de N nodos en cada instante de tiempo, así como de una serie de pesos $w_{i,j}$, se aproximan las ecuaciones (2) y (3) mediante:

$$V_i(k\Delta t) = \max \left(f_i(k\Delta t), \sum_{j=1}^N w_{i,j} V_j((k+1)\Delta t) \right) \quad (7)$$

ó

$$V_i(k\Delta t) = \max \left(f_i(k\Delta t), D_{\Delta t}^{-1} \sum_{j=1}^N w_{i,j} V_j((k+1)\Delta t) \right) \quad (8)$$

donde se debe determinar el factor de descuento representado por $D_{\Delta t}^{-1}$. En el nodo i y en el instante de tiempo $k\Delta t$ el valor estimado de la opción es $V_i(k\Delta t)$ y el valor de ejercicio inmediato (explícito) es representado por $f_i(k\Delta t)$. Por su parte, los pesos $w_{i,j}$ dependerán en general del índice de tiempo k .

En este sentido, no es necesario contar con una función de densidad de probabilidad para efectuar la transición entre los nodos, basta con garantizar la escogencia de “buenos pesos o ponderadores” dada la simetría en la construcción de la malla.

Posteriormente, Broadie y Glasserman plantean nuevas incorporaciones al modelo en términos de abordar la dinámica de la transición entre los diferentes nodos que conforman la malla sin emplear la función de densidad de probabilidad. Es por ello que Broadie y Glasserman (2000) abordan la transición dentro de la malla a través de la optimización restringida de los pesos para cada nodo y proponen dos caminos, a saber: máxima entropía y mínimos cuadrados. Sin embargo, el método de Broadie y Glasserman, al utilizar movimiento Browniano geométrico, asume que las variables financieras (como las series de precios), poseen ciertas características, entre ellas comportamiento de caminata aleatoria, característica que ha sido estudiada por varios autores, principalmente a través de la estimación del coeficiente de Hurst (H), y se ha encontrado evidencia para afirmar que no siempre se cumple en la práctica.

1.1.3. Coeficiente de Hurst

Este coeficiente es estimado sobre las series de datos y se emplea como referente para determinar la persistencia (memoria de largo plazo), aleatoriedad o antipersistencia de una serie de tiempo. El valor del coeficiente de Hurst (H) se encuentra en el intervalo $[0, 1]$, lo cual se debe a la presencia de invarianza al cambio de escala (autosimilaridad), característica fundamental de series fractales (Mandelbrot, 2013)¹.

Interpretación del coeficiente de Hurst: la literatura señala tres posibles resultados para el valor de H , los cuales se presentan en las figuras 2, 3 y 4.

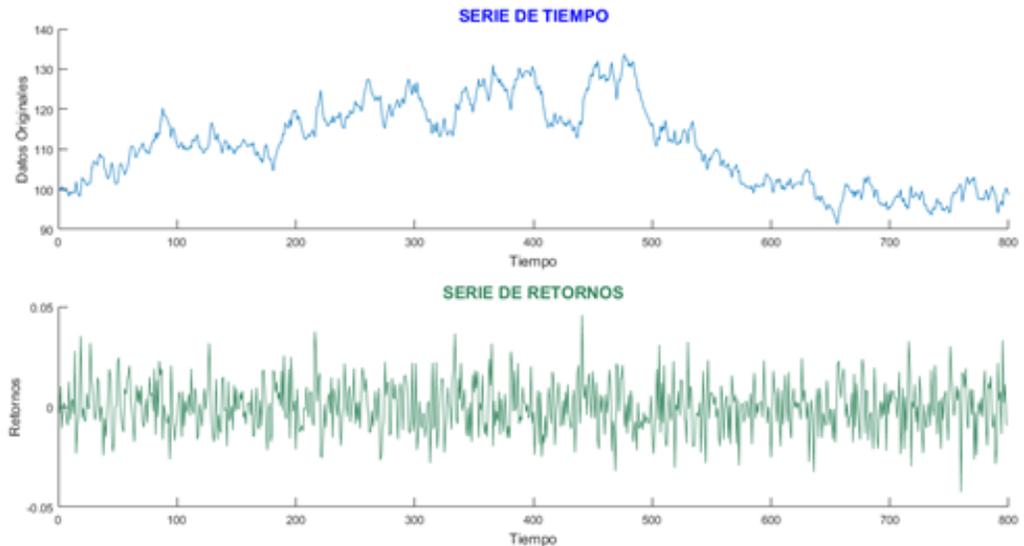
¹La información presentada en este apartado, así como el algoritmo utilizado, son tomados de Luengas, Ardila y Moreno (2010).

Figura 2: Ejemplo de una serie de tiempo y retornos con coeficiente Hurst = 0,72



$0,5 < H < 1$: se dice que la serie presenta persistencia o memoria de largo plazo, en donde los incrementos están positivamente correlacionados (ruido negro).

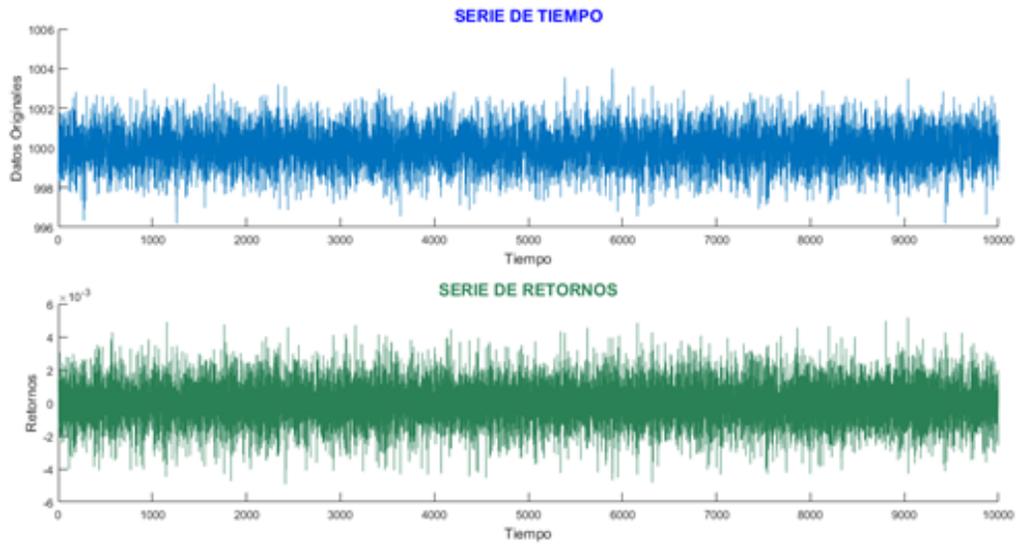
Figura 3: Ejemplo con coeficiente Hurst = 0,504



$H = 0,5$: se considera como movimiento Browniano estándar, es decir, una

caminata aleatoria en donde un evento presente no está correlacionado con un evento futuro (ruido blanco).

