El criterio de Kelly frente al modelo Markowitz: optimización de portafolio bajo una función no lineal desacoplada de riesgo y rentabilidad. Aplicación al caso colombiano

Kelly's criterion versus the Markowitz model: Portfolio optimization under a decoupled nonlinear function of risk and return. Application to the Colombian case

Mauricio Enrique Sanabria-López*

* Magíster en Finanzas. Coordinador Operativo de Registros Públicos, Cámara de Comercio de Cali [mauricio.sanabria@gmail.com], [ORCID: 0000-0002-2261-9010].

Artículo recibido el 01 de febrero de 2020
Aceptado el 01 de marzo de 2020

Para citar este artículo:
Sanabria-López, M. E. (2020). El criterio de Kelly frente al modelo Markowitz: optimización de portafolio bajo una función no lineal desacoplada de riesgo y rentabilidad. Aplicación al caso colombiano. ODEON, 18, 259-292.
DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n18.07

Resumen

Se presenta un análisis comparativo del proceso de optimización de portafolio utilizando el criterio de Kelly bajo una función no lineal desacoplada, es decir, cuando la función de rentabilidad para un portafolio de múltiples activos se define como una función no lineal de la fracción del capital total que es asignado en cada inversión. Los elementos de comparación son los niveles de rentabilidad y riesgo en los dos portafolios (un portafolio obtenido por la aplicación del modelo de Markowitz frente a un portafolio aplicando el criterio de Kelly) en un horizonte de tiempo definido.

Palabras clave: optimización; portafolio; criterio de Kelly; Markowitz.

Clasificación JEL: G10, G19.

Abstract

A comparative analysis of the portfolio optimization processes is presented using the Kelly criterion under an uncoupled nonlinear function, that is, when the profitability function for a multi-asset portfolio is defined as a nonlinear function of the fraction of total capital. that is assigned in each investment. The comparison elements are the levels of profitability and risk in the two portfolios (a portfolio obtained by applying the Markowitz model versus a portfolio applying the Kelly criterion) in a defined time horizon.

Key words: Optimization; portfolio; Kelly criterion; Markowitz.

JEL classification: G10, G19.

Introducción

La teoría del portafolio desarrollada por Harry Markowitz (1952) parte del análisis interrelacionado de la rentabilidad y el riesgo de los activos (también conocido como análisis de media-varianza), y es considerada el punto de inicio de la teoría moderna de portafolio bajo una perspectiva de eficiencia. Así, la rentabilidad esperada de un portafolio con cierto número de activos es igual a la suma de la rentabilidad esperada de cada activo multiplicada por su participación dentro del portafolio, mientras que la varianza del portafolio se considera una medida adecuada del riesgo y se obtiene de: la varianza de cada activo, el coeficiente de la correlación entre los distintos activos y la participación porcentual de los mismos dentro del portafolio. Aproximación que por lo general considera la normalidad de los retornos logarítmicos, en donde la rentabilidad esperada (así como la varianza) parten de la ley de los grandes números y de la distribución normal.

El análisis media-varianza de Markowitz indica que un portafolio es eficiente si minimiza el riesgo, dado un nivel de rentabilidad esperada, o si maximiza la rentabilidad esperada, dado un nivel de riesgo.

La introducción de nuevas restricciones o el relajamiento de las ya expuestas (por ejemplo, la inclusión de las ventas en corto) crea nuevas vertientes que surgen de esta teoría, lo cual ha permitido el desarrollo del sector de gestión de portafolios dentro del mercado financiero. La optimización por asignación de activos (*Asset allocation optimization*) o la optimización del portafolio del capital (*Equity portfolio optimization*) son metodologías que surgen por las condiciones que se van creando en el mercado (un mayor o menor número de activos, las características del gestor del portafolio, entre otras).

De igual forma, las objeciones hacia la teoría inicial también han permitido el desarrollo de nuevas vertientes que buscan solucionar algunos de los supuestos del modelo inicial, los cuales se pueden resumir así: i) críticas a la función de utilidad del inversionista (al representar la utilidad y el objetivo de inversión con la media y la varianza del retorno); ii) el supuesto de normalidad de los retornos logarítmicos (con los supuestos y las críticas que esto implica); iii) el problema temporal, ya que el modelo es de un solo periodo y no permite análisis de largo plazo sobre el portafolio; iv) el enfoque de Planeación Financiera de Activos y Pasivos (*Asset Liability Financial Planning*), el cual afirma que la simulación de activos y pasivos es mejor para la asignación de activos que la teoría del portafolio.

Con base en los dos últimos desarrollos, la optimización estática de portafolio puede ser considerada inadecuada cuando se analiza en un contexto de inversión a largo plazo, especialmente cuando el principal objetivo del inversionista es la acumulación de riqueza en el largo plazo en un ambiente de incertidumbre (dado que no conoce lo que va a pasar en el periodo siguiente).

De forma similar, definir el retorno histórico utilizando el cambio promedio del precio de los activos en el tiempo simplifica e ignora la probabilidad de movimientos grandes en los precios de los activos en el largo plazo. Desde la teoría de la probabilidad se puede demostrar que el retorno óptimo de un portafolio de inversión no es una función lineal de la fracción o parte del capital asignado en cada inversión (Peterson, 2017-2018).

Un desarrollo que busca maximizar la rentabilidad en el largo plazo es la solución del problema del portafolio bajo el criterio de Kelly. Este criterio busca encontrar la cantidad óptima de inversión que maximiza la tasa de crecimiento esperada de largo plazo de dicha inversión. Leo Breiman, en 1961, demostró que en un espacio multivariado independiente e idénticamente distribuido (i.i.d), ninguna estrategia significativamente diferente de una bajo el criterio de Kelly podía superarla asintóticamente (Yingdong y Meister, 2009; Wesselhöfft, 2016). Se puede observar, entonces, que el resultado de la aplicación del criterio de Kelly permite encontrar la fracción óptima por apostar, que maximiza la rentabilidad promedio de un apostador bajo un número grande de apuestas (Peterson, 2017-2018).

