

Modelo estocástico para el precio de activos riesgosos utilizando procesos Hawkes

Stochastic model for risky assets price using Hawkes processes

John Freddy Moreno Trujillo*

* Estudiante de Doctorado en Ciencias Económicas. Magíster en Matemática Aplicada. Docente-Investigador, CIPE-ODEON, Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [jhon.moreno@uexternado.edu.co].

Artículo recibido el 01 de diciembre de 2018.

Aceptado el 16 de diciembre de 2018.

Para citar este artículo

Moreno Trujillo, J. F. (2018). Modelo estocástico para el precio de activos riesgosos utilizando procesos Hawkes. ODEON, 15, 161-172.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n15.06>

Introducción

Es común encontrar que eventos cuya ocurrencia es observada a lo largo del tiempo tiendan a agruparse mostrando algún tipo de dependencia. Por ejemplo, las réplicas que siguen a un gran temblor de tierra, los enfrentamientos entre insurgentes tras un ataque inicial, la venta de un número significativo de unidades de un activo que desencadena un flujo precipitado de negociaciones sobre el mismo, o el colapso de un gran inversionista que lleva a una serie de choques sucesivos adversos en los mercados financieros.

Los *procesos Hawkes* son modelos matemáticos que permiten representar este tipo de comportamiento autoexcitado. Fueron propuestos por el profesor Alan Geoffrey Hawkes (1971) como procesos de conteo para describir secuencias de eventos a lo largo del tiempo, por ejemplo, el número de órdenes de negociación de un activo o los incumplimientos de obligaciones por parte de un grupo de acreditados. Cada ocurrencia de un evento excita el proceso, en el sentido de que los cambios en una secuencia de ocurrencias sucesivas son afectados durante algún periodo de tiempo por la ocurrencia del evento inicial.

La característica de autoexcitación hace a los procesos de Hawkes extensiones no markovianas de procesos Poisson, o casos especiales de procesos Poisson no homogéneos, en los que la intensidad del proceso es descrita mediante una función específica. Esta característica resulta muy útil para representar diversas situaciones financieras como, por ejemplo, el comportamiento de manada de los agentes, relaciones de dependencia temporal entre variables, presencia de ciclos de negociación, microestructura de los mercados, entre muchas otras.

Este documento tiene por objeto presentar la teoría básica necesaria para entender los procesos Hawkes y sus potenciales aplicaciones, las cuales son cada vez más frecuentes en finanzas. Lo anterior se puede ver en trabajos como el de Chávez-Demoulin y McGill (2012), en donde se utilizan procesos Hawkes para modelar datos financieros de alta frecuencia; en Bowsher (2007), donde se modelan eventos de impacto en el mercado mediante procesos Hawkes multivariados, o en Law y Vines (2016), donde se encuentra una presentación completa de la aplicación de este tipo de procesos para modelar datos en alta frecuencia.

Como ejemplo particular de aplicación se presenta un modelo para describir el comportamiento del retorno de activos riesgosos, que es una extensión del modelo de difusión con saltos de Merton (1976a), pero que incorpora un proceso Hawke auto y mutuamente excitado.

El documento está organizado de la siguiente manera. En la primera sección se presentan algunos conceptos iniciales necesarios para definir los procesos Hawkes. En la segunda sección se presenta la definición de proceso Hawkes lineal y no lineal, y se caracteriza su comportamiento asintótico. Por último, en la sección 3 se presenta el modelo de difusión de Hawkes y su potencial extensión al caso de volatilidades estocásticas. Se invita a los lectores interesados a profundizar en la aplicación de este tipo de procesos en el planteamiento y resolución de diversos problemas financieros.

1. Conceptos iniciales

En este apartado se asumirá que los procesos considerados están definidos sobre un espacio de probabilidad filtrado (Ω, F_t, P) , para alguna medida de probabilidad P .

