Modelo estocástico para el precio de activos en alta frecuencia basado en procesos de ramificación aleatoriamente indexados

Stochastic model for assets price in high frequency based on randomly indexed branching processes

John Freddy Moreno Trujillo*

* MSc en Matemática Aplicada. Docente-Investigador, CIPE-ODEON, Universidad Externado de Colombia. Bogotá (Colombia). [jhon.moreno@uexternado.edu.co].
Artículo recibido el 01 de agosto de 2018.
Aceptado el 01 de septiembre de 2018.
Para citar este artículo:
Moreno Trujillo, J. F. (2018). Modelo estocástico para el precio de activos en alta frecuencia basados en procesos de ramificación aleatoriamente indexados. ODEON, 14, pp. 163-181.
DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n14.07

Introducción

Desde el trabajo seminal de L. Bachelier (1900), en el cual se incorpora el movimiento Browaniano como representación de las variaciones aleatorias de los precios especulativos de los activos, la presencia de este proceso en los modelos financieros ha sido casi obligatoria. Adicionalmente, la característica de no negatividad de los precios ha hecho del movimiento Browniano geométrico el modelo primario para la descripción del precio de activos riesgosos (ver como referencia de esta teoría el libro de Trujillo, 2015). Pero, como es bien conocido, esta consideración implica que los retornos logarítmicos sobre intervalos fijos de tiempo son variables aleatorias gaussianas independientes, idénticamente distribuidas. Trabajos como los de Fama (1965), Granger y Morgenstern (1963), entre otros, presentan evidencia empírica de la aleatoriedad de los retornos, pero la característica Gaussiana ha sido ampliamente criticada por autores como Mandelbrot (1997) o Fama (1965), entre muchos otros, que observan características de leptocurtosis y colas anchas en la distribución de los retornos logarítmicos.

Autores como Mandelbrot (1997), Madan y Seneta (1990), Kon (1984), Kou (2002), por mencionar algunos, proponen modelos alternativos que buscan capturar de una mejor manera las características observadas en los precios, pero muchos de estos modelos plantean retos diferentes en términos de calibración, como se muestra en Trujillo (2011), o en la interpretación y estimación de sus parámetros, como se observa en Ardila, Luengas y Trujillo (2010). Adicional a lo anterior, al considerar el comportamiento de los precios de los activos negociados, en lo que se denomina como "alta frecuencia", los modelos basados en el movimiento Browniano o sus extensiones no parecen capturar de forma correcta lo observado.

Entendiendo que la dinámica de los mercados a las velocidades que demandan las negociaciones de alta frecuencia (HFT) es esencialmente diferente a lo que se puede observar a velocidades "estándar" (al momento de escribir este documento ya se considera la transmisión de las órdenes de negociación mediante ondas, lo cual permite considerar más de 10000 órdenes por segundo), es natural preguntarse si es posible establecer algún tipo de modelo para describir el comportamiento de los precios en este contexto. El objetivo de este documento es considerar el modelo propuesto por T. W. Epps en 1996, en el cual se describen los precios de los activos mediante un proceso de salto puro que resulta de adaptar un proceso de ramificación, como una alternativa razonable para describir el comportamiento observado por los precios en alta frecuencia.

El modelo está basado en considerar que los precios se pueden descomponer en *partículas de precio*, cada una de las cuales puede generar una descendencia aleatoria de nuevas partículas, de tal forma que el agregado de estas nuevas partículas determina el nuevo precio observado. Los momentos en los cuales se producen las nuevas generaciones de partículas descendientes están determinados por fuerzas de mercado, y son descritos mediante un proceso Poisson de intensidad constante (la cual puede ser ajustada para describir la velocidad de negociación).

El número de partículas asociadas a un precio se calcula estableciendo una unidad de variación mínima en el mercado (valor monetario de cada partícula), y se considera que la posible descendencia de estas partículas es descrita por una función de distribución particular.

En las siguientes secciones se presentan los resultados esenciales para entender el modelo propuesto, así: en la sección 1 se muestran algunas definiciones básicas sobre procesos de ramificación, y la extensión de este tipo de procesos al caso aleatoriamente indexado. En la sección 2 se presenta el modelo de precios junto con la construcción de las expresiones para el cálculo de sus momentos. En la sección 3 se considera el caso en el cual la descendencia sigue una distribución geométrica de dos parámetros. En la sección 4 se presentan algunas simulaciones de los precios bajo las condiciones expuestas en las secciones anteriores, y en la sección 5, las conclusiones y algunas de las futuras extensiones del trabajo.

