

# **Valuación con opciones reales, transformación de Edgeworth y funciones isoelásticas de utilidad**

**Real options valuation, Edgeworth transformation  
and isoelastic utility functions**

Gastón S. Milanesi\*

---

\* Doctor en Ciencias de la Administración, Universidad Nacional del Sur, Argentina. Profesor titular e investigador del Departamento de Ciencias de la Administración, Universidad Nacional del Sur (Argentina). [milanesi@uns.edu.ar], [<https://orcid.org/0000-0003-1759-6448>].

Fecha de recepción: 31 de enero de 2019.

Fecha de aceptación: 7 de junio de 2019.

Para citar este artículo:

Milanesi, G. S. (2019). Valuación con opciones reales, transformación de Edgeworth y funciones isoelásticas de utilidad. ODEON, 16, 123-163.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n16.06>

## Resumen

Las empresas de la nueva economía como *start up*, empresas de base tecnológicas, intangibles en I&D, e inversiones en estrategias innovadoras, entre otras, se caracteriza por su dinamismo y flexibilidad. Para su valoración se deben emplear modelos de opciones reales. La principal debilidad de los modelos reside en suponer mercados completos, condición difícil de cumplir en mercados emergentes. Por tal motivo, se desarrolla un modelo que combina la transformación de Edgeworth y funciones isoelásticas de utilidad (CRRA - *relative risk aversion coefficient*), incorporando grados de aversión al riesgo del agente. Se utiliza el análisis de casos, sobre un proyecto biofarmacéutico con opciones secuenciales; se aplica análisis de sensibilidad sobre el coeficiente de aversión y el valor de la opción. Se concluye sobre las ventajas del modelo, en particular, se incorpora la probabilidad extrema de éxitos y fracasos mediante momentos estocásticos de orden superior y actitudes frente al riesgo.

**Palabras clave:** opciones reales; transformación de Edgeworth; función isoelástica de utilidad; empresas de base tecnológica.

**Clasificación JEL:** G30 G32.

## Abstract

The new economics firms like start up, the technological basis firms, R&D intangible, investments in innovatives strategies, among others, they characterized by its dynamics and flexibility. For its valuation must be employ real options models. The model's main weakness reside in the complete markets assumptions, a difficult requirement to archive in emerging markets. For that is develop a model that combines the Edgeworth transformation and the isoelastic utility function (CRRA), incorporating the agent's degree risk aversion. Is use the cases analisys over a biofarmaceutical project with secuencial options, applying a sensibility analysis over the risk aversion coefficients and the option value. Is concludes about the advantages of the model, particullary modeling the probabily of extreme events beyond higher stochastic moments and risk attitudes.

**Key words:** Real options, Edgeworth transformation, isoelastic utility function, technological basis firms.

**JEL classification:** G30, G32.

## Introducción

En la actualidad, el enfoque de valuación mediante opciones reales<sup>1</sup> es una herramienta indispensable para la valuación de activos intangibles, empresas de base tecnológicas, desarrollos en I&D o nuevas estrategias (Perlitz, Peske y Schrank, 1999; Copeland y Antikarov, 2001; Schwartz, 2002, 2013; Grasselli, 2011; Fernández, Perobelli y Brandao, 2014; Mun, 2015), entre otros. Uno de los requisitos del modelo reside en que el mercado sea completo. En otras palabras, que existan activos financieros gemelos para replicar la volatilidad de los flujos de fondos del proyecto objeto de valuación (Dixit y Pindyck, 1994; Trigeorgis, 1997; Amram y Kulatilaka, 1998; Boer, 2002; Borison, 2003; Smit y Trigeorgis, 2004; Mun, 2004; Shockley, 2006; Kodukula y Chandra, 2006; Graeme, 2009; Wang y Halal, 2010; Mun, 2015; Salahaldin, 2016). El dilema se presenta cuando los mercados son incompletos, ya que los tradicionales modelos de opciones reales, no son de aplicación directa<sup>2</sup>. A menudo, tal inconveniente se presenta en la valoración de los proyectos citados en el primer párrafo, y en mercados financieros en desarrollo. Esto debido a las características intrínsecas del activo a partir de su impronta innovadora, y en paralelo por el contexto financiero, donde la diversidad de instrumentos y profundidad en la economía del mercado de capitales por lo general se encuentra en vías de desarrollo.

Atento a las dificultades indicadas, ya la literatura proponía modelos en donde los riesgos se clasifican en “mercado” y “privados” (Smith y Nau, 1995). Los

---

1 Los modelos de opciones financieras constituyen la base del enfoque de opciones reales (Black y Scholes, 1972, 1973; Merton, 1973). Uno de los primeros autores fue Myers (1977), quien aplica el enfoque para valorar la estrategia (opción) de crecimiento. Se ha desarrollado un conjunto de modelos para valorar diferentes situaciones contingentes, una excelente reseña se puede encontrar en Smit y Trigeorgis (2004). Paralelamente, el modelo binomial tradicional (Cox, Ross y Rubinstein, 1979; Rendleman y Bartter, 1979; Jarrow y Rudd, 1982; Jabbour, Kramin, Young, 2001), derivó en una serie de modificaciones en relación con sus condiciones de estabilidad y parámetros; al respecto, una excelente reseña se puede encontrar en Chance (2007). El enfoque de opciones también se complementa con Teorías de Juegos (OR y *Games Theory*) (Smit y Trigeorgis, 2004), y con lógica borrosa (*fuzzy*) (Muzzioli y Torricelli, 2004; Yoshida, Yasuda, Nakagami y Kurano, 2006; Liao y Ho, 2010; Zdnek, 2010; En Shine, Ming, Li y Chen, 2011; Milanesi, 2013a, 2014a, 2015).

2 En el *mundo* ideal de los modelos seminales el riesgo se anula mediante carteras de cobertura, una interesante propiedad matemática es el modelo binomial (Wilmott, 2009). Los agentes pueden estar en desacuerdo con la probabilidades, pero una vez estimados el movimiento de ascenso y descenso, al construir carteras de cobertura se arriva al valor del derivado, solo se necesita tener la misma percepción de la volatilidad del derivado.

riesgos de mercado pueden valuarse con el enfoque tradicional de opciones ya que poseen activo financiero réplica. Los segundos requieren el uso de funciones de utilidad y equivalentes ciertos (Keeney y Raiffa, 1976, 1993). Una alternativa muy difundida por su practicidad es el enfoque MAD (*marketed asset disclaimer*) y sus correcciones<sup>3</sup>. Existen enfoques donde la volatilidad de la rejilla binomial es cambiante (Haahtela, 2011; Culik, 2016), suponiendo altos niveles iniciales y su correspondiente estabilización con el paso del tiempo. Formalmente puede considerarse una alternativa válida, que combinada con el enfoque MAD, se constituye en una solución alternativa. No obstante, a menudo altas volatilidades encierran momentos estocásticos de orden superior en dicha cifra, producto del comportamiento no normal de la distribución. Por ejemplo, cuando se calcula la volatilidad implícita en opciones financieras, puede acontecer que para una familia de contratos existe valor de mercado, aunque estos se encuentren *muy fuera del dinero*. El precio de la firma no lo explica solamente el componente de volatilidad, esa extrema posibilidad y sesgo en la distribución también puede ser explicada por momentos como la asimetría y la curtosis (Milanesi 2014b).

En otras palabras, la apuesta del mercado a eventos extremos es una situación análoga para este tipo de proyectos, en donde el comportamiento estocástico normal por lo general no se verifica, por lo que es menester incorporar momentos de orden superior. En esa línea de razonamiento se propone un modelo que incorpora momentos estocásticos de orden superior (asimetría y curtosis) aplicando, sobre la función binomial que proyecta el proceso estocástico del subyacente, la transformación de Edgeworth (Rubinstein, 1998), en un enfoque de opciones reales (Milanesi, 2013b; Milanesi y El Alabi, 2018; Milanesi, Pesce y El Alabi, 2013, 2015). Paralelamente, se trabaja con las preferencias al riesgo del inversor, atendiendo a que en este tipo de proyectos y en mercados emergentes no existen carteras de activos financieros gemelos, ni posibilidad de diversificación. Los nodos de la rejilla binomial transformada son valorados mediante funciones isoelásticas de utilidad y equivalentes ciertos (Ochoa y Vasseur, 2014; Ochoa y Cadavid, 2016; Milanesi, 2017 y 2018). Los coeficientes de aversión al riesgo son sensibilizados obteniendo un rango de valores para sujetos adversos o neutrales al riesgo, este último caso es base del modelo binomial.

---

3 Desarrollado inicialmente por Copeland y Antikarov (2001), Copeland y Tufano (2004), Brandao y Dyer (2005); Brandao, Dyer y Hahn (2005); Smith (2005); y las correcciones introducidas por Brandao, Dyer y Hahn (2008, 2012).

En las siguientes secciones se presenta el marco teórico del modelo. Primero se desarrolla la transformación de Edgeworth y su ajuste en la función binomial. Seguidamente, la estructura de las funciones de utilidad del tipo CRRA, para luego exponer el conjunto de ecuaciones correspondientes al modelo de valoración. Su funcionamiento se ilustra mediante el estudio de casos. Este consiste en la valuación de un proyecto tecnológico con opciones secuenciales, desde la etapa de diseño experimental hasta su lanzamiento. Son presentados y comparados los resultados obtenidos mediante la técnica de árbol de decisión (DTA, *decision tree analysis*) y el modelo propuesto. Los valores del subyacente son proyectados suponiendo normalidad (asimetría 0 y curtosis 3), y momentos de orden superior (asimetría -0,23 y curtosis 3,5). Respecto del agente, se supone un coeficiente de aversión al riesgo de 0,5. Adicionalmente, el coeficiente de aversión contenido en la función isoelástica fue sometido a un análisis de sensibilidad, lo que generó un abanico de resultados adaptables a la conducta del agente frente al riesgo. Se concluye a favor de la versatilidad del modelo propuesto, en particular para la valuación de empresas de base tecnológica, en contextos emergentes.