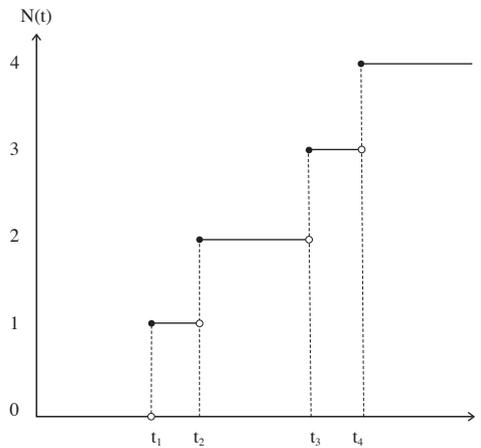
Definición 1. Un *proceso punto* o *proceso simple* sobre \mathbb{R}_+ es una sucesión de variables aleatorias no negativas $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$, con $P[0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots] = 1$.

Definición 2. Sea $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$ un proceso punto. El proceso N_t definido como:

$$N(t) = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} 1_{t_i \leq t} \quad (1)$$

donde: 1_A es la función indicadora de A , y es el *proceso de conteo* asociado con $\{t_i\}_{i \in \mathbb{N}_0}$.

El proceso $N(t)$ indica el número acumulado de ocurrencias hasta el instante t . Este tiene trayectorias continuas por la derecha con límite por la izquierda y saltos de magnitud 1. La figura 1 muestra una posible trayectoria de este proceso.

Figura 1: Ejemplo de una trayectoria del proceso $N(t)$ 

Definición 3. Dado un proceso de conteo N_t adaptado a un filtración F_t , se define el *proceso de intensidad condicional*,

$$\lambda(t) \equiv \lambda(t|F_t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} E \left[\frac{N(t+h) - N(t)}{h} \middle| F_t \right] \quad (2)$$

de forma equivalente,

$$\lambda(t) \equiv \lambda(t|F_t) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} P[N(t+h) - N(t) > 0 | F_t] \quad (3)$$

Se puede ver que la intensidad del proceso depende de la filtración seleccionada (que por lo general se asume como la filtración natural para el proceso N) denotada por F_t^N .

Definición 4. Se dice que el proceso $N(t)$ es *autoexcitado* si una ocurrencia causa un incremento en la función de intensidad condicional, este comportamiento genera *clusters* o agrupamientos temporales en el proceso punto asociado. En este sentido, es importante considerar formas de la función de intensidad condicional $\lambda(t)$ que eviten que el proceso *explote*, es decir, que si se tiene que

$t - s < \infty$ se presente que $N(t) - N(s) = \infty$. El proceso $N(t)$ se dice *autorregulado* si una ocurrencia causa un decremento en la función de intensidad condicional.

Definición 5. Para un proceso de conteo $N(t)$, la función no decreciente

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds \quad (4)$$

se denomina el *compensador* del proceso de conteo.

2. Procesos Hawkes

A continuación se presenta la definición de los procesos Hawkes lineal y no lineal, y se describen algunas de sus propiedades.

Definición 6. Un proceso $N(t)$ con filtración natural F_t^N se dice *proceso de Hawkes lineal* si satisface que:

$$P[N(t+h) - N(t) = m | F_t^N] = \begin{cases} \lambda(t)h + o(h) & \text{si } m = 1 \\ o(h) & \text{si } m > 1 \\ 1 - \lambda(t)h + o(h) & \text{si } m = 0 \end{cases} \quad (5)$$

donde la función de intensidad condicional es de la forma:

$$\lambda(t) = \lambda + \int_0^t \mu(t-s) dN(s) \quad (6)$$

para algún $\lambda > 0$ constante denominado como *intensidad de fondo* y una función $\mu: (0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ denominada *función de excitación*.