1. Elementos básicos sobre procesos de ramificación

En 1996, T. W. Epps propone un modelo para describir el precio de activos riesgosos a partir de una extensión de un proceso de ramificación de Galton-Watson, en la cual el número de nuevas generaciones en el intervalo $\left[0,t\right]$ está determinado por un proceso Poisson N_t, de intensidad λ constante. En esta sección se describe este modelo, y se introducen inicialmente algunas definiciones básicas relacionadas con los procesos de ramificación.

Un proceso de ramificación de Galton-Watson $\left\{Z_n\right\}_{n=0,1,2,\ldots}$, permite modelar el tamaño de una población en instantes de tiempo fijos $n = 0,1,2\ldots$, de forma que, Z_n denota el tamaño de la población en el instante n, considerando que $Z_0 \geq 1$.

Se denota por X_{nj} a las variables aleatorias que describen el número de descendientes del individuo j de la población en el instante n. Estas variables toman valores en los enteros positivos ($k = 0,1,2,\ldots$), con distribución denotada por

$p_k = P\left[X_{nj} = k\right]$, y se asumen independientes e idénticamente distribuidas a una variable X de media μ y varianza σ^2. Se considera que los individuos nacidos en el instante n viven hasta el instante $n+1$, momento en el cual tienen descendencia y mueren.

En este contexto, un proceso de ramificación de Galton-Watson se define como la sucesión de variables aleatorias $\left\{Z_0, Z_1, Z_2, \ldots\right\} = \left\{Z_n\right\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde:

$$Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{nj} \tag{1}$$

cuando $Z_{n-1} > 0$, y $Z_{n-1} = 0$ si el valor de Z_n es 0. La ecuación (1) indica que el tamaño de la población en el instante n es la suma de la descendencia del total de los individuos presentes en el instante anterior Z_{n-1}. Este tipo de procesos se pueden caracterizar por medio de su función generadora de probabilidad, como se muestra a continuación.

1.1. Función generadora de probabilidad de Z_n

Para una variable aleatoria discreta X con valores $\left\{0,1,2,..\right\}$, su función generadora (o generatriz) de probabilidad se define como:

$$G_X\left(\zeta\right) = E\left[\zeta^X\right] = \sum_{x=0}^{\infty} \zeta^x P\left[X = x\right] \; ; \left|t\right| \leq 1 \tag{2}$$

de donde: $G_X\left(0\right) = P\left[X = 0\right]$ y $G_X\left(1\right) = \sum_{x=0}^{\infty} P\left[X = x\right] = 1$.

Algunas propiedades de esta función son:

1. $\frac{d^k}{d\zeta^k} G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=0} = k!P\left[X = k\right]$ para $k = 0, 1, 2, \ldots$

2. Si $E\left[X^k\right]$ existe, entonces $\frac{d^k}{d\zeta^k} G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=1} = E\left[x\left(x-1\right)\left(x-2\right)\ldots\left(x-k+1\right)\right]$ para $k = 1, 2, \ldots$. Se tiene entonces que para una variable aleatoria X:

$$E\left[X\right]=\frac{d}{d\zeta}G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=1} \tag{3}$$

$$V\left[X\right]=\frac{d^2}{d\zeta^2}G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=1}+\frac{d}{d\zeta}G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=1}-\left(\frac{d}{d\zeta}G_X\left(\zeta\right)|_{\zeta=1}\right)^2 \tag{4}$$

3. Si X y Y son variables aleatorias independientes, entonces $G_{X+Y}\left(\zeta\right)=G_X\left(\zeta\right)G_Y\left(\zeta\right)$, y, de forma general, si $Z=\sum_{i=1}^{n}X_i$, donde las X_i son variables aleatorias independientes, entonces $G_Z\left(\zeta\right)=G_{X_1}\left(\zeta\right)G_{X_2}\left(\zeta\right)\ldots G_{X_n}\left(\zeta\right)$. Si además, las variables X_i son idénticamente distribuidas, con función generadora de probabilidad $G_X\left(\zeta\right)$, entonces, $G_Z\left(\zeta\right)=\left(G_X\left(\zeta\right)\right)^n$.