A partir de los resultados en tiempo discreto se han desarrollado otras investigaciones que buscan llevar la aplicación del criterio de Kelly a un nivel más general (y, por ende, con otro tipo de supuestos) como, por ejemplo, con resultados múltiples correlacionados, con distribución continua y con opciones más extensas de inversiones (portafolios más amplios) así como con diferentes procesos de evolución de los precios de los activos.

Con base en lo anterior, el objetivo de este documento es presentar un análisis comparativo del proceso de optimización de portafolio utilizando el criterio de Kelly, bajo una función no lineal desacoplada, es decir, cuando la función de rentabilidad para un portafolio de múltiples activos se define como una función no lineal de la fracción del capital total que es asignado en cada inversión. Los elementos de comparación serán los niveles de rentabilidad y riesgo en los dos portafolios (un portafolio aplicando el modelo de Markowitz frente a un portafolio aplicando el criterio de Kelly) en un horizonte de tiempo definido.

En esta función desacoplada, el problema de optimización de riesgo y rentabilidad se puede trabajar de manera simultánea utilizando un parámetro de riesgo. Se asume que el comportamiento de los precios de los activos por optimizar sigue un proceso "clásico" de Wiener o movimiento Browniano geométrico (MGB) como el desarrollado por Robert C. Merton en 1969.

Una vez descrito el desarrollo se realiza un ejercicio de comparación de aplicación del criterio de Kelly bajo la función desacoplada a un portafolio de 10 acciones de la Bolsa de Valores de Colombia (BVC) frente a un portafolio construido bajo el modelo de Markowitz, con lo que se replica un ejercicio realizado por Zachariah Peterson (2017-2018) para un grupo de 10 acciones de la Bolsa de Bombay.

El documento continúa con el siguiente orden: i) el desarrollo del criterio de Kelly en la teoría del portafolio, en donde se describe la solución para el problema del portafolio en tiempo discreto y en tiempo continuo; ii) caracterización de la solución óptima del problema del portafolio bajo el criterio de Kelly mediante la reformulación de la función de retorno como una función no lineal desacoplada con optimización simultánea de riesgo y rentabilidad, en donde el comportamiento de los precios de los activos sigue un movimiento Browniano geométrico, con la aplicación al caso colombiano seleccionando un grupo de 10 acciones de la BVC y comparando los resultados obtenidos contra un portafolio construido bajo la teoría clásica de Markowitz; iii) las conclusiones con los resultados encontrados.

1. El criterio de Kelly en la teoría del portafolio

El criterio de Kelly es una teoría que busca resolver un problema: la asignación óptima de recursos (es decir, la cantidad que se va a invertir) de manera proporcional en situaciones que tienen una probabilidad a favor (una probabilidad de que la riqueza o el capital invertido aumente).

El criterio de Kelly surgió de la investigación realizada por John Kelly en 1956, quien se motivó inicialmente por encontrar situaciones más convenientes para el apostador bajo un entorno de canales de comunicación ruidosos, pero las implicaciones más importantes han sido en el mercado accionario, específicamente en la asignación óptima de portafolio en dicho mercado, de manera tal que en cierta forma se separa lo referente al mundo de las apuestas en los juegos de azar del mundo de la inversión en el mercado accionario. Así, el criterio de Kelly al que se hace referencia aplica a inversiones que tienen un horizonte finito de tiempo pero que se pueden repetir indefinidamente (dado que lo que se busca es maximizar la riqueza en el tiempo).

1.1. Desarrollo en tiempo discreto

En tiempo discreto y para un solo evento, el problema se puede considerar como una apuesta en donde existe una probabilidad de ganar p, así como una probabilidad de perder ($q = 1 - p$) en donde la ganancia esperada por unidad apostada es

$$E_{ganar} = \gamma\, p - q \tag{1}$$

Se asume (dado que se tiene una historia de los resultados anteriores) que la probabilidad de ganar es mayor a la de perder por lo que el valor esperado es positivo (donde γ corresponde a la rentabilidad promedio cuando la apuesta ha sido ganadora) y quien apuesta (o invierte) planea realizar dicha inversión indefinidamente.

La pregunta que surge a continuación es cuánto invertir en cada momento, ya que no es óptimo invertir la cantidad total (con un solo resultado en contra perdería toda la inversión[1]), sea F_0 la riqueza inicial y f el monto o fracción fija de la riqueza por invertir en cada momento. Después del primer momento la riqueza final F_1 se encontrará entre estos dos posibles resultados:

$$F_1 = \begin{cases} si\ ganó\ F_0 + \gamma f F_0 = \left(1+\gamma f\right)F_0 \\ si\ perdió\ F_0 - f F_0 = \left(1-f\right)F_0 \end{cases}$$

Después de N resultados o jugadas la fortuna resultante será el siguiente producto:

$$FN = (1 + \gamma f)^W (1 - f)^L F_0 \qquad (2)$$

Donde W es el número de victorias o ganancias y L es el número de derrotas o pérdidas en N resultados o jugadas. Lo que se busca con el criterio de Kelly es maximizar la tasa esperada de crecimiento de nuestra riqueza (Shonkwiler, 2013), es decir, el valor que esperamos haya aumentado el capital inicial después de un periodo determinado de tiempo.