La forma de la función de intensidad condicional del proceso Hawkes puede especificarse si se consideran los instantes de tiempo $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ que conforman el proceso punto asociado a $N(t)$ hasta el instante t , de manera que:

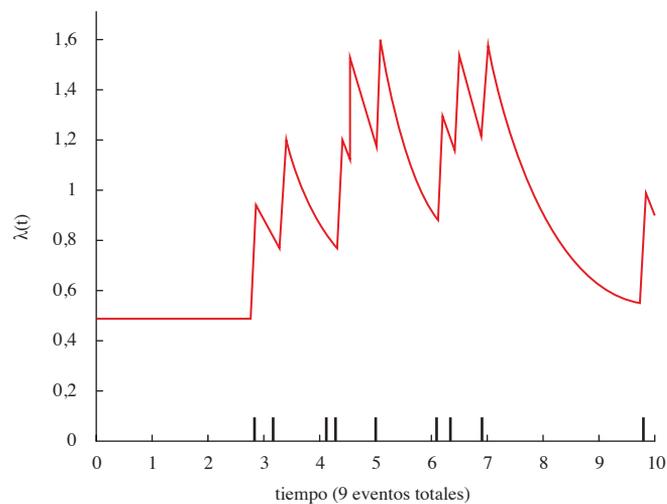
$$\lambda(t) = \lambda + \int_0^t \mu(t-s) dN(s) = \lambda + \sum_{t_i < t} \mu(t-t_i) \quad (7)$$

Se puede observar que la caracterización de la función $\lambda(t)$ requiere la especificación de la intensidad de fondo $\lambda > 0$ y de la función de excitación $\mu(\cdot)$, cuya forma funcional más común es la de un decaimiento exponencial $\mu(t) = \alpha e^{-\beta t}$. En particular, Hawkes (1971) utiliza esta forma en su trabajo original para simplificar las derivaciones teóricas posteriores. Para $\alpha, \beta > 0$, la intensidad de decaimiento exponencial es:

$$\lambda(t) = \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s) = \lambda + \sum_{t_i < t} \alpha e^{-\beta(t-t_i)} \quad (8)$$

donde: λ indica el nivel inicial del proceso, α el incremento en la intensidad de ocurrencias por cada ocurrencia presentada y β es la tasa de decaimiento en el tiempo de la influencia de estas ocurrencias. La figura 2 muestra una posible trayectoria simulada del proceso de intensidad para $\lambda = 0,5$; $\alpha = 0,5$, y $\beta = 1$, siguiendo el método propuesto en Ogata (1981), junto con el número total de eventos ocurridos $N(t)$.

Figura 2: Simulación del proceso de intensidad condicional exponencial y número de eventos



En términos generales, el proceso de intensidad condicional con decaimiento exponencial satisface la ecuación diferencial estocástica:

$$d\lambda(t) = \beta(\lambda - \lambda(t))dt + \alpha dN(t), \quad t \geq 0 \quad (9)$$

con $\lambda(0) = \lambda_0$, cuya solución se tiene al aplicar el factor integrante $FI = e^{\beta t}$ sobre (9) como sigue:

$$\begin{aligned} d\lambda(t) &= \beta(\lambda - \lambda(t))dt + \alpha dN(t) \\ d\lambda(t) + \beta\lambda(t)dt &= \beta\lambda dt + \alpha dN(t) \\ e^{\beta t} d\lambda(t) + \beta\lambda(t)e^{\beta t} dt &= \beta\lambda e^{\beta t} dt + \alpha e^{\beta t} dN(t) \\ d[e^{\beta t} \lambda(t)] &= \beta\lambda e^{\beta t} dt + \alpha e^{\beta t} dN(t) \\ e^{\beta t} \lambda(t) &= \lambda(0) + \int_0^t \beta\lambda e^{\beta s} ds + \int_0^t \alpha e^{\beta s} dN(s) \\ e^{\beta t} \lambda(t) &= \lambda(0) + \lambda(e^{\beta t} - 1) + \int_0^t \alpha e^{\beta s} dN(s) \\ \lambda(t) &= \lambda(0)e^{-\beta t} + \lambda e^{-\beta t}(e^{\beta t} - 1) + e^{-\beta t} \int_0^t \alpha e^{\beta s} dN(s) \\ \lambda(t) &= e^{-\beta t}(\lambda_0 - \lambda) + \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s) \end{aligned}$$

y se puede ver que:

$$\lambda(t) = e^{-\beta t}(\lambda_0 - \lambda) + \lambda + \int_0^t \alpha e^{-\beta(t-s)} dN(s) \quad (10)$$

es una extensión natural de (8).