Figura 4: Ejemplo con coeficiente Hurst = 0,17



$0 < H < 0,5$: considerada como una serie antipersistente, cuyos incrementos están negativamente correlacionados (ruido rosa).

En el caso de algunas series financieras se ha encontrado evidencia de que el coeficiente de Hurst estimado es superior a 0,5. Como ejercicio práctico, se toman algunas series de precios y mediante la metodología de rango reescalado (*RS*) se estima el coeficiente de Hurst:

Figura 5: Precio acción Microsoft (1-4-1986 a 23-3-2018). $N = 8062$. Coef. Hurst = 0,625

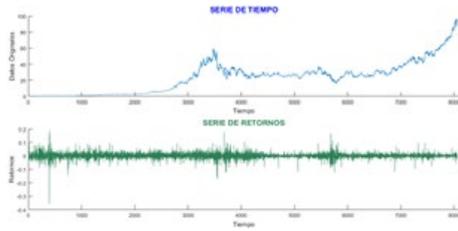


Figura 7: Precio acción PFBan-colombia (1-2-2007 a 16-2-2018). $N = 2692$. Coef. Hurst = 0,583

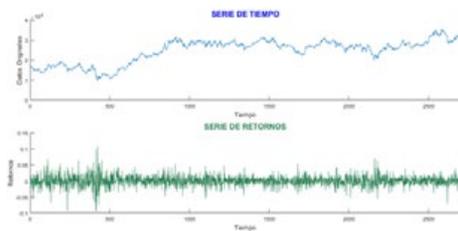


Figura 6: Precio acción Apple (12-11-1982 a 16-2-2018). $N = 8893$. Coef. Hurst = 0,566.

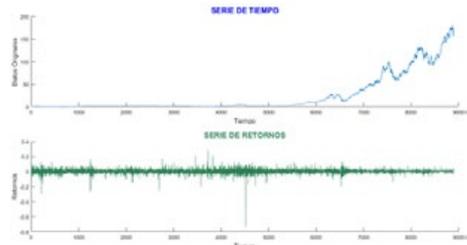
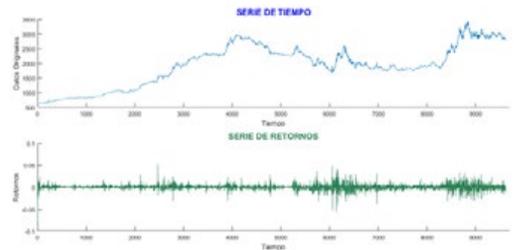


Figura 8: TRM Diaria (27-11-1991 a 28-3-2018). $N = 9623$. Coef. Hurst = 0,585.



Fuente: elaboración propia a partir del algoritmo de Luengas, Ardila y Moreno (2010).

De acuerdo con lo anterior, el método abordado por Broadie y Glasserman (2000) no toma en cuenta la persistencia o memoria de largo plazo que puede exhibir el comportamiento del subyacente, por lo cual surge la necesidad de aplicar el método de malla estocástica incorporando el coeficiente de Hurst, lo cual es posible al considerar un proceso estocástico diferente como lo es el movimiento Browniano fraccional.

Es así como en este documento se muestra la implementación del método de malla estocástica propuesto por Broadie y Glasserman para valorar opciones americanas, asumiendo que el precio del subyacente sigue un movimiento Browniano fraccional, lo que permite incorporar las características de persistencia o antipersistencia de la serie. Para lograr esto, el documento se divide en cinco secciones. La primera es esta introducción en donde se ha abordado el método de

mallas estocásticas y coeficiente de Hurst; la segunda sección aborda el movimiento Browniano fraccional (MBf) y sus propiedades, se expone el método de Cholesky como algoritmo para la simulación del MBf y su incorporación en el modelo de precios; la tercera sección comprende la incorporación del movimiento Browniano fraccional en el método de malla estocástica; por su parte, los resultados de la implementación para la valoración de opciones *call* y *put* americanas se presentan en la cuarta sección y, finalmente, se presentan las conclusiones y extensiones.

2. Movimiento Browniano fraccional

Un proceso gaussiano B_t^H , con $t \geq 0$ se dice un movimiento Browniano fraccional (MBf) con coeficiente de Hurst o autosimilaridad $H \in (0, 1)$ (Cavanzo y Blanco, 2004), si satisface las siguientes condiciones (Norros, 1994):

1. $B^H(0) = 0$
2. $E[B_t^H] = 0, \quad \forall t \geq 0$
3. Los incrementos del MFB son estacionarios: $B_{t_1}^H - B_{t_0}^H, B_{t_2}^H - B_{t_1}^H, \dots, B_{t_n}^H - B_{t_{n-1}}^H$
4. $[B_{t+q}^H - B_t^H] \stackrel{d}{=} [B_{t+2q}^H - B_{t+q}^H]$.