## 1. La expansión de Edgeworth en la distribución binomial y las probabilidades implícitas

La expansión de Edgeworth es un instrumento estadístico que permite ajustar una distribución de probabilidad normal, incorporando momentos estocásticos de orden superior, en este caso asimetría y curtosis. En la valoración de opciones mediante el modelo binomial, Jarrow y Rudd (1982) aplicaron la expansión de Edgeworth empleando la técnica desarrollada por Schleher (1977). Sencillamente, la distribución de probabilidad de origen  $f(x)$  es aproximada por otra denominada  $w(x)$ , siendo esta la que incorpora los momentos estocásticos. En la literatura estadística la técnica se conoce como expansión o transformación de Edgeworth (Cramer, 1944; Kendall y Stuart, 1977). Esta aproxima una distribución de probabilidad sencilla, por ejemplo, lognormal o normal, a un formato complejo.

El modelo propuesto en el trabajo parte de la distribución de probabilidad binomial [ $b(x)$ ] para proyectar la variable aleatoria ( $x$ ), en este caso ingresos ( $I$ ) y costos variables ( $CV$ ) correspondientes al desarrollo. En una rejilla binomial, la cantidad de recorridos totales de la variable aleatoria asciende a  $n+1$  nodos finales y  $j=0, 1, 2, \dots, n$  posiciones. En esa línea de razonamiento, la cantidad de recorridos posibles a lo largo de la rejilla es

$$r_j = \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (1)$$

El valor para cada posición es

$$[(2_j) - n] / \sqrt{n} \quad (2)$$

Por tanto, la función de probabilidad binomial  $b(x)$  para a cada nodo es

$$\left[ \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j \times (1-q)^{n-j} \right] \quad (3)$$

Para incorporar los momentos de orden superior, asimetría ( $\lambda$ ) y curtosis ( $k$ ) en el método binomial, es menester transformar la función de origen  $b(x)$  (ecuación 3). En esta, los valores correspondientes a los cuatro momentos (media, varianza, asimetría y curtosis) son:  $E(x) = 0$ ;  $E(x^2) = 1$ ;  $E(x^3) = 0$ ,  $E(x^4) = 3$ . Suponer un valor distinto de 0 y 3 en los momentos de orden superior implica apartarse del supuesto de normalidad. Como consecuencia de ello, surge una nueva función, producto de la binomial  $b(x)$  y la transformación  $w(x)$ , notada como  $g(x)$ :  $E(x) = 0$ ;  $E(x^2) = 1$ ;  $E(x^3) = \lambda$ ,  $E(x^4) = \kappa$ . Siguiendo a Rubinstein (1998), se deben observar los siguiente pasos:

a) Calcular la función de transformación  $W(x)$  con la siguiente expresión<sup>4</sup>:

$$w(x) = [1 + 1/6\lambda(x^3 - 3x) + 1/24(k-3)(x^4 - 6x^2 + 3) + 1/72\lambda^2(x^6 - 15x^4 + 45x^2 - 15)] \quad (4)$$

La función transformada surge del producto de las ecuaciones (3) y (4) en cada nodo de la rejilla, tal que  $g(x) = b(x) \cdot w(x)$ .

Al ser la expansión una aproximación, la sumatoria no es igual al 1 ( $\sum_j g(x_j) \neq 1$ ). Por tanto, se deben escalar las probabilidades para que estas sumen 1. Para ello se reemplaza  $g(x_j)$  con el cociente  $f(x_j) / \sum_j g(x_j)$ .

4 Con asimetría  $\lambda = 0$  y curtosis  $\kappa = 3$  la transformación se anula y la función vuelve al estado binomial normal.

- b) Obtenida la función de densidad ajustada del paso anterior, se procede a estimar la media ( $X$ ) y su varianza ( $v^2$ ):

$$X \equiv \sum_j g(x_j) x_j \quad (5)$$

$$v^2 \equiv \sum_j g(x_j) (x_j - X)^2 \quad (6)$$

Las ecuaciones (5) y (6) brindan los parámetros necesarios para la estandarización de las variables aleatorias.

- c) Al utilizar la función  $g(x)$ , los momentos estocásticos de orden superior son incorporados en el valor de la media y la varianza. Paralelamente, las variables aleatorias  $x_j$  son reemplazadas por las nuevas estandarizadas, mediante la siguiente expresión:

$$x^{g(x)} = (x_j - X) / v \quad (7)$$

Con la nueva función  $g(x)$  y la incorporación de los momentos de orden superior en la media y la varianza, se procede a proyectar el valor del subyacente.

- d) El valor de la variable aleatoria en cada nodo es denotado como  $I_{(j,t)}^e$  para los ingresos y  $CV_{(j,t)}^e$  para los costos variables, tal que el flujo de fondos es  $V_{(j,t)}^e = I_{(j,t)}^e - CV_{(j,t)}^e$  calculado a través de la función corregida  $g(x)$ , donde se emplean tres insumos, a saber: la tasa de crecimiento ( $\mu$ ); las probabilidades obtenidas de la función corregida  $g(x)$ , ahora denotadas como  $p_j = g(x_j)$  asociadas al valor del subyacente a fecha de ejercicio de la opción, y el desvío estándar  $\sigma$ . Notando genéricamente como  $V_{(j,t)}^e$  la variable aleatoria, se tiene:

$$V_{(j,t)}^e = V_0 e^{\mu x t + \sigma \sqrt{t} x_j} \quad (8)$$

La ecuación precedente es utilizada en la proyección de ingresos y costos variables. Para ello, y de manera previa, se debe obtener la tasa de crecimiento ( $\mu$ ). En este caso se debe despejar en cada nodo de la siguiente expresión:

$$(r/d)^t = \sum_j p_j (V_{(j,t)}^e / V) \quad (9)$$

donde:  $V_{(j,t)}^e$  = valor del subyacente (ingresos o costos) en el momento inicial;  $r$  = factor libre de riesgo ( $1+rf$ );  $d$  = factor de rendimiento generado por el activo;  $t$  = tiempo hasta el horizonte de decisión;  $\mu$  = incremento neutral al riesgo esperado correspondiente al logaritmo de  $\frac{V_{(j,t)}^e}{V}$  y  $\sigma$  = la volatilidad del logaritmo de  $V_{(j,t)}^e / V$ . Al sustituir la ecuación (8) en la expresión (9), aplicando logaritmos y despejando en función del incremento neutral al riesgo ( $\mu$ ) se obtienen las siguientes expresiones:

$$(r/d)^t = \sum_j p_j e^{\mu t + \sigma \sqrt{t} x_j} = (\sum_j p_j e^{\sigma \sqrt{t} x_j}) e^{\mu t} \quad (10)$$

$$\log[(r/d)^t] = \log\left(\sum_j p_j e^{\sigma \sqrt{t} x_j}\right) + \mu \times t \quad (11)$$

De la ecuación (11) se deriva la tasa de crecimiento incorporando los momentos de orden superior, insumo necesario de la ecuación (8).

$$\mu = \log[(r/d)^t] - \frac{\left[\log(\sum_j p_j e^{\sigma \sqrt{t} x_j})\right]}{t} \quad (12)$$

Conceptualmente, la tasa de variación  $\mu$  es similar a la empleada para estimar valores neutrales al riesgo suponiendo distribución lognormal:  $\mu = [\log(r/d) - 1/2\sigma^2]$  (Rubinstein, 1998). Al incorporar los momentos de orden superior, se abandona el supuesto de distribución lognormal. Con estos elementos se está en condiciones de proyectar el valor para los diferentes nodos. La siguiente ecuación sintetiza el valor actual correspondiente a la sucesión de valores proyectados:

$$V_0^e = \sum_j p_j (V_{(j,t)}^e) \times \rho^{-t} \quad (13)$$

En este caso,  $x_j^e$  se estima con la ecuación (8),  $p_j = g(x_j)$  ecuaciones (4) y (7), y  $\rho$  el factor de actualización sin riesgo.