   Al considerar variables aleatorias independientes $X_1,\ X_2\ ,...,\ X_N$, donde N es una variable aleatoria independiente de las X_i la función generadora de probabilidad de $S_N=\sum_{i=1}^{N}X_i$ es:

$$G_{S_N}\left(\zeta\right)=\sum_{x=0}^{\infty}\zeta^x P\left[S_N=x\right]$$

Condicionando sobre los valores de la variable N:

$$P\left[S_N=x\right]=\sum_{n=0}^{\infty}P\left[S_N=x\mid N=n\right]P\left[N=n\right]$$

entonces,

$$G_{S_N}\left(\zeta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left[N=n\right]\sum_{x=0}^{\infty}P\left[S_N=x\mid N=n\right]\zeta^x$$

luego,

$$G_{S_N}\left(\zeta\right)=\sum_{n=0}^{\infty}P\left[N=n\right]\left(G_X\left(\zeta\right)\right)^n=G_N\left(G_X\left(\zeta\right)\right) \tag{5}$$

En el caso de un proceso de ramificación se tiene que $Z_n = \sum_{j=1}^{Z_{n-1}} X_{nj}$, luego su función generadora de probabilidad está dada por:

$$G_{Z_n}\left(\zeta\right) = E\left[\zeta^{Z_n}\right] = G_{Z_{n-1}}\left(G_X\left(\zeta\right)\right) \tag{6}$$

Denotando por $\beta = G_X\left(\zeta\right)$, se tiene que $G_{Z_n}\left(\zeta\right) = G_{Z_{n-1}}\left(\beta\right)$, y al seguir la recursión que plantea la ecuación (6) se llega a:

$$G_{Z_{n-1}}\left(\zeta\right) = G_{Z_{n-2}}\left(G_X\left(\zeta\right)\right)$$

de donde,

$$G_{Z_{n-1}}\left(\beta\right) = G_{Z_{n-2}}\left(G_X\left(\beta\right)\right) = G_{Z_{n-2}}\left(G_X\left(G_X\left(\zeta\right)\right)\right)$$

y en general,

$$G_{Z_n}\left(\zeta\right) = G_{Z_1}\left(G_X\left(G_X\left(G_X\left(\ldots G_X\left(\zeta\right)\right)\right)\right)\right) \tag{7}$$

Como Z_1 sigue la distribución de la variable X, si se parte de $Z_0 = 1$, entonces:

$$G_{Z_n}\left(\zeta\right) = G_X\left(G_X\left(G_X\left(G_X\left(\ldots G_X\left(\zeta\right)\right)\right)\right)\right) = G_X^{[n]}\left(\zeta\right) \tag{8}$$

que es la composición de la función generadora de X con ella misma, n veces. Con este resultado sobre la función generadora de probabilidad del proceso de ramificación es posible determinar expresiones para su valor esperado y su varianza.

1.2. Valor esperado y varianza de Z_n

Por las propiedades de la función generadora de probabilidad se tiene que:

$$E\left[Z_n\right] = \frac{d}{d\zeta} G_{Z_n}\left(\zeta\right)|_{\zeta=1} = \frac{d}{d\zeta}[G_{Z_{n-1}}\left(G_X\left(\zeta\right)\right)]|_{\zeta=1} = G'_{Z_{n-1}}\left(G_X\left(1\right)\right)G'_X\left(1\right) = G'_{Z_{n-1}}\left(1\right)\mu$$

pero,

$$G'_{Z_{n-1}}(1)=\frac{d}{d\zeta}[G_{Z_{n-2}}(G_X(1))]=G'_{Z_{n-2}}(G_X(1))G'_X(1)=G'_{Z_{n-2}}(1)\mu$$

luego,

$$E[Z_n]=G'_{Z_{n-1}}(1)\mu=G'_{Z_{n-2}}(1)\mu^2$$

Continuando con este proceso recursivo se llega a que:

$$E[Z_n]=\mu^n \tag{9}$$

Es importante notar que si $n\to\infty$, entonces:

$$E[Z_n]=\mu^n\to\begin{cases}\infty \text{ si } \mu>1\\ 1 \text{ si } \mu=1\\ 0 \text{ si } \mu<1\end{cases}$$

que es un primer indicador de lo que puede suceder con la población en el largo plazo. Para calcular la varianza se considera que:

$$\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{Z_n}(\zeta)=G''_{Z_{n-1}}(G_X(\zeta))(G'_X(\zeta))^2+G'_{Z_{n-1}}(G_X(\zeta))G''_X(\zeta) \tag{10}$$

y como:

$$V[Z_n]=\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{Z_n}(\zeta)|_{\zeta=1}+\frac{d}{d\zeta}G_{Z_n}(\zeta)|_{\zeta=1}-\left(\frac{d}{d\zeta}G_{Z_n}(\zeta)|_{\zeta=1}\right)^2$$