Con base en estas propiedades, se configura la función de covarianza del movimiento Browniano fraccional (ver ecuación (9)), en donde el coeficiente de Hurst adquiere relevancia dado el valor que pueda tomar.

$$E[B_t^H B_s^H] = \Gamma(t, s) = Cov(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(t^{2H} + s^{2H} - |t - s|^{2H}) \quad \forall s, t \in \mathbb{R}_+ \quad (9)$$

2.1. Modelo de precios bajo movimiento Browniano fraccional

Siguiendo a Hu y Oksendal (2003), el movimiento Browniano fraccional satisface la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t^H, \quad S(0) = s > 0 \quad (10)$$

con μ, σ y s constantes. Considerando el espacio de Schwartz $(S)^*_H$, la ecuación (10) se puede reescribir como:

$$\frac{dS_t}{dt} = \mu S_t + \sigma S_t \diamond W_t^H \quad (11)$$

o de forma similar:

$$\frac{dS_t}{dt} = (\mu + \sigma W_t^H) \diamond S_t \quad (12)$$

Empleando el cálculo de Wick se obtiene la solución para esta ecuación:

$$S_t = S_0 \exp \diamond \left\{ \mu t + \sigma \int_0^t W^H(s) ds \right\} \quad (13)$$

$$S_t = S_0 \exp \diamond \{ \mu t + \sigma B^H(t) \} \quad (14)$$

Una vez se aplica el producto Wick se obtiene la siguiente expresión para el modelo de precios bajo movimiento Browniano fraccional:

$$S_t = S_0 \exp \left\{ \sigma B^H + \mu t - \frac{1}{2} \sigma^2 t^{2H} \right\} \quad (15)$$

en donde:

$$E_{\mu, \sigma} [S_t] = S_0 e^{\mu t} \quad (16)$$

La definición y simulación de las trayectorias del movimiento Browniano fraccional se constituye en la base para incorporar esta característica en el comportamiento del precio del activo subyacente. Por esta razón, el vector obtenido en la simulación del MBf presentada anteriormente, debe incorporarse dentro de la solución de Itô de la ecuación diferencial estocástica que sigue el precio de un activo subyacente.

Por lo anterior, es necesario retomar el resultado observado en (15) y, a partir de allí, calcular el valor del subyacente para un periodo siguiente, denotado como (Δt) . Una vez realizados los cálculos se obtiene la siguiente expresión:

$$S_{t+dt} = S_t \exp \left\{ \sigma (B_{t+dt}^H - B_t^H) + \mu dt - \frac{1}{2} \sigma^2 ((t+dt)^{2H} - (t)^{2H}) \right\} \quad (17)$$

3. Método de Cholesky para simular movimiento Browniano fraccional

Las trayectorias del movimiento Browniano fraccional pueden ser simuladas por métodos exactos y aproximaciones (Dieker, 2004). Dentro de los métodos exactos se encuentra el de Cholesky, el cual parte de la función de covarianza definida en (9), en donde se toma en cuenta que la matriz de covarianza del proceso es determinada como positiva definida, lo cual garantiza que los elementos de su diagonal sean no negativos (Shea, Zachariou y Pasik-Duncan, 2011).

El método de Cholesky para simular las trayectorias del MFB comprende el siguiente procedimiento:

1. En primer lugar, es necesario crear una matriz $A(n + 1)$ de dimensiones $(N + 1) \times (N + 1)$ cuyas entradas están dadas por valores obtenidos mediante la aplicación de la función de covarianza del proceso, definida en la ecuación (9).

$$A(i, j) = \frac{1}{2} [(v_i(i) * dt)^{2H} + (v_j(j) * dt)^{2H} - |(v_i(i) * dt) - (v_j(j) * dt)|^{2H}] \quad (18)$$

De esta manera, los valores de entrada proporcionados por t y s en la función de covarianza (9) ahora son incorporados a (18) a través de los vectores $[v_i(i) * dt]$ y $[(v_j(j) * dt)]$, respectivamente.

2. Posteriormente, se debe aplicar el método de descomposición de Cholesky con el objetivo de obtener la raíz cuadrada de la matriz A . Formalmente se tiene:

$$A(n + 1) = M(n + 1)M(n + 1)'$$

En donde: $M(n + 1)$ es la matriz triangular inferior de dimensiones $(N + 1) \times (N + 1)$, la cual toma un único valor si todos los elementos de su diagonal principal son estrictamente positivos.

3. De igual manera, se crea un vector v de dimensiones $(1 \times N + 1)$, conformado por números generados a través de un proceso de distribución gaussiana estándar.

4. Se multiplica el vector v por la raíz cuadrada de A , lo cual genera un vector que contiene los $(N + 1)$ posibles valores que toma la trayectoria del movimiento Browniano fraccional.

$$MBf(n + 1) = M(n + 1)v(n + 1)$$

De acuerdo con Dieker (2004), para cada $n \geq 0$, $MBf(n + 1)$ tiene media cero y matriz de covarianza expresada como:

$$Cov(M(n + 1)v(n + 1)) = M(n + 1)M(n + 1)' = A(n + 1)$$

Una vez se desarrollan los pasos descritos, se realizan simulaciones del movimiento Browniano fraccional para 3 valores hipotéticos del coeficiente de Hurst: 0,88; 0,5 y 0,16, los cuales representan los 3 tipos posibles de ruido que presenta una serie de datos: ruido negro, ruido blanco y ruido rosa, respectivamente. Las gráficas de las simulaciones se presentan a continuación (gráficas 9, 10 y 11):

Figura 9: Trayectoria de una serie del MBf simulada con Hurst = 0,16.

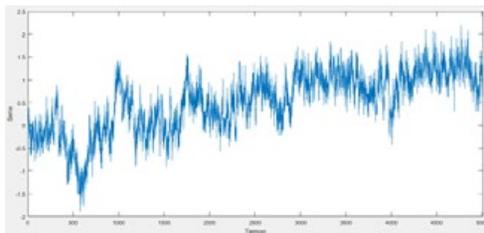


Figura 10: Trayectoria de una serie del MBf simulada con Hurst = 0,5.

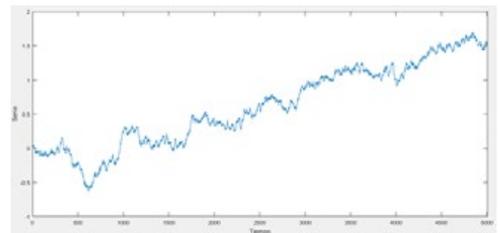
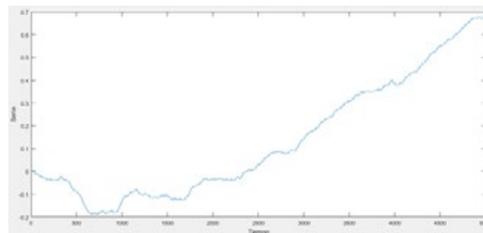


Figura 11: Trayectoria de una serie del MBf simulada con Hurst = 0,88.