Sea G_N la tasa de crecimiento después de N resultados; esta tasa satisface la ecuación $e^{G_N N}F_0 = F_N$ por lo que G_N se puede expresar de la siguiente forma:

$$G_N = \frac{1}{N}\log\frac{F_N}{F_0} = \frac{W}{N}\log\left(1+\gamma f\right) + \frac{L}{N}\log\left(1-f\right) \qquad (3)$$

Donde W, L y G_N son variables aleatorias. Dado que N tiende al infinito, la razón $\frac{W}{N}$ tiende a p y la razón $\frac{L}{N}$ tiende a q con probabilidad 1, entonces en el límite tenemos la tasa de crecimiento esperada

$$G = p \log(1 + \gamma f) + q \log(1 - f) \qquad (4)$$

1 El desarrollo que se muestra a continuación se puede consultar en Shonkwiler (2013, cap. 7).

Si se maximiza G (derivando con respecto a f e igualando a cero) tenemos

$$0 = \frac{p\gamma}{1+\gamma f} - \frac{q}{1-f} = \frac{p\gamma(1-f) - q(1+\gamma f)}{(1+\gamma f)(1-f)}$$

En donde la solución o la cantidad óptima f por invertir (o apostar) en cada momento del tiempo es la siguiente:

$$f = \frac{\gamma p - q}{\gamma} = \frac{E_{ganar}}{\gamma} \tag{5}$$

1.2. Desarrollo en tiempo continuo[2]

Para el desarrollo en tiempo continuo se asume que el mercado es completo y no tiene fricciones[3], y se considera que todo el proceso se desarrolla en un tiempo finito, en el intervalo de 0 a T.

Se considera un espacio de probabilidad compuesto por: Ω (que es el conjunto de posibles valores o estados de todas las variables aleatorias o procesos considerados); F_T es una sigma-álgebra que contiene la información acumulada hasta el final del proceso (es decir, hasta T), y P_T es la medida de probabilidad en el mercado (en el *spot*).

De igual forma, existe un subespacio de probabilidad (hasta el momento t) en donde F_T es una filtración que contiene la información acumulada hasta el momento t, y P_T es la restricción de P_T en la filtración F_T.

Se define un proceso de riqueza, denominado B_t, que representa una cuenta de ahorros con valor inicial 1 en el momento 0. Este proceso de riqueza hace parte de un mercado con n + 1 activos para invertir, en donde el proceso sigue el siguiente comportamiento:

---

2 El desarrollo completo se puede consultar en Yingdong y Meister (2009, pp. 2-6).

3 Por completo se entiende que cualquier reclamación contingente puede ser replicada con los activos que hay en el mercado (incluyendo el activo libre de riesgo) a través de un portafolio (Björk, 2009). Con relación a un mercado sin fricciones se entiende que no tiene restricciones en términos de costos asociados a las transacciones (ver www.inversiopedia.com).

$$dB_t = B_t r_t dt \tag{6}$$

donde r_t corresponde a la tasa de interés de corto plazo en el momento t. El resto de los activos del mercado (los n activos restantes) se denotan como = (t), $t \in [0, T]$, y se denota como S_t al vector conformado por estos activos, con dimensión $n \; x \; 1$.

Se asume que el portafolio puede estar conformado por cualquiera de los $n + 1$ activos considerados, en donde se define el valor total del portafolio como una suma ponderada de la participación de cada activo multiplicada por el valor del activo. De igual forma, es necesario definir el producto interno del vector de activos S_t y su vector de participaciones ϕ_t de dimensión n y definido como $(\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots \phi_n(t))^T$, así como el número de unidades que se posee en el momento t del activo B_t:

$$V_t(g) = \phi_0(t)\, B_t + \phi_t . S_t \tag{7}$$

donde $V_t\,(g)$ es el valor total del portafolio.

Con lo anterior es posible demostrar lo siguiente: dada una función de utilidad cóncava existe una estrategia de *trading* autofinanciable[4] óptima (y que pertenece al conjunto de estrategias autofinanciables D) de manera tal que para cada tiempo t dentro del intervalo total de tiempo $t \in [0, T]$, el valor esperado de la estrategia óptima $g^* \in D$ es mayor o igual al valor esperado de cualquier otra estrategia, así:

$$E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g^*\right)\right)\right] \quad E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g\right)\right)\right] \quad \forall g \in D$$[5]

Sea $g_t = (\phi_0(t), \phi_t)$ una estrategia de *trading* autofinanciable que satisface

$$dV_t(g) = \phi_0(t) dB_t + \phi_t .\, dS_t,\ \forall t \in [0, T] \tag{8}$$

4 Una estrategia de negociación es autofinanciada cuando el cambio en su valor se debe solamente a cambios en el valor de los activos que lo conforman y no a la entrada o salida exógena de capital.

en donde la ecuación (8) describe el cambio diferencial en el valor del portafolio, y se asume que $V_0(g) = 1$. De igual forma, dicha estrategia es admisible si y solo si

$$V_t(g) >= 0, P_T, \textit{siempre que } \forall t \in [0, T] \tag{9}$$

Se tiene una función de utilidad cóncava $U(x), x \geq 0$, que representa la función de riqueza, en donde la concavidad está definida de la siguiente forma:

$$U((1-p)\,x_1 + px_2) \geq (1-p)\,U(x_1) + p\,U(x_2),\ \forall x_2 \geq x_1 \geq 0 \ y\ 0 \leq p \leq 1 \tag{10}$$

Se asume que la función de utilidad $U(x)$ es derivable de primer orden para $\forall$ $x \in (0, +\infty)$. La primera derivada en $x = 0$ puede ser finita o infinita, y la primera derivada de $U(x)$ con $x \geq 0$ es una función estrictamente decreciente de x con $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$.