- e) Se deben estimar las probabilidades derivadas implícitas para cada nodo de la rejilla binomial, mediante el procedimiento recursivo (Rubinstein, 1994). El proceso comienza en los últimos nodos de la rejilla estimando las probabilidades con la siguiente expresión:



$$q = q'_j / \frac{n!}{j!(n-j)!} \quad (14)$$

Definido  $V_e$  como el valor del activo subyacente, los dos nodos adyacentes son  $(q_t^+ V_t^{+e}; q_t^- V_t^{-e})$ , que son probabilidades condicionadas por el nodo precedente  $(q_{t-1}; V_{t-1})$ . La probabilidad de la rama asociada al nodo  $(q_{t-1})$  es igual a la suma de las ramas de nodos adyacentes posteriores  $q_{t-1} = q_t^+ + q_t^-$ . El nodo precedente resume los movimientos y las probabilidades del subyacente  $(q_t^+ V_t^{+e}; q_t^- V_t^{-e})$ . Una vez obtenidas las probabilidades se pueden estimar los coeficientes equivalentes, aplicando probabilidad condicional. Las ecuaciones son:

$$p_{je(t)} = q_t^+ / q_{t-1} \quad (15)$$

$$1 - p_{je(t)} = q_t^- / q_{t-1} \quad (16)$$

Con las ecuaciones (15) y (16) se aplica el proceso recursivo, donde  $V_{t-1}$  surge del producto entre el valor de las ramas adyacentes posteriores  $(V_t^{+e}; V_t^{-e})$  y los coeficientes equivalentes ciertos  $(p_{je(t)}, 1 - p_{je(t)})$  actualizado al tipo sin riesgo correspondiente al intervalo de tiempo. Finalmente, se aplica el método recursivo para valorar el activo subyacente y la opción contenida en el mismo (ecuación 17), para un individuo neutral al riesgo.

$$V_{(j,t-1)}^e = [p_{je(t)} \times V_{(j,t)}^{e+} + (1 - p_{je(t)}) \times V_{(j,t)}^{e-}] \quad (17)$$

## 2. Coeficiente de aversión al riesgo y función de utilidad isoléctica<sup>5</sup>

Asumir riesgo implica obtener una compensación, habida cuenta del supuesto de aversión al riesgo en la conducta de los agentes. Dicha recompensa puede

---

5 El desarrollo de la teoría de la utilidad y los diferentes formatos de aversión al riesgo se pueden encontrar en Milanesi y El Alabi (2015).

plantearse como la diferencia entre dos magnitudes: la utilidad de la riqueza esperada menos la utilidad de su equivalente cierto  $U[E(W)] - U(CE)$ . A menudo, cuando se trabaja con utilidades sobre valores probables  $U[E(W)]$ , es de utilidad conocer la magnitud equivalente cierta para el agente que toma la decisión. Para un individuo adverso al riesgo, las utilidades entre la magnitud esperada y cierta son iguales, la magnitud cierta es la incógnita por develar, con su función de utilidad  $U(\cdot)$  como común denominador. Dentro de esta juega un rol fundamental el coeficiente de aversión al riesgo<sup>6</sup>. Pratt (1964) y Arrow (1971) proponen dos tratamientos respecto del coeficiente de aversión, ya sea absoluto (*absolute risk aversion coefficient - CARA*) y relativo (*relative risk aversion coefficient - CRRA*). El primero surge de la siguiente expresión:

$$CARA = -\frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (18)$$

En donde  $W$  representa la riqueza del individuo. Es absoluta debido a que estima aversión para un nivel dado de riqueza, explicando el comportamiento de la medida de aversión ante cambios en esta. Producto de  $CARA$  y los niveles de riqueza, se obtiene el coeficiente relativo  $CRRA$ :

$$CRRA = -W \frac{U''(W)}{U'(W)} \quad (19)$$

El  $CRRA$  adopta un comportamiento constante para personas adversas al riesgo, en términos de variaciones absolutas de riqueza. Asumiendo  $CARA$  decreciente frente a incrementos de  $W$ , y  $CRRA$  constante, la literatura ha testeado diferentes funciones de utilidad. Por ejemplo, evidencia a favor de las funciones exponenciales y logarítmicas del tipo  $U(W) = -w^\gamma$ , o  $U(W) = \log(w)$ . Se presentan las evidencias contenidas en los trabajos de Friend y Blume (1975); Rabin (2000); Vendrik y Woltjes (2007); Wakker (2008); Suen (2009); Boyce, Wood, Bank, Clark y Brown (2014). En ellas se verifican las siguientes propiedades: la utilidad marginal

---

6 Dada una función  $U(W_c) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma W_c}$ ; siendo  $U(W) = -\frac{1}{\gamma} e^{-\gamma W}$  e  $\gamma$  el coeficiente de aversión al riesgo, se tiene que a mayor gamma menor equivalente cierto (Wilmott, 2009).

de la riqueza es positiva,  $U'(W) > 0$ ; decrece a medida que aumenta la riqueza  $U''(W) < 0$ ; la medida *CARA* decrece ante aumentos de riqueza  $\frac{d(CARA)}{dW} < 0$  y la *CRRA* se mantiene constante  $\frac{d(CRRA)}{dW} = 0$ .

Dentro del grupo de funciones exponenciales que cumplen con las condiciones indicadas precedentemente se encuentran las denominadas isoelásticas. Estas constituyen un caso especial de la forma hiperbólica de aversión absoluta al riesgo (*HARA*) (Merton, 1992). Son denominadas con las siglas de función isoelástica *CRRA*, y es la seleccionada en el presente trabajo, cuya formulación es la siguiente:

$$U(W) = \begin{cases} \frac{W^\gamma - 1}{1 - \gamma} \rightarrow \gamma > 0; \gamma \neq 1 \\ \log(W) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (20)$$

En la ecuación (20),  $\gamma$  representa el nivel de aversión al riesgo. La función cumple con las condiciones de Inada<sup>7</sup> y, por ende, la utilidad marginal del consumo se aproxima a infinito para valores de consumo cercanos a cero, lo que asegura la condición de no optimalidad relativa a consumos cero en ningún momento del tiempo (Suen, 2009), y permite la elasticidad de sustitución intertemporal constante, como condición para asegurar la existencia de equilibrio balanceado (Ljungqvist y Sargent, 2000).

La medida de aversión al riesgo representada por  $\gamma$  es crucial en la formulación de la ecuación (20), siendo objeto de innumerables estudios empíricos. En teoría  $\gamma$  debe fluctuar entre -1 y 1 (Pratt, 1964). En los estudios, los valores obtenidos para los coeficientes oscilaban entre 0,56 a 0,77 dependiendo de las características

---

7 En honor al economista japonés Ken-Ichi Inada. Dispone condiciones sobre la función de producción, que garantiza crecimiento económico en los modelos neoclásicos de crecimiento. El valor de la función es cero en cero; es diferenciable en todos sus puntos, creciente en  $x$ , con derivada decreciente (cóncava), el límite de la derivada cercana al origen es infinito y el límite de la derivada hacia el infinito positivo es cero. Siguiendo a Ochoa y Pareja (2014), la función de utilidad converge a la logarítmica con  $\gamma$  tendiendo a 1. Para ello se emplea la regla de L'Hopital, donde con  $\gamma \rightarrow 1$  el numerador y el denominador de la función tienden a cero. Al ser diferenciados numerador y denominador con respecto a  $\gamma$ , para tomar el límite de la relación de las derivadas cuando  $\gamma \rightarrow 1$ , se encuentra que la función de utilidad converge a logarítmica.

del individuo. Los valores negativos representan personas afectas al riesgo, los positivos, los adversos, y cero corresponde a personas neutrales al riesgo<sup>8</sup>.

### 3. Valoración de opciones, funciones isoelásticas de utilidad y el modelo binomial transformado

El modelo propuesto permite incorporar las preferencias del individuo a partir de su función de utilidad. En el presente trabajo es utilizada la función isoelástica *CRR*A (ecuación 20), donde el valor de la riqueza ( $W$ ) es sustituido por  $V_{(j,t)}^e$ , el subyacente proyectado con la transformación de Edgeworth. En efecto, para la proyección de ingresos y costos es utilizado el modelo binomial con la expansión de Edgeworth (ecuaciones 1 a 13). El grado de aversión al riesgo ( $\gamma$ ) se introduce en la función de utilidad (ecuación 20), quedando la siguiente expresión:

$$U(V_{(j,t)}^e) = \begin{cases} \frac{V_{(j,t)}^{e\gamma} - 1}{1 - \gamma} \rightarrow \gamma > 0, \gamma \neq 1 \\ \log(V_{(j,t)}^e) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (21)$$

La utilidad esperada se obtiene empleando los coeficientes equivalentes ciertos implícitos (ecuaciones 15 y 16) sobre la utilidad en cada nodo (ecuación 21) a partir de la siguiente expresión,

$$E[U(V_{(j,t)}^e)] = \left\{ \left[ P_{je(t)} \times U(V_{(j,t)}^{e+}) \right] + \left[ 1 - P_{je(t)} \times U(V_{(j,t)}^{e-}) \right] \right\} \quad (22)$$

Con el resultado de la ecuación (22) se obtiene el coeficiente equivalente cierto. En el caso de que el agente sea neutral al riesgo ( $\gamma = 0$ ), el valor obtenido es el

---

8 Se citan los estudios de Harrison, Johnson, McInnes y Rustrom (2005), quienes obtuvieron valores de  $\gamma = 0,45$ ; Harrison, Lau y Rustrom (2007) con valores de  $\gamma = 0,67$  para la población dinamarquesa; Harrison, Humphrey y Verschoor (2009), para países subdesarrollados, obtuvieron un  $\gamma = 0,536$ ; Andersen, Harrison, Lau y Rustrom (2010), para pruebas de laboratorio, obtienen valores de  $\gamma = 0,79$ , y como valor medio en la muestra de la población  $\gamma = 0,63$ ; Harrison, Lau, Rustrom y Tarazona (2013) encuentran en un experimento en la Universidad de Oxford valores en promedio positivos para el índice. Pareja y Baena (2018) encuentran para dos grupos de estudiantes universitarios de EAFIT, Colombia, un  $\gamma = 0,56$  y  $\gamma = 0,68$  para los dos grupos. Estos experimentos nos indican que, en términos generales, las personas son adversas al riesgo.

mismo que arroja el clásico modelo binomial con transformación de Edgeworth (ecuación 17) (Milanesi, 2013b).

$$CE(V_{(j,t)}^e) = \left\{ E[U(V_{(j,t)}^e)] \times (1-\gamma) \right\}^{\frac{1}{1-\gamma}} \quad (23)$$

El equivalente cierto obtenido se actualiza al tipo sin riesgo con la siguiente expresión:

$$CE(V_{(j-1,t-1)}^E) = CE(V_{(j,t)}^E) \times e^{-r} \quad (24)$$

Finalmente, el proceso recursivo brinda una medida monetaria que, incorporada en la función de utilidad, arroja el nivel de utilidad adaptado al coeficiente de aversión al riesgo del agente. Esta surge de la siguiente ecuación:

$$U(V_{i,j(t-1)}^E) = \begin{cases} \frac{CE(V'_{i,j(t-1)})^\gamma - 1}{1-\gamma} \rightarrow \gamma > 0, \gamma \neq 1 \\ \log(CE(V'_{i,j(t-1)})) \rightarrow \gamma = 1 \end{cases} \quad (25)$$

Cabe destacar que el resultado que arrojan las ecuaciones (24) y (25) coincide en el caso de  $\gamma=0$ , neutralidad frente al riesgo.