4. Incorporación del movimiento Browniano fraccional al método de malla estocástica

El desarrollo de esta sección se realiza en dos etapas, en la primera se presenta la metodología para implementar el movimiento Browniano fraccional en la malla estocástica, y en la segunda se presentan los resultados de la implementación.

4.1. Propuesta de implementación

Los pasos para realizar la valoración de una opción *call/put* americana mediante el método de malla estocástica asumiendo que el precio del activo subyacente sigue movimiento Browniano fraccional son:

1. Simulación de trayectorias de precios.
2. Matriz de precios.
3. Matriz *payoff*.
4. Matriz valores de continuación.
5. Matriz prima de la opción.

4.1.1. Simulación de trayectorias de precios

Las simulaciones de las trayectorias que sigue el precio del activo subyacente se realizan con base en la ecuación (17), la cual incorpora los resultados de la simulación del MBf, específicamente de los incrementos o las variaciones del MBf, de tal manera que el comportamiento del precio adquiere esta característica. Para ello se presentan tres trayectorias, correspondientes a valores del coeficiente de Hurst para ruido negro, blanco y rosa, como se muestra en las figuras 12, 13 y 14:

Figura 12: Subyacente simulado con Hurst = 0,95

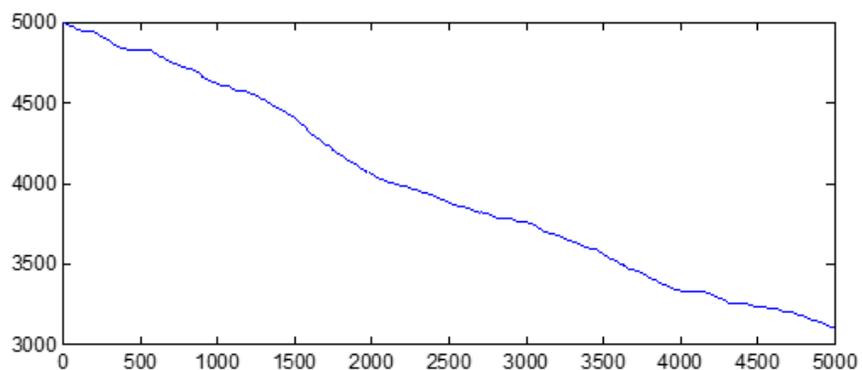


Figura 13: Subyacente simulado con Hurst = 0,5

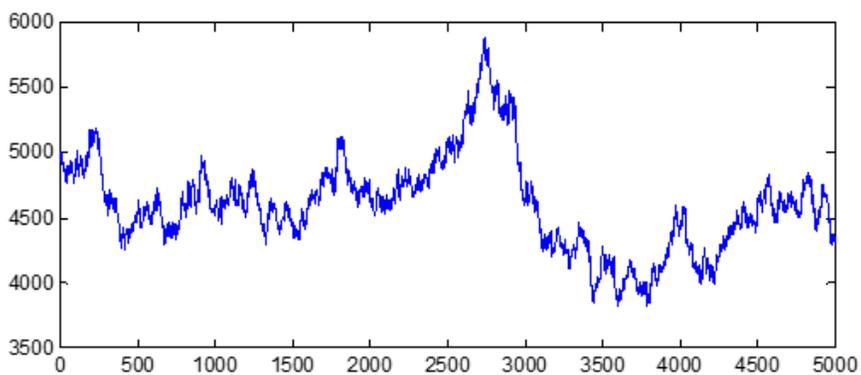
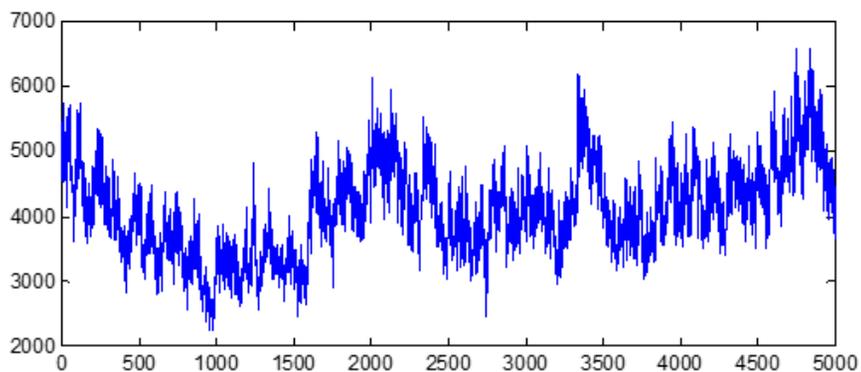


Figura 14: Subyacente simulado con Hurst = 0,2



Fuente: elaboración propia.

4.1.2. Matriz de precios

Una vez se verifica que se están generando trayectorias del precio dado el valor del coeficiente de Hurst, es necesario crear una matriz S , de dimensiones $(N + 1) \times (\text{Simulaciones})$, la cual contendrá todos los precios que se simulen para un determinado valor del coeficiente Hurst. La primera fila de la matriz S corresponde al precio *spot*, denotado como S_0 , a partir del cual se realizan las simulaciones de cada trayectoria.

$$S = \begin{pmatrix} S_0 & S_0 & \dots & S_0 \\ S_{t=1,Sim=1} & S_{t=1,Sim=2} & \dots & S_{t=1,Sim=j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{t=N+1,Sim=1} & S_{t=N+1,Sim=2} & \dots & S_{t=N+1,Sim=j} \end{pmatrix}$$

4.1.3. Matriz: *payoff* o ejercicio

Se crea una matriz E de igual tamaño a la matriz de precios, la cual contendrá aquellos valores máximos correspondientes a la diferencia que se realiza en cada nodo de las trayectorias de los precios frente al precio *strike* o valor de ejercicio de la opción (K).