Si $U'(0) = +\infty$, entonces sea $I(x), x \geq 0$ la función inversa de $U'(x)$ con $I(0) = +\infty$ e $I(+\infty) = 0$. Para $U'(0) = \mathrm{b} > 0$, se define $I_b(x), x \in [0, b]$ la función inversa de $U'(x)$ con $I(0) = +\infty$. En este caso se define $I(x)$ de la siguiente manera:

$$\begin{matrix} I(x) = I_b(x), x \in [0, b] \\ 0, x \in (b, +\infty) \end{matrix} \tag{11}$$

Recordemos que necesitamos hallar la estrategia óptima $g^* \in D$ la cual es mayor o igual al valor esperado de cualquier otra estrategia, así:

$$E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g^*\right)\right)\right] >= E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g\right)\right)\right], \forall g \in D \tag{12}$$

Para hallar la estrategia óptima $g^* \in D$ mencionada anteriormente, se introduce el siguiente lema:

Lema 1: la función $I(x), x \in [0, +\infty)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$U(I(y)) - yI(y) \geq U(c) - yc,\ \forall\ y, c \in [0, +\infty) \tag{13}$$

Prueba: Si $I(y) = c$ se tiene la igualdad. Por otro lado, revisemos qué debe pasar si $I(y) > c$, en este caso se tiene que la tasa de crecimiento promedio de $U(x)$ desde c hasta $I(y)$ es (Yingdong y Meister, 2009, pp. 2-6):

$$\frac{U(I(y))-U(c)}{I(y)-c}$$, la cual trae la siguiente desigualdad

$$\frac{U(I(y))-U(c)}{I(y)-c} \geq U'(I(y)) = y$$, entonces se tiene que

$$U(I(y)) - yI(y) \geq U(c) - yc$$

De igual forma, se puede aplicar para el caso en que $I(y) < c$

Ahora se define $\tilde{P}_T$ como la martingala del mercado (la medida de riesgo neutral) y $Z_T = \frac{dP_t}{d\tilde{P}_T}$ por lo cual (Z_T, F_T) es una martingala $\tilde{P}_T$. Definimos también $n_t^* = y_t Z_t^{-1} B_t^{-1}, V_t^* = I(n_t^*)$, donde se asume que y_t es una función determinística de t y está definida de manera tal que $\tilde{V}_t^* = V_t^* B_t^{-1}$ es una martingala $\tilde{P}_T$. Entonces y_t resuelve la ecuación:

$$\tilde{E}\left[B_t^{-1} I\left(y_t Z_t^{-1} B_t^{-1}\right)\right] = 1 \tag{14}$$

Ahora se debe demostrar la proposición 1:

$V_t^* = I(n_t^*)$ satisface la desigualdad de la ecuación (12).

Recordemos: sea $V_t(g)$, $\forall\ g \in D$ el proceso de riqueza que corresponde a la estrategia especial de trading g, entonces $E_{P_T}\left[U\left(V_t^*\right)\right] - E_{P_T}\left[U\left(V_t(g)\right)\right]$

$$= E_{P_T}\left[\left(U\left(I\left(n_T^*\right)\right) - n_T^* I\left(n_T^*\right)\right) - \left(U\left(V_T(g)\right) - n_T^* V_T(g)\right) + E_{P_T}\left[n_T^*\left(V_T^* - V_T(g)\right)\right]\right. \tag{15}$$

Con base en el lema 1, el primer término del lado derecho de la ecuación (15) es positivo, y el segundo término es igual a cero (0), entonces tenemos lo siguiente:

$$E_{P_T}\left[n_T^*\left(V_T^*-V_T\left(g\right)\right)\right]=\tilde{E}\left[Z_T n_T^*\left(V_T^*-V_T\left(g\right)\right)\right]=Y_t\tilde{E}\left[V_T^*-V_T\left(g\right)\right]=0 \qquad (16)$$

En donde dado que $\tilde{V}_T^*-V_T\left(g\right)$ son martingalas, se tiene la última igualdad. Combinando las ecuaciones (15) y (16) tenemos la siguiente desigualdad:

$$E_{P_T}\left[U\left(V_T^*\right)\right]>=E_{P_T}\left[U\left(V_T\left(g\right)\right)\right]$$

La proposición 1 solamente establece que $I\left(n_t^*\right)$ satisface la ecuación (12). Mediante el teorema 1 se establece que efectivamente $I\left(n_t^*\right)$ es el proceso de riqueza óptimo, lo cual se demuestra a continuación.

Teorema 1. Dada una función de utilidad cóncava $U(x)$ existe una estrategia de *trading* autofinanciable óptima g^* de manera tal que para todo tiempo $t\in[0,T]$, el proceso de riqueza $V_t(g^*)$ de esta estrategia satisface la siguiente desigualdad:

$E_{P_T}\left[U\left(V_t^*\left(g\right)\right)\right]>=E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g\right)\right)\right], \forall g\in D$ y el proceso de riqueza óptimo está dado por $V_t\left(g^*\right)=I\left(n_t^*\right), \forall t\in\left[0,T\right]$.