#### **4. Análisis de caso: valoración de un proyecto biofarmacéutico con opciones secuenciales, transformación de Edgeworth y funciones isoelásticas de utilidad**

Se utiliza la metodología del estudio de casos<sup>9</sup> ya que no se persigue buscar soluciones generalizables estadísticamente. En tal sentido, una vez expuesto el

---

9 El estudio de casos como metodología de investigación no debe confundirse con el análisis o estudio de casos como herramienta pedagógica, la cual busca analizar un aspecto concreto relacionado con las organizaciones para fomentar el debate o la discusión (Castro, 2010).

modelo se pretende describir e indagar sobre la interacción del conjunto de variables que hacen al valor aplicándolo sobre un proyecto farmacológico producto de una asociación entre un centro de investigación público y empresa privada, como unidad de análisis.

#### 4.1 Valuación de un proyecto de desarrollo tecnológico en la industria farmacéutica

En el presente trabajo se utilizó como caso de estudio para ilustrar el funcionamiento del modelo un desarrollo tecnológico de un nuevo fármaco elaborado por la firma  $X^{10}$ . El proyecto consta de cuatro fases, todas con duración un año, a saber: i) *diseño experimental* con una inversión de \$3,7 (millones) y las probabilidades asociadas de éxito son del 60%; ii) *desarrollo del prototipo*, etapa con una inversión proyectada de \$25,8 (millones) y probabilidad de éxito 55%; iii) *aprobación* con una inversión requerida \$1,34 (millones) y probabilidades de autorización del producto por las autoridades de control en un 85%; iv) en  $t = 4$  se proyecta el *lanzamiento* (comercialización del producto). El valor esperado en dicho instante arroja un resultado de \$87,4 (millones). Para llegar a dicho valor, se procedió a proyectar en  $t = 4$  la estructura de ingresos y costos que tendría un producto similar. Los estudios de mercado y el análisis mediante *benchmark* de productos similares sugieren ingresos en  $t = 0$  por un valor de \$ 345 (millones), con una estructura de costos cuyas proporciones sobre ventas son del 17,49% para costos variables y 72,4% costos fijos. Con base en las ventas, los primeros ascienden a \$ 60 millones y los costos fijos arrojan una cifra de \$ 250 millones.

Para la proyección de ingresos y costos variables en el horizonte de lanzamiento, en una primera instancia se supone que siguen un process geométrico browniano, en tiempo discreto explicado por un proceso binomial, y que en aras de simplificar el caso, los ingresos y costos se encuentran perfectamente correlacionados<sup>11</sup>. Con el fin de obtener los insumos necesarios para la proyección,

---

En este caso se busca analizar el funcionamiento de proposiciones teóricas con el fin de ampliar o generalizar una teoría (Yin, 1994).

10 El caso en cuestión se adaptó del caso presentado por Borissiouk y Peli (2002). Estos proyectos, por lo general, se dividen en las siguientes fases: descubrimiento, fase preclínica de diseño experimental, fase clínica de desarrollo del prototipo y pruebas experimentales, fase regulatoria y lanzamiento del producto.

11 Dada la extensión del trabajo se adopta el supuesto de perfecta correlación entre ingresos

se aplicó el enfoque MAD (*Marketed Assets Disclaimer*), suponiendo una distribución lognormal con valores de volatilidad de ingresos y costos variables del 39% ( $\sigma=39,17\%$ ). Con estos datos se estiman los coeficientes de ascenso y descenso típicos del modelo binomial clásico (Cox, Ross y Rubinstein, 1979) para la proyección, a saber:  $u = e^{0,3917\sqrt{t}} = 1,469$ ;  $d = e^{-0,3917\sqrt{t}} = 0,677$ .

En las tablas 1 y 2 se presentan las rejillas binomiales proyectadas de ingresos y costos.

Tabla 1: Proyección ingresos - Evolución estocástica (\$)

Fase I+D			Aprobación	Lanzamiento
0	1	2	3	4
345,00	453,57	662,56	967,85	1.413,82
	207,92	303,72	443,67	648,10
		139,23	203,38	297,09
			93,23	136,19
				62,43

Fuente: elaboración propia.

Tabla 2: Proyección costos - Evolución estocástica (\$)

Fase I+D			Aprobación	Lanzamiento
0	1	2	3	4
60,00	78,88	115,23	168,32	245,88
	36,16	52,82	77,16	112,71
	-	24,21	35,37	51,67
			16,21	23,69
			-	10,86

Fuente: elaboración propia.

y costos variables; como consecuencia de ello estas variables aleatorias comparten media y desvío. Caso contrario deberían estimarse los momentos estocásticos para cada una de ellas, y se estaría frente a una opción exótica del tipo arco iris (Copeland y Antirakov, 2001; Milanesi, 2011). Cabe destacar que los costos fijos no sufren variaciones.

El valor en  $t = 4$  surge de calcular el valor esperado de ingresos y costos para dicho periodo. Este se obtiene ponderando los valores en cadaa nodo, por su probabilidad de ocurrencia. Al ser un proceso binomial se obtiene por combinatorias con la siguientes expresiones, para ingresos y costos variables: ( $V_t$ ),

$$V_{t=4} = \left[ \sum_{j(T)=0}^{J(T)=n} I_{t=5} \frac{j!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j} \right] \quad (26)$$

Tabla 3: Valor esperado de ingresos y costos variables según distribución binomial

Nodos	p(x) (%)	p(x) x I (\$)	p(x) x CV (\$)
4	6,25	88,36	15,37
3	25	162,03	28,18
2	37,50	111,41	19,38
1	25	\$34,05	5,92
0	6,25	3,90	0,68
Suma	100		
	Valor esperado	399,75	69,52

Fuente: elaboración propia.

El valor a fecha de lanzamiento surge de la expresión  $E(V_T) = E(I_T) - E(CV_T) - CF$ ; se supone que los costos fijos son determinísticos y no existe variación proyectada en el nivel de precios, por tanto, el valor es de \$ 80,23 millones.

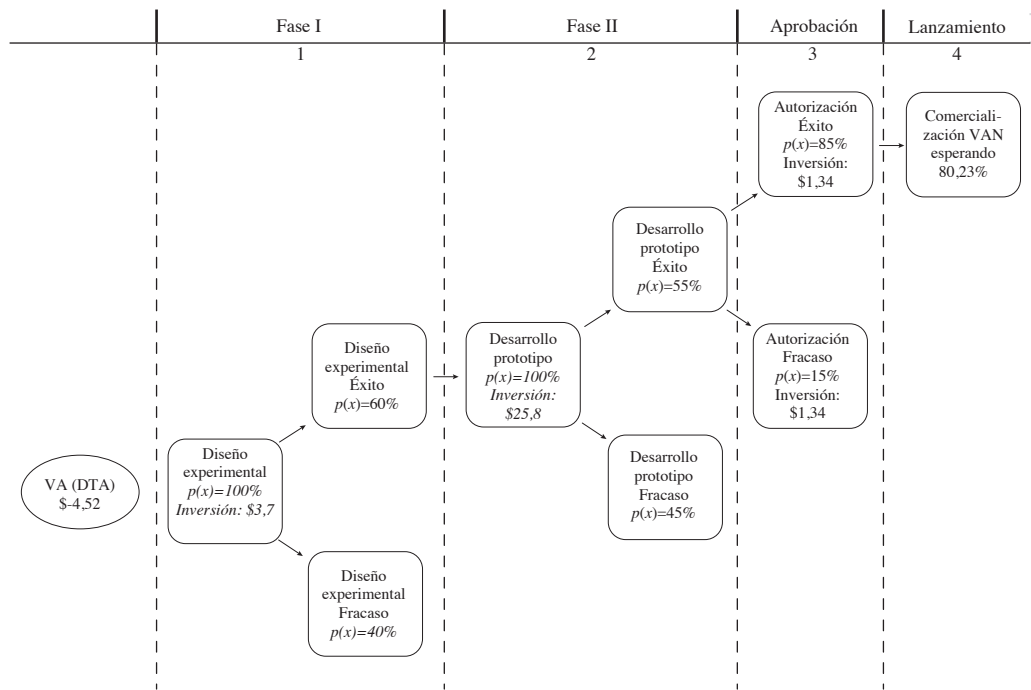
## 4.2 Valuación mediante árboles de decisiones

En el caso de valuar el proyecto mediante la técnica de árboles de decisiones (*Decision Tree Analysis*) se debe definir la tasa de actualización. Es práctica común utilizar una única tasa para valuar todas las estrategias, tomando como referencia tasas correspondientes a proyectos de riesgo equivalente al objeto de valoración. Es claro que la principal debilidad de esta técnica consiste en utilizar la misma tasa para valuar todas las opciones (Smit y Nau, 1995; Copeland y Antirakov, 2001; Milanesi y Vigier, 2010). En tal sentido, no contiene el mismo riesgo la opción de abandonar o expandirse que la de continuidad. En esa línea, aunque



existiera en el mercado de capitales un título tranzable (acción) que replique el riesgo de los flujos de fondos de la firma, solamente lo haría para el caso de continuidad pasiva. Las nuevas estrategias, como en el caso bajo análisis, se caracterizan por su alto grado de innovación y opcionalidad, cuyo riesgo no es representado por la tasa contenida en títulos tranzables y estimada con modelo de equilibrio como el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) o APT (*Arbitraje Price Theory*) y sus derivados. Sin perjuicio de ello, y a los efectos de ilustrar el caso, se supone una tasa de costo de capital para activos de riesgo similar del 14,50 %, para evaluar proyectos de la industria farmacológica<sup>12</sup>. A continuación, en la figura 1 se expone la gráfica de las etapas del proyecto y los valores asociados.