y $E[Z_n]=\frac{d}{d\zeta}G_{Z_n}(\zeta)|_{\zeta=1}=\mu^n$, entonces:

$$V[Z_n]=\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{Z_n}(\zeta)|_{\zeta=1}+\mu^n-(\mu^n)^2 \tag{11}$$

de donde,

$$V\left[Z_n\right]-\mu^n+\mu^{2n}=\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{Z_n}\left(\zeta\right)|_{\zeta=1} \tag{12}$$

y de forma análoga,

$$V\left[Z_{n-1}\right]-\mu^{n-1}+\mu^{2n-2}=\frac{d^2}{d\zeta^2}G_{Z_{n-1}}\left(\zeta\right)|_{\zeta=1} \tag{13}$$

Como $G_X''\left(1\right)=\sigma^2-\mu+\mu^2$, se llega a que:

$$V\left[Z_n\right]-\mu^n+\mu^{2n}=\left(V\left[Z_{n-1}\right]-\mu^{n-1}+\mu^{2n-2}\right)\mu^2+\mu^{n-1}\left(\sigma^2-\mu+\mu^2\right)$$

lo que lleva a la expresión

$$V\left[Z_n\right]=V\left[Z_{n-1}\right]\mu^2+\sigma^2\mu^{n-1} \tag{14}$$

Dado que $V\left[Z_1\right]=V\left[X\right]=\sigma^2$, se tiene que:

$$V\left[Z_n\right]=\mu^{n-1}\sigma^2\sum_{k=0}^{n-1}\mu^k=\begin{cases}\sigma^2 n \;\; si \;\; \mu=1\\ \mu^{n-1}\sigma^2\left(\dfrac{1-\mu^n}{1-\mu}\right) \; si \;\; \mu\neq 1\end{cases} \tag{15}$$

De acuerdo con el valor del término μ se tiene la siguiente clasificación de los procesos de Galton-Watson:

$$\begin{cases}\mu<1 \;\; proceso \;\; subcrítico\\ \mu=1 \;\; proceso \;\; crítico\\ \mu>1 \;\; proceso \;\; supercrítico\end{cases} \tag{16}$$

2. Modelo para el precio de activos basado en procesos de ramificación

En este modelo se considera que los precios de los activos riesgosos pueden ser descritos como procesos estocásticos con espacio de estados discreto y espacio de parámetros continuo, es decir, el precio en un instante de tiempo fijo es visto como una variable aleatoria discreta cuyos posibles valores son múltiplos enteros de una unidad de variación mínima (mínimo *tick*) α. La idea es considerar que el precio en algún instante t $S(t)$, es igual a la agregación de un conjunto de *partículas de precio* X_{nj}, que toman valores en los enteros positivos ($k = 0,1,2,\ldots$), con distribución denotada por $p_k = P\left[X_{nj} = k\right]$ y con $X_{n0} = 0$ para todo n, multiplicadas por la mínima variación posible del precio en el mercado en el cual se esté negociando. Por ejemplo, si en el instante t se tiene que $S(t) = 2{,}5$, y se asume que la mínima unidad de variación es $\alpha = 0{,}1$, entonces el precio puede ser interpretado como la suma de 25 partículas de precio.

Ahora, los cambios en el precio ocurren en instantes aleatorios sobre el intervalo $\left[0,t\right]$, descritos por un proceso de valor discreto y parámetro continuo $\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$. Este proceso determina los momentos en los cuales desaparecen las partículas de precio, lo que crea una nueva generación de partículas, producto de algún choque informacional o fuerzas de mercado.

Este tipo de aproximación para el precio de activos es razonable en lo que se puede denominar microescala o alta frecuencia, en donde los precios se mantienen a un determinado nivel por un periodo muy corto de tiempo, para luego cambiar como producto de las fuerzas del mercado.

El modelo de precio se define a partir de un proceso de ramificación estándar de Galton-Watson $Z_n = \sum_{j=0}^{Z_{n-1}} X_{nj}$, junto con un proceso no decreciente de valor entero $\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$, con $N_0 = 0$ de incrementos estacionarios e independientes. El proceso $\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$ se considera independiente de las variables X_{nj}. Tomando $S(0) \equiv Z_0 \geq 1$, se define

$$\left\{S(t)\right\}_{t\geq 0} \equiv \left\{S_{N_t}\right\}_{t\geq 0} = \sum_{j=0}^{S_{N_{t-}}} X_{nj} \tag{17}$$

que es un proceso de valores enteros que evoluciona en tiempo continuo. Esta es una clase de proceso de ramificación aleatoriamente indexado como la introducida por Smith y Wilkinson (1969). Como se indicó, $\left\{N_t\right\}_{t\geq 0}$ es un proceso que cuenta los eventos de información (choques) hasta el instante t, luego el modelo propuesto para $S(t)$ es claramente un proceso de salto puro, dado que $S(t)$ no cambia entre los choques de información, y $S(t)-S(t-)$ es siempre un múltiplo entero del mínimo *tick*.