Se define $\tilde{V}_t^*=B_t^{-1}I\left(n_t^*\right)$. Para $t = T$ tenemos $\tilde{V}_t^*=B_T\tilde{V}^*=I\left(n_t^*\right)$, lo cual representa una reclamación general contingente del mercado. Dado que el mercado es completo, la reclamación contingente $\tilde{V}_t^*$ es alcanzable. Esto significa que existe una estrategia de *trading* autofinanciable g^* tal que $\tilde{V}_t^*=V_T\left(g^*\right)B_t^{-1}$, donde $V_t(g^*)$ es el proceso de riqueza de esta estrategia. Por lo anterior, el proceso de riqueza relativo $\tilde{V}_t\left(g^*\right)=V_t\left(g^*\right)B_t^{-1}$ es una martingala bajo la medida de martingala $\tilde{P}_T$, y tenemos que:

$$V_T^*=B_t\tilde{E}\left[\tilde{V}_T^*\middle|F_t\right]=B_t\tilde{E}\left[\tilde{V}_T\left(g^*\right)\middle|F_t\right]=V_t\left(g^*\right), \forall t\in\left[0,T\right] \qquad (17)$$

La ecuación (17) muestra que g^* es una estrategia de *trading* autofinanciable y replica el proceso óptimo de riqueza $V_T^* = B_t^{-1} I\left(n_t^*\right)$. A partir de la combinación de $\tilde{V}_t^*$ que satisface la ecuación (12) para cualquier tiempo t antes de T, y con la ecuación (17), podemos ver que $V_t(g^*)$ también satisface la ecuación (12). Esto prueba que la estrategia g^* es tanto autofinanciable como óptima.

Por lo establecido en la proposición 1 y el teorema 1 se tiene, entonces, la existencia de una estrategia de *trading* autofinanciable $g^* \in F$, donde la riqueza total a un tiempo fijo T es consistente con la ecuación (12); de esta manera, el proceso de riqueza $V_t(g^*)$ satisface la siguiente desigualdad:

$$E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g^*\right)\right)\right] >= E_{P_T}\left[U\left(V_t\left(g\right)\right)\right], \forall g \in D$$

Entonces, una estrategia de *trading* óptima para un tiempo fijo T será óptima para cualquier tiempo antes de T.

Luego de la descripción de la solución del problema del portafolio en tiempo discreto y en tiempo continuo bajo el criterio de Kelly se analizará un caso de optimización de portafolio con el criterio de Kelly en una función no lineal desacoplada.

2. Optimización de portafolio bajo una función no lineal desacoplada: aplicación utilizando el criterio de Kelly. Desarrollo teórico

A continuación, se presentará el desarrollo de una de las vertientes de investigación que han surgido cuando los supuestos del modelo clásico de media varianza de Markowitz son cambiados con base en las críticas expuestas en la introducción, en especial, la sobresimplificación del problema al ignorar movimientos extremos de los activos durante un horizonte de largo plazo.

2.1. Reformulación de la función de rentabilidad: desarrollo de la función no lineal desde el modelo de media varianza al criterio de Kelly

Como se mencionó en la introducción, en el largo plazo (en donde se pueden observar movimientos importantes en los precios de los activos) se puede demostrar, desde la teoría de la probabilidad, que la rentabilidad óptima de una inversión o de un portafolio de inversiones no es una función lineal de la fracción de capital o riqueza asignado a cada inversión. En otras palabras, la función original de rentabilidad lineal de Markowitz no es la representación adecuada para llegar a dicha rentabilidad óptima, y, por tanto, necesita ser reformulada, lo cual se verá a continuación[5].

La función lineal de Markowitz (modelo media-varianza, en adelante MV) define la rentabilidad de un portafolio de N inversiones con valor inicial W_0 como la suma ponderada de los retornos de cada una de las inversiones r_i, en donde cada rentabilidad está ponderada por la fracción de portafolio que se encuentra invertida en cada activo f_i.

Los retornos o rentabilidades de las inversiones son variables aleatorias, y el valor de un portafolio de N inversiones después de n periodos de acumulación es el producto n-ésimo de acumulaciones, donde cada acumulación multiplica el valor de la i-ésima inversión por un factor $1 + X_{i,j}$, donde $X_{i,j}$ es una variable aleatoria que representa el valor de la i-ésima inversión (activo) del periodo $j - 1$ al periodo j.

Si hacemos referencia a una acción, entonces si $X_{i,j} = \left(\frac{S_{i,j+1}}{S_{i,j}}\right) - 1$ representa el retorno o la rentabilidad de una acción, donde $S_{i,j}$ es el valor de la i-ésima acción en el periodo j. El valor del portafolio después del periodo n es

$$w_n \sum_{i=1}^{N} f_i W_0 \left(1 + X_{i,j}\right)^n \tag{18}$$

La tasa de rentabilidad promedio después de un solo periodo en el modelo MV es la suma de los valores esperados de los cambios fraccionales en el valor de los activos, así:

$$R_{promedio} = \sum_{i=1}^{N} f_i E\left[X_i\right] \tag{19}$$

En donde algunos autores (incluido al mismo Markowitz) han formulado cada valor esperado como el promedio de muestras grandes de cambios en el valor de los activos (puede ser de diferente frecuencia: diaria, semanal, mensual,

5 El desarrollo completo se puede consultar en Peterson (2017-2018).

anual, etc.) durante periodos discretos de tiempo, y otros autores (Bichpuriya y Soman, 2016; Yang y Xinwang, 2016) definen primero una función de densidad de probabilidad para cambios en el valor de los activos entre puntos sucesivos en el tiempo y después calculan el valor esperado de cada inversión $E[r_i]$ directamente a partir de esta distribución (Peterson, 2017-2018).

Para el desarrollo del valor esperado desde la formulación de la función de rentabilidad del portafolio bajo el criterio de Kelly, se asume que cada una de las funciones de distribución para las rentabilidades de cada inversión, así como la matriz de covarianzas que define el riesgo, se conocen *a priori* o pueden ser determinadas a partir de la información del mercado.