$$\text{Payoff Opción call: } E = \max(S_t - K, 0)$$

$$\text{Payoff Opción put: } E = \max(K - S_t, 0)$$

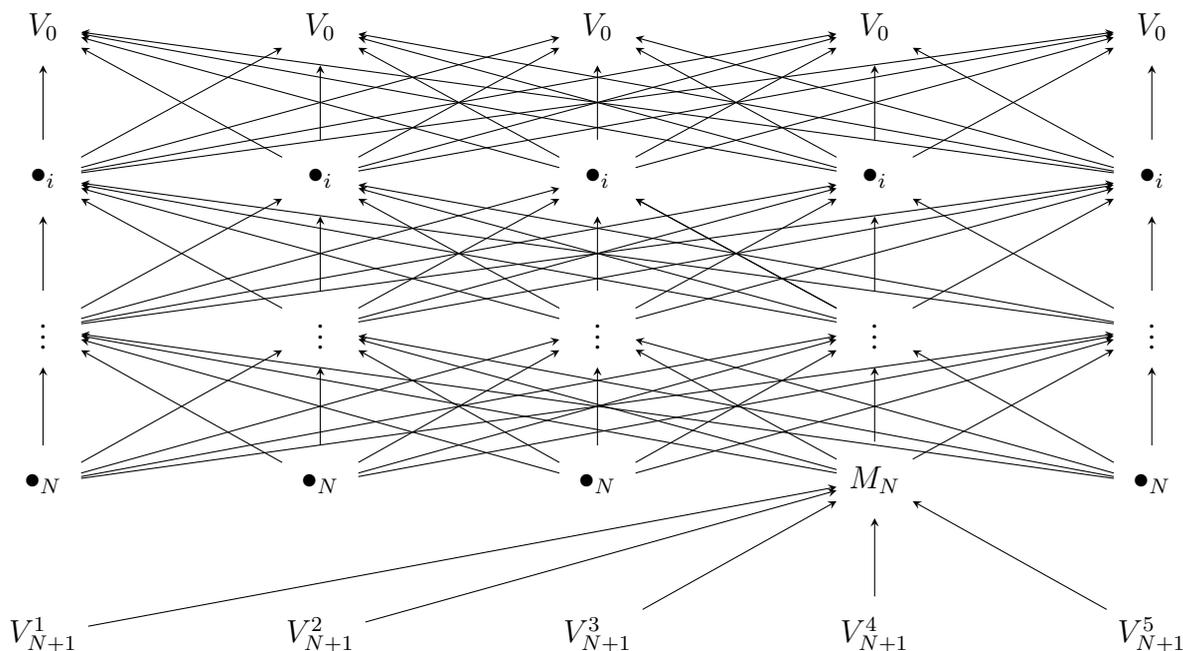
$$E = \begin{pmatrix} E_{t=0,Sim=1} & E_{t=0,Sim=2} & \dots & E_{t=0,Sim=j} \\ E_{t=1,Sim=1} & E_{t=1,Sim=2} & \dots & E_{t=1,Sim=j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_{t=N+1,Sim=1} & E_{t=N+1,Sim=2} & \dots & E_{t=N+1,Sim=j} \end{pmatrix}$$

4.1.4. Matriz: valores de continuación

Corresponde a una matriz denotada como V cuyas dimensiones son iguales a las de la matriz de precios y que toma valores en un proceso que inicia desde la última fila, como se indica a continuación: primero, la última fila de la matriz V corresponde al *payoff* de la Opción *call* o *put* en igual momento del tiempo $(N + 1)$, calculado como $E = \max(S_t - K, 0)$ o $E = \max(K - S_t, 0)$, respectivamente.

A partir de estos valores se calcula el valor de continuación para cada uno de los nodos desde $t = N$ hasta llegar al instante $t = 0$. En este sentido, si se parte del nodo M ubicado en el instante $i = N$, el valor de continuación para este nodo corresponderá al promedio simple de los valores de continuación del instante $i + 1$, descontados un periodo (Δt) por la tasa libre de riesgo (r) (figura 15).

Figura 15: Relación de nodos en la malla



Fuente: elaboración propia.

De acuerdo con la figura 15, el valor de continuación correspondiente para el nodo M_N se obtiene como el promedio de los valores en V_{N+1}^1 , V_{N+1}^2 , V_{N+1}^3 , V_{N+1}^4 y V_{N+1}^5 descontado a la tasa libre de riesgo (r). La expresión se denota como:

$$V_{t,j} = E^Q[V_{t+dt}] * \exp(-r * dt) \quad (19)$$

La cual metodológicamente se expresa como:

$$V_{t,j} = \frac{1}{m} \sum V_{t+dt} * \exp(-r * dt) \quad (20)$$

En donde m representa la cantidad total de nodos en la malla, lo cual permite aplicar el criterio de máxima entropía propuesto por Shannon (2001) e incorporado al método de malla estocástica por Broadie y Glasserman.

Criterio de máxima entropía

La entropía se refiere a una medida de la incertidumbre de una variable aleatoria, que en el caso expuesto por Shannon, $D = \sum_{i=1}^n p_i \ln(p_i)$ es la entropía de la serie de probabilidades $p_1, p_2, p_3, \dots, p_n$. Así, si x es una variable aleatoria o al azar, su entropía se denota como $D(x)$, lo cual implica que x sea una identificación para un número y no un argumento de la función.

Ejemplo de máxima entropía

El principio de máxima entropía se puede ilustrar de acuerdo con el siguiente teorema (Conrad, 2004):

Para una función de densidad de probabilidad, identificada como P , sobre una serie finita denotada como x_1, \dots, x_n , se tiene:

$$h(P) \leq \ln(n)$$

en donde se tendrá igualdad si y solo si P es uniforme, esto es:

$$P(x_i) = \frac{1}{n}, \quad \forall i$$

De acuerdo con lo expuesto, bajo este criterio los valores que genera la máxima entropía se ajustan a la distribución uniforme (pesos uniformemente distribuidos), lo que indica que se asigna el mismo peso o ponderador a cada nodo, lo cual implica que en términos metodológicos la malla que se construirá en este trabajo cuenta con un ponderador dado por el promedio simple.

En otras palabras, el término $\frac{1}{m}$ en la ecuación (16) indica que el peso o ponderador que se asume para cada nodo es el mismo, recordando que la distribución uniforme de los pesos es posible dado el criterio de máxima entropía.