Figura 1: Secuencia y valores del árbol de decisión



Fuente: elaboración propia

El proceso de valuación es recursivo partiendo del valor en  $t = 4$ : \$ 80,23 (millones). La expresión empleada correspondiente a los valores esperados es:

12 Ver A. Damodaran, en [www.stern.nyu.edu/~adamodar/pc/datasets/betas.xls](http://www.stern.nyu.edu/~adamodar/pc/datasets/betas.xls)

$$V_t = \left\{ \left[ e^{-kt} \times V_{t+1} \right] \times p_{(x)} - I_t \right\} + (1 - p_{(x)}) \times I_t \quad (27)$$

En cada fase el valor esperado es la suma ponderada por probabilidades de ocurrencia entre el valor actual del proyecto menos su inversión en caso de éxito, y el valor de la inversión en caso de fracaso. En la tabla 4 se presenta el valor del proyecto para cada fase.

Tabla 4: Valor actual de cada fase correspondiente al árbol

T	V(t) (\$)	Probabilidad (%)	Inversión (\$)
4	80,23	100	-
3	57,45	85	\$1,34
2	-10,08	55	\$25,80
1	-5,23	60	3,70
0	-4,52		-

Fuente: elaboración propia.

El valor actual en  $t = 0$  es de  $-\$4,52$  (millones), el cual indica el no inicio del desarrollo. Este valor presenta debilidades, en primer lugar, propias de la técnica tradicional del árbol de decisión, en donde la tasa de actualización empleada solamente refleja el riesgo de un activo en marcha sin opciones. Como consecuencia de ello, la reversibilidad del proyecto no es valuada, como sí lo hace el enfoque de opciones reales.

#### 4.3 Valuación a través de opciones reales. Proceso binomial transformación de Edgeworth

En primer lugar, se deben proyectar los ingresos y costos bajo el proceso binomial. En el caso de suponer comportamiento normal, en  $t = 4$  los ingresos y costos corresponden a los proyectados en las tablas 1 y 2. En el caso propuesto se supone que el desvío estándar se mantiene igual para los ingresos y costos proyectados ( $\sigma = 39,17\%$ ), y la asimetría y curtosis supuestas ascienden a  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$ . La estimación de las variables aleatorias requiere de aplicar las ecuaciones (1) a (13). Las tablas correspondientes a la distribución binomial con y sin transformación son expuestas en el anexo (tablas A.1 hasta A.15). Constituyen los

insumos para proyectar los ingresos y costos aplicando la ecuación (8), conforme se exponen en las tablas 5 y 6.

Tabla 5: Ingresos proyectados para  $\lambda = -0,23$  y  $\kappa = 3,5$  (ecuación 8) (\$)

Fase I+D			Aprobación	Lanzamiento
0	1	2	3	4
345,00	475,47	700,79	716,78	717,60
	215,87	323,82	367,52	\$ 362,46
		149,63	188,44	183,08
			96,62	92,48
				46,71

Fuente: elaboración propia.

Tabla 6: Costos proyectados para  $\lambda = -0,23$  y  $\kappa = 3,5$  (ecuación 8) (\$)

Fase I+D			Aprobación	Lanzamiento
0	1	2	3	4
60,00	82,69	121,88	124,66	124,80
	37,54	56,32	63,92	63,04
		26,02	32,77	31,84
			16,80	16,08
				8,12

Fuente: elaboración propia.

El VAN del proyecto en el horizonte de lanzamiento asciende a  $-\$121,28$  (millones), producto de la suma entre los valores esperados de ingresos, costos y costos fijos conforme surge de la tabla 7.

Tabla 7: Valor esperado para ingresos y costos variables en el horizonte de lanzamiento

Nodos	$p(x)$ (%)	$p(x) \times I$ (\$)	$p(x) \times CV$ (\$)
4	4,1010	29,43	5,12
3	13,1375	47,62	8,28
2	17,6798	32,37	5,63

Nodos	p(x) (%)	p(x) x I (\$)	p(x) x CV (\$)
1	34,9630	32,33	5,62
0	30,1187	14,07	2,45
Suma	100,0000		
	Valor esperado	155,82	\$27,10

Fuente: elaboración propia.

En tal sentido, el valor actual aplicando árboles de decisión es de -36,17 (millones), obtenido de manera similar al presentado, pero partiendo del valor según las proyecciones con momentos estocásticos de orden superior. Su cálculo se expone en la tabla A.16 del anexo.

Es claro que el valor actual neto como método de valuación parte del concepto de irreversibilidad de la inversión (Dixit y Pyndick, 1994; Mun, 2015). No obstante una de las características del proyecto esta dada por su flexibilidad, al incorporar opciones secuenciales de abandono en cada una de las fases. Por tanto, en  $t=4$  el valor terminal (etapa de lanzamiento) surge de la expresión  $V_T^e = \left[ \max \left( I_T^e - CV_T^e + CF \right); 0 \right]$ . Para los ingresos y costos variables con  $\lambda = -0,23$ ;  $k = 3,5$  y  $\lambda = 0$ ;  $k = 3$  se emplean las tablas 5, 6, 1 y 2, respectivamente.

El proceso recursivo requiere estimar los coeficientes equivalentes ciertos (ecuaciones 14 a 16). Al comparar las probabilidades en  $t=4$  con transformación (tabla 7) y sin transformación (tabla 3), se aprecia que en la última la distribución presenta un comportamiento simétrico y balanceado en contraste con la primera. Producto de suponer sesgos negativos y altas probabilidades de éxito o fracaso, materializado en la incorporación de los momentos estocásticos de orden superior. Las probabilidades aludidas son el punto de partida empleado en la ecuación (14) para calcular probabilidades implícitas a partir de la distribución transformada (Rubinstein, 1994; Arnold, Crack y Schwartz, 2004). En el anexo se presentan los resultados para  $\lambda = -0,23$ ;  $k = 3,5$  y  $\lambda = 0$ ;  $k = 3$ . Los coeficientes equivalentes ciertos se obtienen de las ecuaciones (15) y (16) con los resultados de las tablas A.17 y A.18.

Tabla 8: Coeficientes equivalentes ciertos para  $\lambda=0$  y  $k=3$  (ecuaciones 15 y 16)

1	2	3	4
0,5	0,5	0,5	0,5
0,5	0,5	0,5	0,5
	0,5	0,5	0,5
	0,5	0,5	0,5
		0,5	0,5
		0,5	0,5
			0,5
			0,5

Fuente: elaboración propia.

Tabla 9: Coeficientes equivalentes ciertos para  $\lambda=-0,23$  y  $\kappa=3,5$  (ecuaciones 15 y 16)

1	2	3	4
0,684652011	0,738284602	0,768780784	0,775067212
0,315347989	0,261715398	0,231219216	0,224932788
	0,568210293	0,652256569	0,747879037
	0,431789707	0,347743431	0,252120963
		0,457610252	0,472899096
		0,542389748	0,527100904
			0,444711168
			0,555288832

Fuente: elaboración propia.

Se puede observar que la normalidad de la distribución de probabilidad genera un comportamiento constante de los coeficientes (tabla 8), en contraposición a los valores cambiantes al incorporar momentos de orden superior (tabla 9). A partir de los datos contenidos en las tablas precedentes se aplica el proceso recursivo de valuación. La valuación tradicional con transformación de Edgeworth (Milanesi, 2013b) implica considerar neutralidad frente al riesgo. Conduce al mismo resultado que aplicar función de utilidad con aversión  $\gamma=0$ . Para el caso analizado

se estiman los valores con  $\gamma=0,5$  con y sin transformación. Seguidamente, el coeficiente de aversión es sensibilizado en el rango de  $-0,99$  a  $0,99$  (ecuación 25).

Tabla 10: Valuación etapas aprobación y lanzamiento para  $\lambda=0$  y  $k=3$  con  $\gamma=0,5$

Aprobación				Lanzamiento	
3				4	
U(.) (ec.25)	PV (CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)	U(.) (ec.21)	V = Max(I-CV-CF,0)
42,3704345	\$448,8134297	\$556,7450465	47,1908909	60,59489035	\$ 917,94
15,0129762	\$56,34736382	\$71,34712731	16,8934457	33,7868915	\$ 285,39
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -
				0	\$ -

Fuente: elaboración propia.