Así, el criterio de Kelly se puede utilizar para definir la función de rentabilidad del portafolio en términos del valor esperado de una tasa exponencial constante, en donde el capital inicial invertido W_0 es invertido en N fracciones o porciones de tamaño $f_i W_0$ y se aplica el criterio de Kelly para cada porción de capital[6].

Sea W_j el valor total del portafolio en el periodo j, y sea $w_{i,j}$ el valor del portafolio debido a los retornos del activo i al periodo j.

El hecho de aplicar el criterio de Kelly bajo la estrategia de invertir una fracción fija del capital implica que se debe invertir una porción f_i del capital en un activo de riesgo en $j = 0$, de manera que se optimice la tasa de retorno.

En términos del cambio de la porción de capital en el activo de valor $X_{i,j}$, entonces se define el valor del portafolio invertido en el i-esimo activo después de un solo periodo, así:

$$w_{i,j+1} = W_j - f_i W_j + f_i W_j (1 + X_{i,j}) \tag{20}$$

En el periodo j, una cantidad de capital igual a $w_{i,j} = f_i W_j$ es invertida y la inversión se aprecia en valor a $f_i w_{i,j} (1 + X_i, j)$ del periodo j a $j + 1$, en donde $w_j - f_i W_j$ será la cantidad por invertir en otros activos. Para la primera acumulación la ecuación (20) se reduce a:

6 Se utilizará la estrategia de invertir una fracción fija en un activo de riesgo o “inversión fija de una porción” (Rotando y Thorpe, 1992; Browne y Whitt, 1996), la cual se mantiene durante todo el horizonte de inversión, de manera que se maximiza la tasa de rentabilidad del portafolio y se minimiza el tiempo que le toma al portafolio alcanzar el valor objetivo, estrategia que ha sido probada en tiempo discreto y continuo (Peterson, 2017-2018).

$$w_{i,1} = W_0 - f_i W_0 + f_i W_0(1 + X_{i,0}) = W_0(1 + f_i X_i, 0) \tag{21}$$

Con base en las ecuaciones (20) y (21), el valor del portafolio después de *n* periodos se puede hallar usando permutaciones en el índice *j* en (21) y realizando la sumatoria sobre el índice *i*.

Así, iterando el índice *j* desde 0 hasta *n* y usando el teorema del binomio, se tiene el siguiente valor del portafolio por los rendimientos de la *i*-esima inversión después de *n* periodos:

$$w_{i,n} = W_0 \prod_{j=1}^{n} \left(1 + f_i x_{i,j}\right) \tag{22}$$

Bajo la estrategia de inversión fija de una porción del capital[7], la porción o fracción fija del portafolio invertido en el activo *i* es $f_i w_i, j \ \forall \ j$.

El valor total del portafolio en el periodo *j* es $W_j = \sum_{i=1}^{N} f_i w_{i,j}$.

Así, el valor total del portafolio después de *n* periodos es:

$$w_n = \sum_{i=1}^{N} f_i W_0 \prod_{j=1}^{n} \left(1 + f_i X_{i,j}\right) \tag{23}$$

Con la ecuación (23) se puede observar que el valor del portafolio después de *n* periodos depende no linealmente de la porción o fracción de la riqueza o capital total asignada en cada inversión (Peterson, 2017-2018), en donde la función de rentabilidad se define así:

$$R_{promedio} = \sum_{i=1}^{N} f_i W_0 \prod_{j=1}^{n} \left(1 + f_i X_{i,j}\right) - 1 \tag{24}$$

La cual es la función de rentabilidad del portafolio después de *n* periodos de acumulación. De igual forma, ahora se tiene una función donde los retornos son resultados que vienen de un conjunto de variables aleatorias, y con esa misma función se puede calcular la rentabilidad esperada, así como la varianza de los retornos (Peterson, 2017, 2018).

7 *Idem*.

El valor esperado vendrá de un número grande de acumulaciones (es decir, cuando el proceso se vuelve continuo). Lo anterior permite aplicar una identidad logarítmica para una función de rentabilidad para un número grande de acumulaciones, en donde cada uno de los productos $(1 + f_i X_{i,j})$ de la ecuación (24) se puede convertir en una función exponencial de una sumatoria:

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+f_i X_{i,j}\right)=\exp\left(\sum_{i=1}^{N}\ln\left(1+f_i X_{i,j}\right)\right) \tag{25}$$ [8]

Utilizando el teorema del límite central, en donde la suma de un número grande de resultados de una familia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d) converge al valor esperado de una variable aleatoria, si se asume que los parámetros de deriva (*drift*) y la volatilidad que definen la distribución de $X_{i,j}$ son constantes durante el horizonte de tiempo de inversión, entonces cada uno de los términos de $X_{i,j}$ en (25) son resultados independientes e idénticamente distribuidos durante todo j (el horizonte de inversión)[9].

Asumiendo que los retornos sucesivos de un activo individual no están correlacionados, se utiliza el teorema del límite central para convertir la sumatoria en el argumento de la función exponencial en la ecuación (25) en un valor esperado multiplicado por el número total de acumulaciones (n):

$$\prod_{j=1}^{n}\left(1+f_i X_{i,j}\right)\sim\exp\left(nE\left[\ln\left(1+f_i X_i\right)\right]\right) \tag{26}$$ [10]

Donde X_i es una acumulación en un (1) solo periodo. La ecuación (26) expresa el límite mientras el número de acumulaciones sea muy grande (tienda a

8 En términos generales, la ecuación (3.8) representa los resultados sobre múltiples etapas de tiempo donde las rentabilidades sobre etapas de tiempo sucesivas pueden estar correlacionadas. En adelante, el autor resuelve el problema de las múltiples etapas considerando retornos que acumulan sobre una sola etapa de tiempo.