El modelo también implica la existencia de una probabilidad positiva de extinción, es decir, una probabilidad positiva del evento $S(t)=0$, que ocurre si $X_{nj}=0$, para $n=N_{t-}+1$ y cada $j\in\{1,2,3,\ldots,N_{t-}\}$. Este evento se puede interpretar como una situación de bancarrota.

2.1. Función generadora de probabilidad y momentos de los precios

Como las variables aleatorias X_{nj}, son independientes e idénticamente distribuidas a una variable X con función generadora de probabilidad $G_X(\zeta)$, la función generadora de probabilidad del precio del activo después de n choques informacionales S_n, dado S_{n-1}, es:

$$G_{S_n}\left(\zeta|S_{n-1}\right)=E\left[\zeta^{S_n}|S_{n-1}\right]=E\left[\zeta^{\sum_{j=0}^{S_{n-1}}X_{nj}}|S_{n-1}\right]=\left[G_X\left(\zeta\right)\right]^{S_{n-1}} \tag{18}$$

De lo anterior se sigue que la función generadora de S_n dado S_{n-2}, es:

$$G_{S_n}\left(\zeta|S_{n-2}\right)=\left[G_X(G_X\left(\zeta\right))\right]^{S_{n-2}} \tag{19}$$

y en general,

$$G_{S_n}\left(\zeta|S_0\right)=\left[G_X^{[n]}\left(\zeta\right)\right]^{S_0} \tag{20}$$

Dado un valor inicial $S(0)=S_0$, la función generadora de probabilidad de $\left\{S(t)\right\}_{t\geq 0}\equiv\left\{S_{N_t}\right\}_{t\geq 0}$ está dada por:

$$G_{S(t)}\left(\zeta|S_0\right)=E\left\{\left[G_X^{[N_t]}\left(\zeta\right)\right]^{S_0}\right\}=\sum_{n=0}^{\infty}\left[G_X^{[n]}\left(\zeta\right)\right]^{S_0}P\left[N_t=n\right] \tag{21}$$

A partir de esta expresión se pueden establecer los momentos de $S(t)$. Como se explicó en secciones anteriores, se tiene que $\left(G_X^{[n]}(1)\right)' = \left[G_X'(1)\right]^n = \mu^n$, donde $\mu = E[X]$, luego el valor esperado de $S(t)$ es:

$$E\left[S(t)\right] = S(0)E\left[\mu^{N_t}\right] = S(0)G_{N_t}(\mu) \tag{22}$$

y la varianza del precio es:

$$V\left[S(t)\right] = S(0)\sigma^2 E\left[N_t\right] \tag{23}$$

cuando $\mu = 1$, y

$$V\left[S(t)\right] = \left[G_{N_t}(\mu^2) - (G_{N_t}(\mu))^2\right]S(0)^2 + \frac{\sigma^2}{\mu(\mu-1)}\left[G_{N_t}(\mu^2) - G_{N_t}(\mu)\right]S(0) \tag{24}$$

cuando $\mu \neq 1$.

De las expresiones anteriores se tiene que el valor esperado y la varianza de la rentabilidad bruta del activo son:

$$E\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = G_{N_t}(\mu) \tag{25}$$

y,

$$V\left[\frac{S(t)}{S(0)}\right] = \kappa_t + \eta_t S(0)^{-1} \tag{26}$$

donde $\kappa_t \geq 0$ y $\eta_t > 0$ son funciones de μ, σ y de los parámetros del proceso $\{N_t\}_{t\geq 0}$. La expresión (26) muestra que hay una relación inversa entre la varianza condicional del retorno y el nivel inicial del precio del activo, que es un resultado frecuentemente observado en los mercados.

3. Precio de activos bajo descendencia geométrica

De lo expuesto en las secciones anteriores se encuentra que la caracterización completa del precio del activo depende de:

1. El proceso N_t que denota el número de choques informacionales en $[0, t]$.
2. La distribución de probabilidad asociada a las variables que describen la descendencia de las partículas de precio.