Tabla 11: Valuación etapas aprobación y lanzamiento para  $\lambda=-0,23$  y  $k=3,5$  con  $\gamma=0,5$

Aprobación				Lanzamiento	
3				4	
U(.) (ec.25)	PV (CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)	U(.) (ec.21)	V = Max(I-CV-CF,0)
28,5574668	\$203,882227	\$253,8167012	31,8632516	37,02972886	\$ 342,80
9,16785163	\$21,0123759	\$27,64518436	10,5157376	14,06074657	\$ 49,43
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -
				0	\$ -

Fuente: elaboración propia.

En la etapa de aprobación el valor se obtiene calculando el equivalente cierto (ecuación 23) de la utilidad esperada (ecuación 22). El último es ponderado por la probabilidad de ocurrencia de aprobación menos la inversión requerida en dicha etapa  $PV_t(CE) = [CE_t \times e^{-rt} \times p(x)] - I_t$ , actualizado el tipo sin riesgo (ecuación 24). Finalmente, la utilidad se obtiene aplicando la ecuación (25). El valor en las fases I y II obedece a la misma lógica que en la etapa posterior. Se parte de la  $U(.)$  obtenida en la etapa de aprobación (ecuación 25), y, recursivamente, se

resuelve hasta obtener la utilidad correspondiente a la fase, donde el valor actual del equivalente cierto es  $PV_t(CE) = [CE_t \times e^{-rt} \times p(x)] - I_t$ .

Tabla 12: Valuación fase I y II para  $\lambda=0$  y  $k=3$  con  $\gamma=0,5$

Fase I				Fase II			
1				2			
U(.) (ec.25)	PV(CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)	U(.) (ec.25)	PV(CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)
5,6255	\$7,911784	\$20,467	9,04828	18,096	\$81,8714	\$205,803	28,6917
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -	\$14,086	7,506481
				0	\$ -	\$ -	0

Fuente: elaboración propia.

Tabla 13: Valuación fase I y II para  $\lambda=-0,23$  y  $\kappa=3,5$  con  $\gamma=0,5$

Fase I				Fase II			
1				2			
U(.) (ec.25)	PV(CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)	U(.) (ec.25)	PV(CE) (ec.24)	CE (ec.23)	EU(.) (ec.22)
6,8661	\$ 11,79	\$ 27,26	10,4413	14,1427	\$ 50,00	\$ 144,89	24,0742
0	\$ -	\$ -	0	0	\$ -	\$ 8,94	5,9798
				0	\$ -	\$ -	0

Fuente: elaboración propia.

Finalmente, el valor potencial del condicionado a los posibles cursos de acción se obtiene en  $t=0$ .

Tabla 14: Valor estratégico para  $\lambda=0$  y  $k=3$  con  $\gamma=0,5$

Inicio			
0			
U.(.) (ec.25)	PV(CE)(ec.24)	PV(CE)(ec.24)	EU.(.) (ec.22)
2,743341465	\$1,8814806	1,97794617	2,81278949

Fuente: elaboración propia.

Tabla 15: Valor estratégico para  $\lambda = -0,23$  y  $\kappa = 3,5$  con  $\gamma = 0,5$ 

Inicio			
0			
U(.) (ec.25)	PV(CE) (ec.24)	PV(CE) (ec.24)	EU(.) (ec.22)
4,584794782	\$5,2550858	\$5,52451981	4,70085941

Fuente: elaboración propia.

El valor estratégico del proyecto es de \$6,40 millones para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$  y de \$41,42 millones para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$ , considerando un sujeto con grado de aversión de  $\gamma = 0,5$ . El valor de la opción real es la diferencia entre el valor estratégico, en este caso de \$1,81 y \$5,25 millones respectivamente; menos valor actual del árbol de decisión, de -\$4,52 y -\$36,17 millones;  $RO = VE - VP$ . Seguidamente, se procede a sensibilizar el coeficiente de aversión al riesgo con el fin de obtener los valores acordes a las preferencias de potenciales inversores, con rangos de  $\gamma > 0$  para adversos;  $\gamma = 0$  neutral e  $\gamma < 0$  afectos al riesgo. En la tabla 16 se exponen los resultados obtenidos.

Tabla 16: Sensibilidad coeficiente de aversión y valor de la opción para  $\lambda = 0$  y  $\kappa = 3$ 

$\gamma$	-0,99	-0,80	-0,70	-0,60	-0,50	-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	0,00
RO	\$ 46,33	\$ 43,41	\$ 40,40	\$ 37,30	\$ 34,09	\$ 30,76	\$ 27,29	\$ 23,68	\$ 20,16	\$ 16,53
$\gamma$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99
RO	\$ 12,70	\$ 9,54	\$ 6,59	\$ 3,98	\$ 1,88	\$ 0,48	\$ -	\$ -	\$ -	\$ -

Fuente: elaboración propia.

Tabla 17: Sensibilidad coeficiente de aversión y valor de la opción para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$ 

$\gamma$	-0,99	-0,80	-0,70	-0,60	-0,50	-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	0,00
RO	\$ 29,22	\$ 28,08	\$ 26,88	\$ 25,59	\$ 24,22	\$ 22,77	\$ 21,22	\$ 19,57	\$ 17,82	\$ 15,97
$\gamma$	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	0,99
RO	\$ 14,01	\$ 11,94	\$ 9,77	\$ 7,53	\$ 5,26	\$ 3,06	\$ 1,16	\$ -	\$ -	\$ -

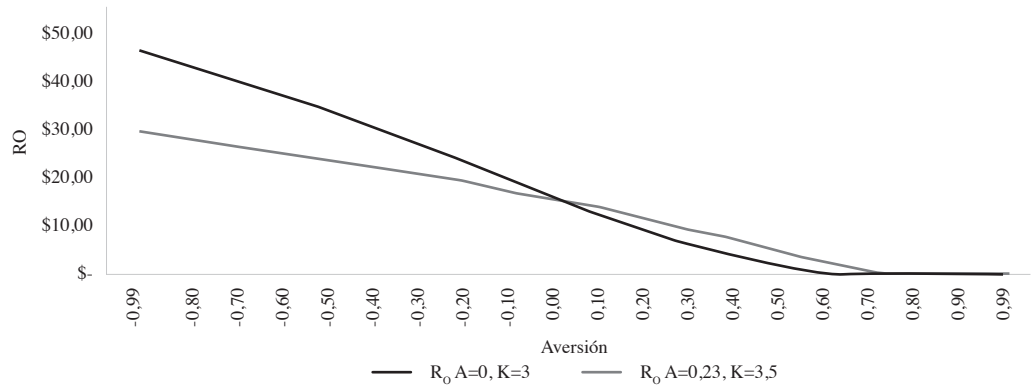
Fuente: elaboración propia.

La figura 2 ilustra la relación presentada en las tablas 16 y 17. Para individuos afectos al riesgo, el valor de la opción asumiendo comportamiento normal es



mayor, mientras que en el caso de aversión la presencia de curtosis hace que el valor sea superior al caso normal.

Figura 2: Valor de la opción y sensibilidad



Fuente: elaboración propia.

## Conclusiones

Los modelos de valuación basados en la teoría de los pagos contingentes y opciones reales constituyen un paso obligatorio en la valoración de alternativas estratégicas, y por este motivo se justifica su empleo en la valuación de intangibles, I&D, empresas de bases tecnológicas y similares, ya que el valor de estos emerge del conjunto combinado de opciones (crecimiento, abandono, diferimiento, etc). Como se indicó, el talón de aquiles del enfoque reside en la necesidad de mercados completos para aplicar los conceptos de valuación neutral al riesgo. Adicionalmente, los modelos tradicionales suponen un comportamiento normal del subyacente. En el caso de este tipo de proyectos, una característica son los escenarios de extremo éxito o fracaso, explicado estadísticamente por la curtosis de la distribución, que los modelos tradicionales mezclan a menudo en altas cifras de desvío estándar.

El modelo propuesto incorpora los eventos extremos y asimetría en la distribución de probabilidad del subyacente mediante la transformación de Edgeworth y preferencias frente al riesgo, mediante la función isoelástica de utilidad. El valor obtenido se ajusta en función del coeficiente de aversión al riesgo del agente, con  $\gamma=0$ ; el binomial tradicional y modificado arroja el valor para un sujeto neutral al riesgo. Con grados crecientes de aversión al riesgo, el valor estratégico con o sin momentos estocásticos de orden superior se diluye, lo que conduce,

en situaciones de alta aversión al riesgo, al rechazo del proyecto. No obstante, en el caso de sujetos con menor aversión al riesgo el valor obtenido mediante la transformación supera al normal; esto se explica por el impacto de las colas anchas de la distribución (curtosis), con reacción favorable para agentes afectos al riesgo. Claro, el análisis de las preferencias frente al riesgo es soslayado por los modelos tradicionales que suponen neutralidad frente a este, donde se presume la existencia de mercados financieros completos, activos financieros gemelos, réplica de los flujos del proyecto y comportamiento normal de las variables aleatorias, supuesto difícil de verificar, en particular en mercados emergentes y para emprendimientos de la nueva economía.