9 Al respecto Peterson (2017-2018) recuerda el supuesto de que los retornos sucesivos de un solo activo en múltiples etapas o momentos del tiempo es común en modelos de evolución de activos, por lo cual se puede tomar como una aproximación inicial el suponer que los $X_{i,j}$ son también independientes para $\forall j$; no obstante, no hay evidencia de que cambios sucesivos en los valores de acciones individuales tengan un comportamiento como variables aleatorias i.i.d. En general, se puede esperar que estén correlacionados en el tiempo, pero si dicha correlación es fuerte es necesario utilizar un teorema de límite diferente a la ley de los grandes números (Peterson, 2017-2018).

10 En este caso el símbolo $\sim$ quiere decir convergencia.

infinito) y es una aproximación. Siempre que el número de acumulaciones sea grande, y el valor esperado crezca más rápido que el tamaño del intervalo de confianza, el retorno actual se aproximará al retorno esperado de la ecuación (26) con probabilidad 1 (Peterson, 2017-2018)[11].

El retorno promedio para una sola acumulación se puede hallar aproximando la sumatoria en la ecuación (25) a la media, y reemplazando dicha aproximación en (26), y volviendo a (24) con n = 1, se tiene el retorno promedio del i-ésimo activo para una sola acumulación:

$$R_{promedio} \sum_{j=1}^{n} f_i \exp\left(E\left[\ln\left(1+f_i X_i\right)\right]\right)-1 \tag{27}$$

Al observar entonces las sumas de los logaritmos de manera separada o desacoplada, se tiene la función desacoplada del retorno o rentabilidad en la ecuación (27).

Si se aplicara este proceso sin dividir el portafolio en N fracciones, se tiene el valor esperado del logaritmo de una suma interna, es decir, se tendría una función de rentabilidad acoplada de las variables aleatorias y las fracciones de riqueza F_i en un (1) solo valor esperado en N dimensiones, así:

$$R_{acoplada} = \exp\left(E\left[\ln\left(1+\sum_{i=1}^{N} F_i X_i\right)\right]\right)-1 \tag{28}$$

Es importante anotar que ambas funciones de rentabilidad (tanto la desacoplada como la acoplada) requieren un conocimiento previo de la función de distribución conjunta $p(X)$ para los activos del portafolio.

La función acoplada (ecuación 28), dado que se tiene una integral de N dimensiones no separable, es computacionalmente más compleja de resolver que una función desacoplada (como la ecuación 27), e incluso depende de la forma de la función de distribución conjunta para evaluar si tiene solución analítica (Peterson, 2017-2018).

11 A medida que aumenta el horizonte de inversión, el incremento del valor esperado de los retornos aumenta con mayor rapidez que el tamaño del intervalo de confianza, es decir, las predicciones bajo el criterio de Kelly son asintóticas (Samuelson, 1971; Rotando y Thorpe, 1992; Thorpe, 1997).

En el caso de la función desacoplada, dado que la de $N-1$ variables se puede eliminar mediante integración sobre el espacio de los resultados en $N-1$ dimensiones, se reduce la ecuación a una distribución marginal para un solo activo (Peterson, 2017-2018).

En resumen, con los desarrollos anteriores de este apartado, se tiene la función no lineal desacoplada de rentabilidad, ahora es necesario pasar a definir el riesgo. Lo anterior con el objetivo de calcular el retorno esperado (promedio) y la varianza de los retornos, y poder utilizar dichos resultados en un modelo de optimización de portafolio de una función no lineal desacoplada bajo el criterio de Kelly y bajo el análisis de media varianza de Markowitz.

Para definir el riesgo (varianza) es importante recordar que la ecuación (24) es una combinación lineal de variables aleatorias y la varianza de esa función define el riesgo del portafolio (Markowitz, 1952).

Dado que la varianza de una combinación lineal de variables aleatorias se puede escribir como el producto interior de la matriz de covarianzas de dichas variables aleatorias (Peterson, 2017-2018), se define $[Z]$ como una combinación lineal de variables aleatorias con matriz de covarianzas $[M]$, y $[a]$ el vector de coeficientes (vector de columna)

$$Var[Z] = [a]'[M][a] \tag{29}$$

Siendo $[a]'$ la transpuesta de $[a]$. En un (1) solo periodo de tiempo ($n = 1$) se puede calcular la varianza de un único retorno en la ecuación (24). Las variables aleatorias en la función de rentabilidad son $1 + f_i X_i$ y los coeficientes son $a_i = f_i$. Las entradas en la matriz de covarianzas se definen así:

$$M_{ij} = Cov[X_i, X_j] \tag{30}$$

En donde el vector de coeficientes en (24) es $[a] = [f^2]$. Tomando el producto interior de la matriz de covarianzas definido en la ecuación (30) tenemos la función de riesgo del portafolio:

$$Var\left[R\right] = \sum\nolimits_{i=1}^{N}\left(f_i^{\,4} M_{ii} + 2\sum\nolimits_{j>i}^{N} f_i^{\,2} f_j^{\,2} M_{ij}\right) \tag{31}$$

La función de riesgo del portafolio es entonces un polinomio de cuarto grado en términos de las variables f_i.

2.2. Optimización simultánea de riesgo y rentabilidad: la función desacoplada y el parámetro de riesgo

Las ecuaciones (27) y (31) forman el problema conocido normalmente para buscar una optimización dual (en este caso de rentabilidad y riesgo). Estos dos resultados pueden ser combinados en una única función objetivo utilizando un parámetro de riesgo P, el cual mide el grado de aversión (P con un valor pequeño) o preferencia (P con un valor grande) por el riesgo. De igual forma, esto también permite que el portafolio de un inversionista pueda ser diseñado con base en sus preferencias de riesgo (Peterson, 2017-2018).