Un supuesto razonable, desde la perspectiva de la aplicabilidad del modelo, es considerar que N_t es un proceso Poisson con intensidad λ constante. Bajo este supuesto, la función generadora de probabilidad de $S(t)$ es:

$$G_{S(t)}\left(\zeta|S_0\right) = E\left\{\left[G_X^{[N_t]}\left(\zeta\right)\right]^{S_0}\right\} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n}{n!}\left[G_X^{[n]}\left(\zeta\right)\right]\right)^{S_0} \tag{27}$$

y como

$$G_{N_t}\left(\zeta\right) = E\left[\zeta^{N_t}\right] = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\zeta\lambda t\right)^k}{k!} = e^{\lambda t\left(\zeta-1\right)} \tag{28}$$

entonces,

$$E\left[S\left(t\right)\right] = S\left(0\right)G_{N_t}\left(\mu\right) = S\left(0\right)e^{\lambda t\left(\mu-1\right)} \tag{29}$$

$$V\left[S\left(t\right)\right] = S\left(0\right)\sigma^2\lambda t \tag{30}$$

cuando $\mu = 1$, y

$$V\left[S\left(t\right)\right] = \left[e^{\lambda t\left(\mu^2-1\right)} - e^{2\lambda t\left(\mu-1\right)}\right]S\left(0\right)^2 + \frac{\sigma^2}{\mu\left(\mu-1\right)}\left[e^{\lambda t\left(\mu^2-1\right)} - e^{\lambda t\left(\mu-1\right)}\right]S\left(0\right) \tag{31}$$

cuando $\mu \neq 1$.

La selección de la distribución de la descendencia estará claramente determinada por las características observadas en el precio del activo que se va a describir, pero es razonable considerar distribuciones cuya masa de probabilidad esté altamente concentrada cerca de la unidad, dado que no se espera que se presenten grandes cambios en los precios en periodos de tiempo muy cortos. Adicionalmente, dadas las características de las expresiones presentadas para describir el precio, es conveniente considerar distribuciones para las cuales se puedan encontrar expresiones simples para la composición n veces de su función generadora de probabilidad. A continuación se considera el caso en el cual la descendencia sigue una distribución geométrica de dos parámetros y N_t es un proceso Poisson con intensidad λ constante.

3.1. Descendencia geométrica

En este caso se asume que las variables aleatorias que determinan la descendencia de las partículas de precio X_{nj} son independientes e idénticamente distribuidas a una variable X que sigue una distribución geométrica de dos parámetros, de forma que:

$$p_0 = P\left[X = 0\right] = 1 - a \tag{32}$$

$$p_k = P\left[X = k\right] = ab\left(1-b\right)^{k-1}; k = 1,\ 2,\ 3,\ldots$$

con $0 < a < 1$ y $0 < b < 1$. La función generadora de probabilidad de esta distribución es:

$$G_X\left(\zeta\right) = 1 - a + \frac{ab\zeta}{1-\left(1-b\right)\zeta}\ ,\ \zeta \in \left[0,1\right] \tag{33}$$

De esta expresión se tiene que:

$$\mu = E\left[X\right] = G_X^{'}\left(1\right) = \frac{a}{b} \tag{34}$$

y

$$\sigma^2 = V\left[X\right] = G_X^{''}\left(1\right) + G_X^{'}\left(1\right) - \left(G_X^{'}\left(1\right)\right)^2 = \frac{a}{b}\left(\frac{\left(1-b\right)+\left(1-a\right)}{b}\right) \tag{35}$$

Denotando por $\nu = G_X^{''}\left(1\right) = 2\frac{1-b}{b}\mu$, la función generadora de probabilidad se puede escribir como:

$$G_X\left(\zeta\right) = 1 - \frac{\mu\left(1-\zeta\right)}{1+\frac{\nu}{2\mu}\left(1-\zeta\right)}\ ,\ \zeta \in \left[0,1\right] \tag{36}$$

A partir de la expresión (36) se puede verificar que la composición de esta función generadora de probabilidad con ella misma, *n*-veces es:

$$G_X^{[n]}(\zeta)=1-\frac{\mu^n(1-\zeta)}{1+\frac{\nu}{2\mu}\frac{1-\mu^n}{1-\mu}(1-\zeta)} \tag{37}$$

de donde

$$\frac{d^k}{d\zeta^k}G_X^{[n]}(\zeta)=\frac{k!\mu^n\left[\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}\right]^{k-1}}{\left[1+\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}(1-\zeta)\right]^{k+1}}\ ,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{38}$$