## Referencias

- Amram, M. y Kulatilaka, N. (1998). *Real Options*. Boston, Massachusetts, Estados Unidos: Harvard Business School Press.
- Andersen, S., Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2010). Preference heterogeneity in experiments: Comparing field and laboratory. *Journal of Economics, Behaviour and Organization*, 73(2), 209-224.
- Arnold, T., Crack, T. y Schwartz, A. (2004). Implied binomial tree without VBA SSRN. Recuperado de [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=541744](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=541744)
- Arrow, K. (1971). *Essays in the Theory of Risk Bearing*. Amsterdam: New Holland.
- Black, F. y Scholes, M. (1972). The valuation of options contracts and a test of market efficiency. *Journal of Finance*, 399-418.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 637-659.
- Boer, P. (2002). *The Real Options Solutions: Finding Total Value in a High-Risk World*. New York: John Wiley & Sons Inc.
- Borison, A. (2003). *Real Options Analysis: Where are the Emperor's Clothes?* Stanford: Stanford University.
- Borissiouk, O. y Peli, J. (2002). Real option approach to R&D project valuation: Case study at Serono International S. A. (Tesis de maestría), University of Lausanne. Recuperado

de //www.ibrarian.net/navon/paper/Master Thesis Real Option Approach to R&D Projec.pdf?paperid=14754232.

- Boyce, C., Wood, A., Bank, J., Clark, A. y Brown, G. (2014). Money, well being and loss aversion: Does an income loss has a greather effect on well being than an income gain. *Center for Economics Performance*, (39), 1-16. Recuperado de <http://cep.lse.ac.uk/pubs/download/occasional/op039.pdf>
- Brandao L. y Dyer S. (2005). Decision analysis and real options: A discrete time approach to real option valuation. *Annals of Operations Research*, 135(1), 21-39.
- Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2005). Using binomial decision trees to solve real-option valuation problems. *Decision Analysis*, 2, 69-88.
- Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2008). Response to comments on Brandao *et al.* (2005). *Decision Analysis*, (2), 103-109.
- Brandao, L., Dyer, J. y Hahn, W. (2012). Volatility estimation for stochastic project value models. *European Journal of Operational Research*, 220(3), 642-648.
- Castro Monge, E. (2010). El estudio de casos como metodología de investigación y su importancia en la dirección y administración de empresas. *Revista Nacional de Administración*, 2(1), 31-54.
- Chance, D. (2007). A Synthesis of Binomial Option Pricing Models for Lognormally Distributed Assets. SSRN. Recuperado de <http://ssrn.com/abstract=1523548>, 1-25.
- Copeland, T. y Antikarov, V. (2001). *Real Options*. New York: Texere LLC.
- Copeland, T. y Tufano, P. (2004). A real world to manage real options. *Harvard Business School Review*, (82), 90-99.
- Cox, J., Ross, S. y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of Financial Economics*, 7, 229-263.
- Cramer, H. (1946). *Mathematical methods for statistics*. Princeton: Princeton University Press
- Culik, M. (2016). Real options valuation with changing volatility. *Pespectives in Science*, 7, 10-18.

- Dixit, A. y Pindyck, R. (1994). *Investment under Uncertainty*. New Jersey: Princeton University Press.
- Fernández, G., Perobelli, F. y Brandao, L. (2014). an improved model for valuing R&D Project. En R. O. Group (ed.), *XIV Real Options Annual Conference*, (pp. 1-23). Recuperado de <http://realoptions.org/openconf2014/data/papers/39.pdf>
- Friend, I. y Blume, M. (1975). The demand of risky assets. *American Economic Review*, 65(5), 900-922.
- Graeme, G. (2009). *Real Options in Theory and Practice (Financial Management Association Survey and Synthesis)*. Oxford: Oxford University Press.
- Grasselli, M. (2011). Getting real with real options. *Journal of Business, Finance and Accounting*, 5(38), 740-764.
- Haahtela, T. (2011). Recombining trinomial tree for real option valuation with changing volatility. *Annual Real Options Conference*. Recuperado de [https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract\\_id=1932411](https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=1932411)
- Harrison, G., Humphrey, S. y Verschoor, A. (2009). Choice under uncertainty: Evidence from Ethiopia, India and Uganda. *The Economic Journal*, 120(543), 80-104.
- Harrison, G., Johnson, E., McInnes, M. y Rustrom, E. (2005). Individual choice and risk aversion in the laboratory: Coment. *American Economic Review*, 95(3), 897-901.
- Harrison, G., Lau, M. y Rutstrom, E. (2007). Estimating risk attitudes in Denmark: a field experiment. *The Scandinavian Journal of Economics*, 109(2), 341-368.
- Harrison, G., Lau, M., Rutstrom, E. y Tarazona Gómez, M. (2013). Preference over social risk. *Oxford Economics Paper*, 65(1), 25-46.
- Jabbour, G., Kramin, M. y Young, S. (2001). Two-state option pricing: Binomial models revisited. *Journal of Futures Markets*, 21, 987-1001.
- Jarrow, R. y Rudd, A. (1982). Aproximate option valuation for arbitrary stochastic processes. *Journal of Financial Economics*, 10, 347-369.
- Keeney, R. y Raiffa, H. (1976, 1993). *Decisions with multiple objectives: Preferences and value tradeoffs*. United Kingdom: Cambridge University Press.

- Kendall, M. y Stuarts, A. (1977). *The advanced theory of statistics. Distribution Theory* (Vol. 1). New York: Mcmillan.
- Kodukula, P. y Chandra, P. (2006). *Project Valuation using Real Options: A practitioner's guide*. USA: J Ross Publishing.
- Liao, S. y Ho, S. (2010). Investment project valuation based on a fuzzy binomial approach. *Information Sciences*, (180), 2124-2133.
- Ljungqvist, L. y Sargent, T. (2000). *Recursive Macroeconomic Theory*. Baltimor: MIT press.
- Merton, R. (1973). The theory of rational options pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1), 141-183.
- Merton, R. (1992). *Continuous-Time Finance*. New York: Wiley-Blakwell.
- Milanesi, G. (2011). Fuentes de incertidumbre, probabilidades condicionales y la opción de abandono en activos reales. *Escritos Contables y de Administración*, 2-1, 43-71.
- Milanesi, G. (2013a). El modelo binomial borroso y la valuación de opciones reales: el caso de valuación de un contrato de concesión para la explotación petrolera. *Estocástica: finanzas y riesgo*, 3(2), 95-118.
- Milanesi, G. (2013b). Asimetría y curtosis en el modelo binomial para valorar opciones reales: caso de aplicación para empresas de base tecnológica. *Estudios gerenciales*, (29), 2-12.
- Milanesi, G. (2014a). Valoración probabilística versus borrosa, opciones reales y el modelo binomial: aplicación para proyectos de inversión en condiciones de ambigüedad. *Estudios gerenciales*, (30), 211-219.
- Milanesi, G. (2014b). Momentos estocásticos de orden superior y la estimación de la volatilidad implícita: aplicación de la expansión de Edgeworth en el modelo Black-Scholes. *Estudios gerenciales*, 30, 336-342.
- Milanesi, G. (2015). Modelo binomial borroso, el valor del firma apalancada y los efectos de la deuda. *Estocástica*, 5(1), 9-43.
- Milanesi, G. (2017). Opciones reales y función isoelástica de utilidad para valorar I&D e intangibles. *Escritos contables y de administración*, 6(2), 81-109.

- Milanesi, G. (2018). Un modelo de opciones reales *fuzzy* y funciones de utilidad isoelásticas para valorar I&D en mercados incompletos. *Estocástica: finanzas y riesgo*, 8-2; 205-232.
- Milanesi, G. y El Alabi E. (2015). Evolución de las funciones de utilidad para la toma de decisiones. *Escritos contables y de administración*, 6(1), 15-43.
- Milanesi, G. y El Alabi, E. (2018). A binomial model with Edgeworth expansion on particular circumstances. *European Accounting and Management Review*, 5-1, 69-93.
- Milanesi, G., Pesce, G. y El Alabi, E. (2013). Technology-based startup valuation using real options with Edgeworth expansion. *Journal of Finance and Accounting*, 1-2, 54-61. I
- Milanesi, G., Pesce, G. y El Alabi, E. (2015). Strategic asset valuation: A model including asymmetry and kurtosis in its distribution in continuous. *Academic Journal of Economics Studies*, 1-1, 91-104.
- Milanesi, G. y Vigier, H. (2010). Árboles de decisiones, opciones reales y enfoque integrado en mercados completos e incompletos. *XLV Reunión Anual de la Asociación Argentina de Economía Política*.
- Mun, J. (2015). *Real Options Analysis. Tools and Techniques for Valuing Strategic Investments and Decisions with Integrated Risk Management and Advanced Quantitative Decision Analytics* (3 ed.). CreateSpace Independent Publishing Platform.
- Muzzioli, S. y Torricelli, A. (2004). A multiperiod binomial model for pricing options in a vague world. *Journal of Economics and Dynamics Control*, (28), 861-867.
- Myers, S. (1977). Determinants of corporate borrowing. *Journal of Financial Economics*, (5), 147-176.
- Ochoa, C. y Pareja Vasseur, J. (2014). Valoración de opciones a través de equivalentes a certeza. *Ecos de economía*, 18(39), 49-72.
- Pareja Vasseur, J. y Baena, J. (2018). Estimación del índice de aversión al riesgo utilizando la función CRRA mediante un diseño experimental. *Espacios*, 39(13), 29-47.
- Pareja Vasseur, J. y Cadavid, C. (2016). Valoración de patentes farmacéuticas a través de opciones reales: equivalentes de certeza y función de utilidad. *Contaduría y Administración*, (61), 794-814.