El procedimiento descrito se debe realizar para cada uno de los restantes nodos, tanto los ubicados en $t = N$ como en los diferentes instantes hasta llegar a $t = 0$, de tal manera que se logre una configuración de malla.

Teorema fundamental de valoración

Como se mencionó, bajo el método de Broadie y Glasserman (2000) el comportamiento del precio del activo subyacente es modelado a través del movimiento Browniano geométrico, con las herramientas del cálculo de Itô, lo cual permite que el proceso de valoración se realice bajo riesgo neutral. Sin embargo, una vez se incorpora movimiento Browniano fraccional en el modelo de precios, este modelo matemático involucra arbitraje, por lo cual no se obtendría una medida martingala (Rogers, 1997). En este sentido, el desarrollo de una nueva clase de integrales basadas en el producto Wick ha permitido aplicar estas nuevas herramientas en modelos de precios, con especial atención en el modelo Black-Scholes fraccional, que no tiene arbitraje (Hu y Oksendal, 2000).

4.1.5. Matriz: prima de la opción

Esta matriz, denotada como C , almacena para cada nodo el valor correspondiente al máximo entre el *payoff* y el valor de continuidad. De tal manera, que el valor para cada nodo en el instante $t = 0$ se constituye como el valor de la prima para la respectiva trayectoria que sigue el precio del subyacente. Esto implica que al simular i -ésimas trayectorias del precio del subyacente se obtendrán i -ésimos valores para la prima, los cuales se deben promediar y así obtener el valor medio de la prima.

$$C = \begin{pmatrix} C_{t=0,1} & C_{t=0,2} & \cdots & C_{t=0,Sim=j} \\ C_{t=1,1} & C_{t=1,Sim=2} & \cdots & C_{t=1,Sim=j} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{t=N+1,Sim=1} & C_{t=N+1,Sim=2} & \cdots & C_{t=N+1,Sim=j} \end{pmatrix}$$

5. Resultados de la implementación en opciones americanas

La propuesta metodológica para implementar el método de malla estocástica, presentada en la sección anterior, permite realizar las estimaciones tomando

como insumo fundamental el valor para el coeficiente de Hurst. En este sentido, el objetivo de esta sección es mostrar cuál es el comportamiento de la prima de la opción ante los cambios en este coeficiente tanto para opciones *call* y *put* americanas. Para ello se plantea el siguiente escenario:

Cuadro 1: Escenario por implementar

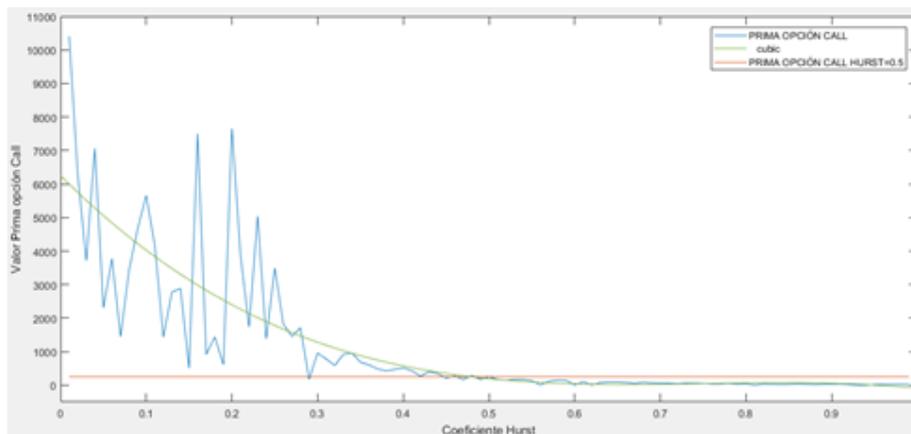
Variables	Precio <i>Spot</i>	Tasa libre <i>de riesgo</i>	Volatilidad	Tiempo	N	Simulaciones	<i>Strike</i>
Valor	100	0.1	0.4	1	252	50	100

Fuente: elaboración propia.

Con el programa *MATLAB* se realizaron las estimaciones para valores del coeficiente de Hurst comprendidos en el intervalo $[0,01, 0,99]$ con incrementos de 0,01.

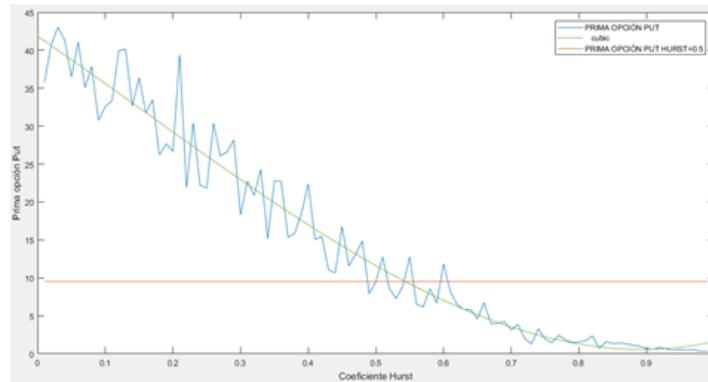
Los resultados obtenidos se presentan en las figuras 15 y 16, en donde se observa que conforme aumenta el valor del coeficiente de Hurst el valor de la prima tiene tendencia a disminuir (línea curva verde) tanto para la opción *call* como *put*, desplazándose casi paralelamente al eje.

Figura 16: Prima opción *call* para diferentes valores Hurst



Fuente: elaboración propia.

Figura 17: Prima opción *put* para diferentes valores Hurst



Fuente: elaboración propia.

Una posible interpretación de estos resultados es la siguiente:

1. **$H < 0,5$** . Cuando el precio de una opción corresponde a una serie que exhibe comportamiento antipersistente o que no tiene memoria de largo plazo, la valoración mediante el método de malla estocástica asumiendo movimiento Browniano geométrico ($H = 0,5$), identificado con la línea roja en las figuras, subestima el precio de la opción, el cual alcanza valores significativamente altos que ocasionan que cualquier participante del mercado no muestre interés en adquirir la opción. En este caso, se podría afirmar que bajo el método tradicional de malla estocástica con movimiento Browniano geométrico, bajos valores del coeficiente de Hurst permiten la existencia de mercado para la compra y venta de opciones.
2. **$H > 0,5$** . Para las opciones *call* y *put* cuyas series de precios presentan persistencia, en este caso, dada la dinámica que sigue el precio del subyacente, la valoración que asume movimiento Browniano geométrico sobrevalora el precio de la opción cuando se presenta memoria de largo plazo. Este resultado es consistente con Sierra (2007) quien utiliza la fórmula Black-Scholes fraccional aplicada sobre índices y tipos de cambio y encuentra que los precios de opciones *call* y *put* europeas disminuyen conforme aumenta la persistencia o dependencia de la serie con su pasado.