Utilizando la expresión (38) y las propiedades de la función generadora de momentos se tiene que:

$$P\left[X=k\right]=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\zeta^k}G_X^{[n]}(0)=\frac{\mu^n\left[\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}\right]^{k-1}}{\left[1+\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}\right]^{k+1}}\ ,\ k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots. \tag{39}$$

luego,

$$P\left[X=0\right]=1-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mu^n\left[\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}\right]^{k-1}}{\left[1+\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}\right]^{k+1}}=1-\frac{\mu^n}{1+\frac{\nu(1-\mu^n)}{2\mu(1-\mu)}} \tag{40}$$

Bajo esta distribución de la descendencia, la función generadora de probabilidad del precio está dada por:

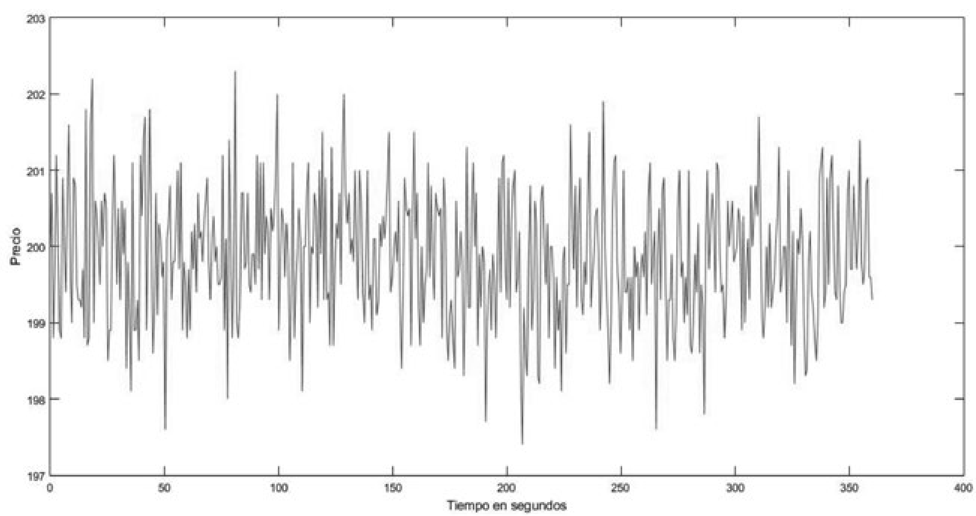
$$G_{S(t)}\left(\zeta|S_0\right)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{e^{-\lambda t}\left(\lambda t\right)^n}{n!}\left[1-\frac{\mu^n\left(1-\zeta\right)}{1+\frac{\nu}{2\mu}\frac{1-\mu^n}{1-\mu}\left(1-\zeta\right)}\right]\right)^{S_0} \tag{41}$$

Es importante anotar que bajo esta distribución de la descendencia el proceso $S\left(t\right)e^{-\lambda t\left(\mu-1\right)}$ es martingala para todo $t\geq 0$, lo que permite establecer las condiciones necesarias para garantizar la ausencia de oportunidades de arbitraje en un mercado donde los precios de los activos siguen este comportamiento.

4. Simulación de precio bajo el esquema propuesto

La figura 1 muestra una posible trayectoria del precio del activo bajo el esquema propuesto. Se tomaron para este caso: $S_0=200$, $T=360$ segundos, $\lambda=1{,}5$, $a=0{,}98$ y $b=0{,}98$.

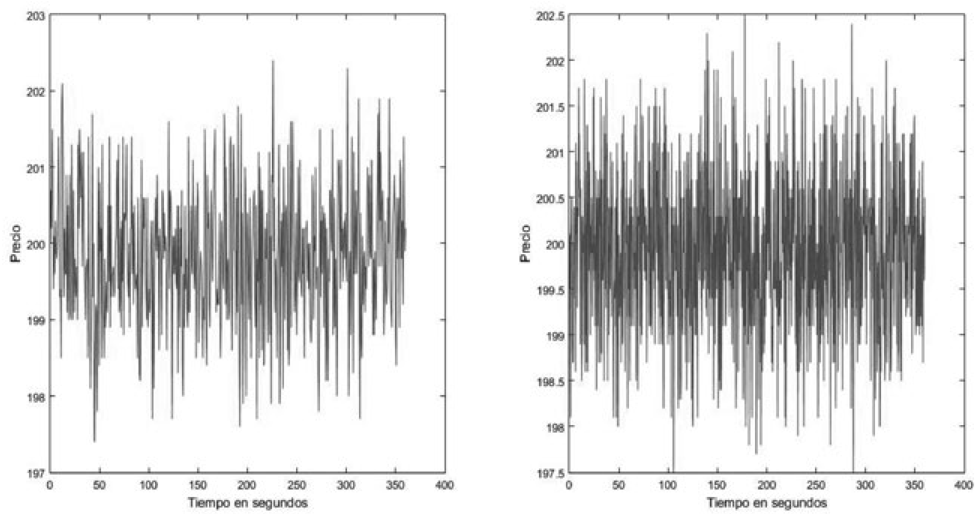
Figura 1: Simulación de una trayectoria del precio bajo el modelo de ramificación propuesto