- Perlitz, M., Peske, T. y Schrank, R. (1999). Real option valuation: The new frontier in R&D project evaluation? *R&D Management*, 29(3), 255-269.
- Pratt, J. (1964). Risk aversion in the small and in the large. *Econometrica*, 32(1/2), 122-136.
- Rabin, M. (2000). Risk aversion and expected utility theory: A calibration theorem. *Econometrica*, 68, 1281-1292.
- Rendleman, R y Bartter, B. (1979). Two-state option pricing. *Journal of Finance*, (34), 1092-1110.
- Rubinstein, M. (1994). Implied binomial trees. *Journal of Finance*, 3(49), 771-818.
- Rubinstein, M. (1998). Edgeworth binomial trees. *Journal of Derivatives*, (5), 20-27.
- Salahaldin, L. (2016). *Real Options as a Tool for Value Creation: Evidence from Sustainable Development and Information Technology Sectors*. New York: Wiley-ISTE.
- Schleher, D. (1977). Generalized Gram-Charlier series with application to the sum of log-normal. *IEEE Transactions on Information Theory*, 23, 275-280.
- Schwartz, E. (2002). Patents and R&D as Real Options. *WP UCLA*. Recuperado de <https://escholarship.org/uc/item/86b1n43k>
- Schwartz, E. (2013). The real options approach to valuation: Challenges and opportunities. *Latin American Journal of Economics*, 50(2), 163-177.
- Shine Yu, S., Ming, H., Li, Y. y Chen, Y. (2011). A novel option pricing model via fuzzy binomial decision tree. *International Journal of Innovative Computing, Information and Control*, 7(2), 709-718.
- Shockley, R. (2006). *An Applied Course in Real Options Valuation*. Thomson South-Western Finance.
- Smith, J. (2005). Alternative approaches for solving real-options problems. *Decision Analysis*, 2(2), 89-102.
- Smith, J. y Nau, R. (1995). Valuing risky projects: Option pricing theory and decision analysis. *Management Science*, (5), 795-816.

- Smit, H. y Trigeorgis, L. (2004). *Strategic Investment: Real Options and Games*. New Jersey: Princeton University Press.
- Suen, R. (2009). Bounding the CRRA utility functions. *Munich Personal RePec Archive*. Recuperado de [https://mpira.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound\\_CRRA.pdf](https://mpira.ub.uni-muenchen.de/13260/1/Bound_CRRA.pdf)
- Trigeorgis, L. (1997). *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocations* (2 ed.). Cambridge: MIT Press.
- Vendrik, M. y Woltjes, G. (2007). Happiness and loss aversion: Is utility concave or convex in relative income. *Journal of Public Economics*, 91, 1423-1448.
- Wakker, P. (2008). Explaining the characteristics of the power (CRRA) utility family. *Health Economics*, 17, 1329-1344.
- Wang, A. y Halal, W. (2010). Comparison of real asset valuation models: A literature review. *International Journal of Business and Management*, (5), 14-24.
- Wilmott, P. (2009). *Frequently Asked Questions in Quantitative Finance* (2 ed.). London: John Wiley & Sons.
- Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Yoshida, Y., Yasuda, M., Nakagami, J. y Kurano, M. (2006). A new evaluation of mean value for fuzzy numbers and its application to american options under uncertainty. *Fuzzy Sets and Systems*, (157), 2614-2626.
- Zdnek, Z. (2010). Generalised soft binomial american real option pricing model. *European Journal of Operational Research*, (207), 1096-1103.



## Anexo. Tablas expansión Edgeworth y coeficientes equivalentes ciertos implícitos

En la presente sección se presentan las tablas para calcular el recorrido de las variables aleatorias, incorporar la expansión en la función binomial y calcular los coeficientes equivalentes implícitos.

Tabla A.1: Cantidad de recorridos en cada nodo de la variable aleatoria (ecuación 1)

0	1	2	3	4
				1
			1	
		1		4
	1		3	
1		2		6
	1		3	
		1		4
			1	
				1

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.2: Valor en cada posición de la variable aleatoria (ecuación 2)

1	2	3	4
			-2,00
		-1,73	
	-1,41		-1,00
-1,00		-0,58	
	0,00		0,00
1,00		0,58	
	1,41		1,00
		1,73	
			2,00

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.3: Probabilidad binomial de la variable aleatoria (ecuación 3)

1	2	3	4
			0,0625
		0,125	
	0,25		0,25
0,5		0,375	
	0,5		0,375
0,5		0,375	
	0,25		0,25
		0,125	
			0,0625

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.4: Expansión de Edgeworth con  $\lambda=0$  y  $k=3$  (ecuación 4)

0	1	2	3	4
				1
			1	
		1		1
	1		1	
1		1		1
	1		1	
		1		1
			1	
				1

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.5: Expansión de Edgeworth con  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$  (ecuación 4)

0	1	2	3	4
				1,124
			1,124	
		1,124		0,901
	1,124		0,901	
1,124		0,901		0,808
	0,901		0,808	
		0,808		2,397
			2,397	
				8,258

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.6: Producto función binomial y expansión de Edgeworth con  $\lambda = 0$  y  $k = 3$  (ecuaciones 3 y 4)

0	1	2	3	4
				0,0625
			0,125	
		0,25		0,25
	0,5		0,375	
0		0,5		0,375
	0,5		0,375	
		0,25		0,25
			0,125	
				0,0625
$\Sigma$	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.7: Producto función binomial y Expansión de Edgeworth con  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$  (ecuaciones 3 y 4)

0	1	2	3	4
				0,07028
			0,1406	
		0,28112		0,22514
	0,56224		0,3377	
0		0,45028		0,30298
	0,45028		0,3030	
		0,20199		0,59917
			0,2996	
				0,51615
$\Sigma$	1,01252	0,93339	1,08083	1,71372

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.8: Probabilidades corregidas por factor de ponderación para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$

0	1	2	3	4
				0,0625
			0,125	
		0,25		0,25
	0,5		0,375	
0		0,5		0,375
	0,5		0,375	
		0,25		0,25
			0,125	
				0,0625
$\Sigma$	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.9: Probabilidades corregidas por factor de ponderación para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$

0	1	2	3	4
				0,04101
			0,13005	
		0,3012		0,13137
	0,55529		0,31245	
0		0,4824		0,17680
	0,44471		0,28032	
		0,2164		0,34963
			0,27718	
				0,30119
$\Sigma$	1	1	1	1

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.10: Parámetros para la estandarización para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$  (ecuaciones 5 y 6)

Media = $\sum f_j(x_j) * x_j$				
0	1	2	3	4
				0
			0	
		0		
	0			
Varianza				
0	1	2	3	4
				1
			1	
		1		
	1			
Desvío = Raíz de la Varianza				
0	1	2	3	4
				1
			1	
		1		
	1			

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.11: Parámetros para la estandarización para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$  (ecuaciones 5 y 6)

Media = $\sum f_j(x_j) * x_j$				
0	1	2	3	4
				0,738608044
			0,236287386	
		-0,119896312		
	-0,110577665			
Varianza				
0	1	2	3	4
				1,304250479
			1,363437097	
		1,020797763		
	0,9877726			
Desvío = Raíz de la Varianza				
0	1	2	3	4
				1,142037862
			1,167663092	
		1,010345368		
	0,99387			

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.12: Variables estandarizadas y transformadas para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$  (ecuación 7)

1	2	3	4
			-2
		-1,7321	
	-1,4142		-1
-1		-0,5774	
	0		0
1		0,5774	
	1,4142		1
		1,7321	
			2

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.13: Variables estandarizadas y transformadas para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$  (ecuación 7)

1	2	3	4
			-2,39800
		-1,68571	
	-1,2811		-1,52237
-0,9004		-0,69681	
	0,1187		-0,64675
1,1243		0,29209	
	1,5184		0,22888
		1,28099	
			1,10451

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.14: tasa de crecimiento  $\mu$  para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$  (ecuaciones 9, 10, 11 y 12)

0	1	2	3	4
				-0,011033999
			-0,011033999	
		-0,011033999		
	-0,011033999			
0,00000000				

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.15: tasa de crecimiento  $\mu$  para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$   
(ecuaciones 9, 10, 11 y 12)

0	1	2	3	4
				-0,005947213
			-0,009572699	
		-0,011718014		
	-0,012359341			
0,0000000				

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.16: DTA para proceso con transformación  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$

T	V(t) (\$)	Probabilidad (%)	Inversión (\$)
4	-121,28	100	-
3	-90,72	85	1,34
2	-80,57	55	25,80
1	-41,82	60	3,70
0	-36,17		-

Fuente: elaboración propia.

Tabla A.17: Probabilidades implícitas para  $\lambda = 0$  y  $k = 3$   
(ecuación 14)

0	1	2	3	4	nodos
1,000000000	0,500000000	0,250000000	0,125000000	0,062500000	0
	0,500000000	0,250000000	0,125000000	0,062500000	1
		0,250000000	0,125000000	0,062500000	2
			0,125000000	0,062500000	3
				0,062500000	4

Fuente: elaboración propia.



Tabla A.18: Probabilidades implícitas para  $\lambda = -0,23$  y  $k = 3,5$   
(ecuación 14)

0	1	2	3	4	nodos
1,000000000	0,684652011	0,505468038	0,388594114	0,301186557	0
	0,315347989	0,179183973	0,116873924	0,087407557	1
		0,136164016	0,062310050	0,029466366	2
			0,073853966	0,032843684	3
				0,041010283	4

Fuente: elaboración propia.