Lo anterior implicaría que para un agente de mercado que quiera cubrir su posición adquiriendo una opción de compra o venta sería menos costoso hacerlo si recurre a un mercado donde la valoración se realice asumiendo que las series de precios no son consideradas como caminatas aleatorias.

3. Por otra parte, no es posible concluir acerca de la variabilidad observada en el comportamiento del valor de la prima, tanto de la opción *call* como *put*, ya que se debe tener en cuenta el efecto que genera sobre los resultados realizar estimaciones con un relativamente bajo número de simulaciones, lo que implica que se pueda presentar error numérico en el algoritmo y, por ende, falta de sustento para generalizar sobre los resultados.

De igual manera, en la literatura se observa que el estudio del movimiento Browniano fraccional aplicado en las finanzas se centra en valores Hurst superiores a 0,5, por lo cual no es posible asociar este comportamiento con algún fenómeno en particular.

6. Conclusiones

La modelación del comportamiento de series financieras bajo el supuesto de normalidad reflejada en un coeficiente Hurst de 0,5 (independencia), y que se enmarca en la utilización del movimiento Browniano geométrico, no siempre se cumple en la práctica. En el presente trabajo se ha expuesto un modelo más general conocido como movimiento Browniano fraccional (MBf), del cual el movimiento Browniano geométrico o clásico es un caso particular. En este sentido, la modelación de las trayectorias de las series mediante MBf permite tomar en cuenta una característica fundamental de la variable, como lo es su comportamiento independiente o aleatorio.

La simulación del movimiento Browniano fraccional se constituye en una tarea fundamental en el momento de implementar el método de valoración, por esta razón la literatura destaca la utilización de métodos exactos como el de Cholesky, ya que parte de la función de covarianzas del MBf y además puede ser aplicado a procesos gaussianos no estacionarios, lo cual captura las características del MBf.

El criterio de máxima entropía incorporado en el método de malla estocástica a través de pesos uniformemente distribuidos en la matriz de valores de continuación permite enriquecer el modelo frente a otros métodos de valoración como

árboles binomiales, en donde dado un estado actual solamente se tiene opción de avanzar hacia uno de dos estados siguientes.

De acuerdo con los resultados obtenidos, el modelo general de movimiento Browniano fraccional aplicado a la valoración de opciones *call* y *put* americanas bajo el método de malla estocástica, muestra que la prima de la opción tiene una tendencia a disminuir cuando el comportamiento del precio del activo subyacente es persistente o tiene memoria de largo plazo. Así, se observa que el precio de la opción tiende a disminuir conforme el valor del coeficiente Hurst se acerca a 1, por lo cual este valor se aleja cada vez más de las estimaciones realizadas mediante movimiento Browniano geométrico.

En el caso de opciones cuyo precio del subyacente presente comportamiento antipersistente, se observa que la prima de la opción tiene tendencia creciente conforme el coeficiente de Hurst pasa de 0,5 hasta llegar a 0,01. En algunos casos, la prima alcanza valores tan altos que en la práctica desestimularían la compra o venta de estas opciones. Este tipo de fenómenos son poco analizados en la literatura financiera cuantitativa, posiblemente porque los procesos que se asocian a comportamientos antipersistentes tienen que ver con procesos de reversión a la media, los cuales podrían ser más frecuentes en otros campos de estudio.

En el contexto de valoración por malla estocástica con movimiento Browniano fraccional, el derecho de ejercer la opción en cualquier momento antes del vencimiento presenta comportamiento similar a los resultados encontrados en la literatura cuando se realiza la valoración mediante métodos analíticos como Black-Scholes fraccional. De aquí que el método de malla estocástica con movimiento Browniano fraccional sea una herramienta adicional a tener en cuenta por quienes realizan valoración de opciones como una alternativa para complementar análisis y comparar resultados.

Dado el alcance de este trabajo, no se puede realizar ningún análisis sobre la variabilidad observada en el comportamiento del valor de la prima, especialmente de la opción *call*, ya que se debe tener en cuenta el efecto que genera sobre los resultados realizar estimaciones con un relativamente bajo número de simulaciones. Como se mencionó, es necesario mejorar el número de simulaciones con el objetivo de obtener evidencias que permitan generalizar sobre los resultados de la variabilidad sin desconocer los posibles errores numéricos que se puedan presentar en el algoritmo utilizado.

7. Futura investigación

Valores del coeficiente de Hurst. Los estudios realizados enfatizan el análisis en valores H superiores a 0,5, y dejan espacio para estudiar las implicaciones de asumir valores para series antipersistentes ($H < 0,5$), especialmente en lo concerniente a la valoración de activos financieros que pudiesen presentar este comportamiento. Para ello, es menester profundizar el estudio y manejo de herramientas del cálculo fraccional necesarias para realizar la valoración de activos financieros cuyas series de precios no corresponden a caminatas aleatorias.

Algoritmos de programación. La implementación del método de Cholesky dentro de la malla estocástica implica computacionalmente un alto requerimiento de memoria para realizar las estimaciones. Por ello, una de las actividades por desarrollar es buscar algoritmos más eficientes para implementar este método, así como incluir algoritmos que permitan simular el movimiento Browniano fraccional a partir de otros métodos exactos.

Derivados financieros. Con el objetivo de ampliar el marco de análisis de la valoración es pertinente incluir otros derivados financieros cuyo comportamiento pueda ser modelado considerando movimiento Browniano fraccional. Asimismo, la valoración de opciones debe complementarse con la estimación de las medidas de sensibilidad o razones de cambio del precio de la opción frente a cambios en las variables contempladas en el modelo, las cuales se conocen como *Griegas*.