Fuente: elaboración propia.

Como se muestra en la figura 1, la trayectoria descrita difiere de las comúnmente observadas para describir el precio a velocidades normales, pero se asemeja a lo observado en alta frecuencia. El parámetro λ permite controlar el número de nuevas generaciones observadas, lo que puede interpretarse como el número de ofertas lanzadas al mercado en un periodo de tiempo muy corto. Por ejemplo, la figura 2 muestra dos posibles trayectorias del precio del activo, bajo la misma distribución geométrica de la descendencia, pero con intensidades distintas (izquierda $\lambda = 1{,}5$, derecha $\lambda = 3$).

Figura 2: Simulación de trayectorias del precio bajo el modelo de ramificación con dos valores diferentes de la intensidad



Fuente: elaboración propia.

5. Conclusiones y extensiones

El modelo presentado en este documento se puede considerar como una primera aproximación a la descripción estocástica del comportamiento de los precios en alta frecuencia, con la flexibilidad suficiente, vía la selección de distribución de la descendencia y la intensidad del procesos Poisson, para funcionar bien en un primer ejercicio de modelación. Surge como reto para futuros procesos, por mencionar algunos, el desarrollo de expresiones explicitadas para los momentos del modelo de precio bajo distribuciones diversas de la descendencia, la consideración formal de las condiciones necesarias para garantizar el no arbitraje en el mercado bajo este esquema, la construcción de estimadores del modelos bajo diferentes esquemas de la descendencia y de la intensidad, la construcción de expresiones para la valoración de derivados financieros sobre activos que siguen este comportamiento, entre muchos otros.

Lo anterior reafirma la intensión de este documento de servir para presentar al lector interesado los elementos básicos para la construcción de un modelo de precios de activos basado en procesos de ramificación aleatoriamente indexados, y despertar su interés por extender esta teoría en las más diversas direcciones.

Referencias

Ardila, E., Luengas, D. y Moreno Trujillo, J. F. (2010). Metodología en interpretación del coeficiente de Hurts. *ODEON*, 5 (1).

Bachelier, L. (1900). *Théorie de la spéculation*. Paris: Gauthier-Villars.

Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, *81*(3), 637-654.

Epps, T. W. (1996). Stock prices as branching processes. *Stochastic Models*, *12*(4), 529-558.

Granger, C. W. y Morgenstern, O. (1963). Spectral analysis of New York stock market prices 1. *Kyklos*, *16*(1), 1-27.

Kon, S. J. (1984). Models of stock returns—a comparison. *The Journal of Finance*, *39*(1), 147-165.

Kou, S. G. (2002). A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, *48*(8), 1086-1101.

Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, *38*(1), 34-105.

Madan, D. B. y Seneta, E. (1990). The variance gamma (VG) model for share market returns. *The Journal of Business*, 63(4), 511-524.

Mandelbrot, B. B. (1997). The variation of certain speculative prices. In *Fractals and scaling in finance* (pp. 371-418). Springer, New York.

Mitov, G. K. y Mitov, K. V. (2006). An option pricing formula based on branching processes. *Pliska-Studia Mathematica Bulgarica*, *18*, 213-224.

Mitov, G. K., Rachev, S. T., Kim, Y. S. y Fabozzi, F. J. (2009). Barrier option pricing by branching processes. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, *12*(07), 1055-1073.

Smith, W. L. y Wilkinson, W. E. (1969). On branching processes in random environments. *The Annals of Mathematical Statistics*, *40*(3), 814-827.

Trujillo Moreno, J. F. (2011). Estimación de parámetros en ecuaciones diferenciales estocásticas aplicadas a finanzas. *ODEON,* 6.

Trujillo Moreno, J. F. (2015). *Modelos estocásticos en finanzas*. Bogotá: Universidad Externado de Colombia.