El siguiente teorema describe el comportamiento asintótico del proceso Hawkes.

Teorema 1. Si $n = \int_0^\infty \mu(s) ds < 1$ y $\int_0^\infty s\mu(s) ds < \infty$, entonces, el número de eventos entre $(0, t]$ sigue, asintóticamente ($t \rightarrow \infty$), una distribución normal.

El valor de n determina cuándo el proceso Hawkes explota. Para ver esto se puede considerar la función $g(t) = E[\lambda(t)]$ y determinar su comportamiento en el límite, lo que permite caracterizar el comportamiento asintótico del proceso.

$$g(t) = E[\lambda(t)] = E\left[\lambda + \int_0^t \mu(t-s) dN(s)\right] = \lambda + \int_0^t \mu(t-s) E[dN(s)]$$

Para calcular el valor esperado en la expresión anterior, se toma el valor esperado de (2), es decir:

$$\begin{aligned} g(s) &= E[\lambda(s)] = E\left[\lim_{h \rightarrow 0^+} E\left[\frac{N(s+h) - N(s)}{h} \middle| F_s\right]\right] \\ &= E\left[E\left[\frac{dN(s)}{ds} \middle| F_s\right]\right] \\ &= \frac{E[E[dN(s)|F_s]]}{ds} \\ &= \frac{E[dN(s)]}{ds} \end{aligned}$$

de donde se sigue que $E[dN(s)] = g(s)ds$, luego:

$$g(t) = \lambda + \int_0^t \mu(t-s)E[dN(s)] = \lambda + \int_0^t \mu(t-s)g(s)ds = \lambda + \mu * g \quad (11)$$

La ecuación (11) tiene diferentes soluciones de acuerdo con el valor de n . En Asmussen (2008) se consideran tres casos: i) el caso por defecto ($n < 1$); ii) el caso propio ($n = 1$), y iii) el caso excesivo ($n > 1$). En Asmussen (2008) se demuestra que para el caso por defecto se tiene que:

$$g(t) = E[\lambda(t)] \rightarrow \frac{\lambda}{1-n} \quad \text{cuando } t \rightarrow \infty$$

y que en el caso excesivo el proceso eventualmente explota al presentar crecimiento exponencial no acotado.

Definición 7. Un proceso de conteo $N(t)$ con función de intensidad condicional de la forma:

$$\lambda(t) = \Psi\left(\int_0^t \mu(t-s)dN(s)\right) \quad (12)$$

donde $\Psi : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ y $\mu : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, es un *proceso Hawkes no lineal*.

Definición 8. Considere una colección de m procesos de conteo autoexcitados $N = \{N_1(\cdot), N_2(\cdot), \dots, N_m(\cdot)\}$. Sean $\{T_{ij}; i \in \{1, \dots, m\}, j \in \mathbb{N}\}$ tiempos de ocurrencia aleatorios para cada proceso de conteo (con t_{ij} el número de ocurrencias observadas). Si para cada $i = 1, 2, \dots, m$ el proceso $N_i(\cdot)$ tiene una función de intensidad condicional de la forma:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \mu_j(t-s) dN_j(s) \quad (13)$$

se dice que $N = \{N_1(\cdot), N_2(\cdot), \dots, N_m(\cdot)\}$ conforma un *conjunto de procesos mutuamente autoexcitados*. En particular, cuando la función de excitación es exponencial se tiene que:

$$\lambda_i(t) = \lambda_i + \sum_{j=1}^m \int_0^t \alpha_{ij} e^{-\beta_{ij}(t-s)} dN_j(s) = \lambda_i + \sum_{j=1}^m \sum_{t_{kj} < t} \alpha_{ij} e^{-\beta_{ij}(t-t_{jk})} \quad (14)$$