Referencias

- Alòs, E., Mazet, O., y Nualart, D. (2000). Stochastic calculus with respect to fractional brownian motion with hurst parameter lesser than 1/2. *Stochastic processes and their applications*, 86(1), 121-139.
- Ardila, E., Luengas, D., y Moreno, J. (2010). Metodología e interpretación del coeficiente de hurst. *ODEON*, 5, 265-290.
- Broadie, M., y Glasserman, P. (1997). Pricing american-style securities using simulation. *Journal of economic dynamics and control*, 21(8-9), 1323-1352.
- Broadie, M., Glasserman, P., y et al. (2004). A stochastic mesh method for pricing high-dimensional american options. *Journal of Computational Finance*, 7, 35-72.
- Broadie, M., Glasserman, P., y Ha, Z. (2000). Pricing american options by simulation using a stochastic mesh with optimized weights. En *Probabilistic constrained optimization* (p. 26-44). Springer.
- Cavanzo Nisso, A., y Blanco Castañeda, L. (2004). El movimiento browniano fraccional como límite de ciertos tipos de procesos estocásticos. *Revista Colombiana de Estadística*; 28(2), 173-191.
- Cheridito, P. (2001). *Regularizing fractional brownian motion with a view towards stock price modelling* (Tesis Doctoral no publicada). ETH Zurich.
- Conrad, K. (2004). Probability distributions and maximum entropy. *Entropy*, 6(452), 10.
- Delgado, O. Y. Q., y Delgado, J. R. (2011). Estimación del exponente de Hurst y la dimensión fractal de una superficie topográfica a través de la extracción de perfiles. *UD y la geomática*(5), 84-91.
- Dieker, T. (2004). *Simulation of fractional brownian motion* (Tesis de Master no publicada). University of Twente, Amsterdam, The Netherlands.
- Einstein, A. (1905). On the motion required by the molecular kinetic theory of heat of small particles suspended in a stationary liquid. *Annalen der Physik*, 17(8), 549-560.

Elliott, R. J., y van der Hoek, J. (2003). A general fractional white noise theory and applications to finance. *Mathematical Finance*, 13(2), 301-330.

Escot Mangas, L. (2000). *Dinámica económica caótica: una aplicación al estudio del ciclo y el crecimiento económico*. Universidad Complutense de Madrid: Servicio de Publicaciones.

Flórez Ríos, L. S. (2008). Evolución de la teoría financiera en el siglo xx. *Ecos de economía*, 12(27).

Guenoun, H., Jacquier, A., Roome, P., y Shi, F. (2014). Asymptotic behaviour of the fractional heston model. *arXiv preprint arXiv:1411.7653*.

Hu, Y., y Øksendal, B. (2003). Fractional white noise calculus and applications to finance. *Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics*, 6(01), 1-32.

Hurst, H. E. (1951). Long term storage capacity of reservoirs. *ASCE Transactions*, 116(776), 770-808.

Jean-Francois, C. (2000). Simulation and identification of the fractional brownian motion: A bibliographical and comparative study. *Journal of statistical software*, 5, 1-53.

Jondeau, E., Poon, S.-H., y Rockinger, M. (2007). *Financial modeling under non-gaussian distributions*. Springer Science & Business Media.

Juárez, G. S., y et al. (2007). Procesos de Hurts y movimientos brownianos fraccionales en mercados fractales. *Revista de Administración, Finanzas y Economía*, 1(1), 1-21.

Mandelbrot, B. B. (2013). *Fractals and scaling in finance: Discontinuity, concentration, risk. selecta volume e*. Springer Science & Business Media.

Mandelbrot, B. B., y Van Ness, J. W. (1968). Fractional brownian motions, fractional noises and applications. *SIAM review*, 10(4), 422-437.

Martínez, F. V. (2008). *Riesgos financieros y económicos/financial and economical risks: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning Editores.

Necula, C. (2002). Option pricing in a fractional brownian motion environment. <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.1286833>.

Norros, I. (1994). A storage model with self-similar input. *Queueing systems*, 16(3-4), 387-396.

Nualart, D. (2003). Stochastic integration with respect to fractional brownian motion and applications. *Contemporary Mathematics*, 336, 3-40.

Ortega Andrade, J. F., y et al. (2006). *Simulación numérica de integrales estocásticas y aplicaciones a las finanzas* (B.S. thesis). Quito: USFQ, 2006.

Ostaszewicz, A. J., y et al. (2013). *The hurst parameter and option pricing with fractional brownian motion* (Tesis Doctoral no publicada). University of Pretoria.

Ramírez, J. C., y Chacón Arias, O. (2013). Los riesgos de no ser normal en finanzas: un ensayo sobre el comportamiento leptocúrtico de las series accionarias de colombia. *Economía Mexicana. Nueva Época*, 1.

Rogers, L. C. G. (1997). Arbitrage with fractional brownian motion. *Mathematical Finance*, 7(1), 95-105.

Salazar-Núñez, H. F., Venegas-Martínez, F., y Calderón-Villareal, C. (2017). ¿Existe memoria larga en mercados bursátiles, o depende del modelo, periodo o frecuencia? *Ensayos. Revista de economía*, 36(1), 1-24.

Shannon, C. E. (2001). A mathematical theory of communication. *ACM SIG-MOBILE Mobile Computing and Communications Review*, 5(1), 3-55.

Shea, J., Zachariou, I., y Pasik-Duncan, B. (2011). Computational methods for stochastic differential equations and stochastic partial differential equations involving standard brownian and fractional brownian motion. *Challenges of Modern Technology*, 2.

Shevchenko, G. (2015). Fractional brownian motion in a nutshell. En *International journal of modern physics: Conference series* (Vol. 36, p. 1560002).

Sottinen, T., y Valkeila, E. (2001). *Fractional brownian motion as a model in finance*. Helsinki: Department of Mathematics, University of Helsinki.

Tié, F. R. D. (2007). La hipótesis fractal como marco para la investigación de los mercados financieros: aplicación del análisis r/s al caso español. En *El comportamiento de la empresa ante entornos dinámicos: Xix congreso anual y xv congreso hispano francés de aedem* (p. 15).

Xu, L., Shen, G., y Yao, D. (2014). Pricing of equity indexed annuity under fractional brownian motion model. , 1-9.