3. Modelo para precios de activos riesgosos

Como se indicó en secciones anteriores, una de las más recientes aplicaciones de los procesos Hawkes se ha dado en el campo financiero, como modelo para describir el efecto contagio. En Ait-Sahalia, Caho-Díaz y Laeven (2103) se introduce lo que se denomina *modelo de difusión de Hawkes*, como una extensión del modelo clásico Black-Scholes (1973), que incorporara el efecto de contagio. Pero es bien conocido por la comunidad financiera que el modelo de difusión propuesto por Black y Scholes no permite describir de forma correcta la presencia de colas anchas en la distribución de los retornos logarítmicos de muchos de los activos negociados en los mercados. En Merton (1976b) se incorpora en el modelo de difusión la presencia del fenómeno de colas anchas mediante la inclusión de saltos aleatorios, descritos por procesos Poisson, en lo que se conoce como modelo Merton de difusión con saltos.

El modelo de difusión de Hawkes extiende el de Merton al reemplazar el proceso Poisson por un proceso Hawkes auto y mutuamente excitado, que no

solo captura la presencia de colas anchas, sino que incorpora la posibilidad de *clusters* de volatilidad y efecto contagio en la dinámica de los precios.

3.1. Modelo de difusión de Hawkes

El modelo de difusión de Hawkes describe los retornos logarítmicos de m activos $X_1(\cdot), \dots, X_m(\cdot)$, donde cada activo tiene asociado un retorno constante $\mu_i \in \mathbb{R}$, una volatilidad constante $\sigma_i \in \mathbb{R}_+$ y un movimiento Browniano estándar W^i (los procesos W_i tienen coeficientes de correlación constantes $\rho_{ij} : i, j = 1, \dots, m$). Además de lo anterior, se adicionan saltos descritos por procesos Hawkes auto y mutuamente excitados, con tamaños de salto estocásticos $Z_i(t)$. Se tiene entonces que los retornos de los activos satisfacen:

$$dX_i(t) = \mu_i dt + \sigma_i dW_i^X(t) + Z_i(t) dN_i(t) \quad (15)$$

El modelo anterior puede extenderse al caso en el cual la volatilidad es estocástica, como una extensión del modelo Heston de volatilidad estocástica (Heston, 1993):

$$dX_i(t) = \mu_i dt + \sqrt{V_i(t)} dW_i^X(t) + Z_i(t) dN_i(t) \quad (16)$$

$$dV_i(t) = k_i (\theta_i - V_i(t)) dt + \xi_i \sqrt{V_i(t)} dW_i^V(t) \quad (17)$$

pero con un incremento sustancial en el número de parámetros por estimar.

Referencias

- Ait-Sahalia, Y., Cacho-Diaz, J., y Laeven, R. (2013). Modelling financial contagion using mutually exciting hawkes processes. *Preprint*.
- Asmussen, S. (2008). *Applied probability and queues* (Vol. 51). Springer Science & Business Media.
- Black, F., y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-654.

- Bowsher, C. G. (2007). Modelling security market events in continuous time: Intensity based, multivariate point process models. *Journal of Econometrics*, 141(2), 876-912.
- Chávez-Demoulin, V., y McGill, J. (2012). High-frequency financial data modeling using Hawkes processes. *Journal of Banking & Finance*, 36(12), 3415-3426.
- Hawkes, A. G. (1971). Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 83-90.
- Heston, S. L. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *The Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Law, B., y Viens, F. (2016). Hawkes processes and their applications to high-frequency data modeling. *Handbook of High-Frequency Trading and Modeling in Finance*, 9, 183.
- Merton, R. C. (1976a). The impact on option pricing of specification error in the underlying stock price returns. *The Journal of Finance*, 31(2), 333-350.
- Merton, R. C. (1976b). Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3(1-2), 125-144.
- Ogata, Y. (1981). On Lewis' simulation method for point processes. *IEEE Transactions on Information Theory*, 27(1), 23-31.