Existen diferentes modelos que permiten la incorporación de preferencias de riesgo, en este caso se pueden especificar límites diferentes para cada activo o los mismos límites para todos los activos del portafolio[12].

Este tipo de restricciones se pueden definir utilizando un par de vectores con los valores máximos y mínimos de f, de manera que las fracciones de la riqueza que se van a invertir se encuentren dentro de dichos límites. Si se definen las fracciones o porciones de riqueza en un vector $[f]$, la condición límite en el problema del modelo de Kelly desacoplado es la siguiente:

$$[K_{min}] \leq [f] \leq [K_{max}] \tag{32}$$

donde la suma de los componentes del vector de máximos debe ser menor que el número total de activos, buscando así que no se invierta todo el capital en un solo activo[13]. Esta restricción se aplicará a las ecuaciones de rentabilidad y riesgo del modelo de Markowitz, el cual se presenta combinando las dos ecuaciones en una sola (ecuación 33)

12 Es necesario definir la función para realizar la optimización del portafolio en cada modelo; en el caso del modelo de Media Varianza (MV) sus ecuaciones de riesgo y rentabilidad se combinan en una sola función objetivo, lo cual se verá más adelante en la ecuación (3.16). De igual forma, el mismo procedimiento se realizará para el modelo de Kelly utilizando las funciones de rentabilidad y riesgo desarrolladas hasta el momento: ecuaciones (3.10) y (3.14) (Peterson, 2017-2018).

13 Asimismo, con un $K_{min} > 0$ se busca, por ejemplo, que todos los activos reciban una fracción del capital por invertir.

$$\max P\sum_{i=1}^{N} F_i E\left[r_i\right]-\left(1-P\right)\sum_{i=1}^{N}\left(F_i^{\,2}M_{ii}+2\sum_{j>i}^{N}F_iF_jM_{ii}\right)$$
$$\text{s.a}\textstyle\sum_{i=1}^{N}F_i=1,K_{min,i}\le F_i\le K_{max,i}\forall i. \qquad (33)$$

donde la matriz [M] corresponde a la ecuación (30), P es un parámetro de riesgo en el intervalo [0, 1] y los valores esperados de X_i ($E[X_i]$) son calculados del mercado.

A continuación, se realiza el mismo ejercicio de combinación de las dos ecuaciones de rentabilidad y riesgo, pero para el caso del criterio de Kelly, es decir, utilizando las funciones desacopladas de las ecuaciones (37) y (31)

$$\max P\sum_{i=1}^{N} f_i\left(\exp\left(E\left[\ln\left(1+f_iX_i\right)\right]-1\right)-\left(1-P\right)\sum_{i=1}^{N}\left(f_i^{\,4}m_{ii}+2\sum_{j>i}^{N}f_i^{\,2}f_j^{\,2}M_{ij}\right)\right.$$
$$\text{s.a}\textstyle\sum_{i=1}^{N}f_i^{\,2}=1,K_{min,i}\le f_i^{\,2}\le K_{max,i}\forall i. \qquad (34)$$

Donde las variables por optimizar son el conjunto de $\{f_i\}$ y las porciones de riqueza invertidas en cada activo son el conjunto de $\left\{f_i^{\,2}\right\}$.

Por el lado de la ecuación (27), sus términos individuales son funciones cóncavas y dado que la combinación lineal de esos términos con coeficientes positivos también son funciones cóncavas, existe una solución que maximizará (27); analizando la ecuación (31) cada término es una función polinomial de grado par y los pares de activos con correlación positiva son convexos, así, la combinación lineal de esos términos es una función convexa por lo que existe una solución que minimice ese componente (Peterson, 2017-2018).

Aún en el caso de los pares de activos con correlación negativa, estos serán transformados en funciones convexas cuando se multiplican por el coeficiente $-(1-P)$ y esos términos incrementaran el valor de la función objetivo, por lo que existirá una solución que maximice el problema de optimización del portafolio de la ecuación (34) (Peterson, 2017-2018)[14].

14 Para que las fracciones o porciones de riqueza generadas por el criterio de Kelly sean reales, se requiere que la probabilidad de pérdida total de la inversión no sea cero (0) durante todo el horizonte de tiempo de la inversión; en caso contrario, se podrían obtener fracciones óptimas

2.3. Aplicación al caso colombiano: el criterio de Kelly desacoplado frente al modelo media-varianza de Markowitz

El documento de Peterson (2017-2018) describe los resultados obtenidos al realizar el ejercicio de optimización para un portafolio de 10 acciones de la Bolsa de Valores de Bombay con datos mensuales durante un año. En este documento, como se mencionó en la introducción, se procederá a replicar dicho ejercicio para el caso colombiano[15]. El criterio de selección utilizado para las acciones de la BVC corresponde a las 10 acciones con mayor frecuencia en el top 10 de participación porcentual dentro del índice de capitalización Colcap, lo anterior dado que dicho índice refleja las variaciones de los precios de las acciones más liquidas de la BVC y, además, la participación dentro del índice se determina por el valor de la capitalización bursátil ajustada (capital flotante multiplicado por su último precio) (Bolsa de Valores de Colombia, 2018).

Los datos se obtienen del periodo comprendido entre el trimestre enero a marzo de 2008 hasta el trimestre noviembre 2019 a enero 2020. Con base en dicho comportamiento, el grupo de 10 acciones para el ejercicio se muestran en la tabla 1.

Tabla 1: Acciones BVC seleccionadas

	Nemotécnico	Empresa
1	Ecopetrol	Ecopetrol
2	Pfbcolom	Bancolombia (Preferencial)
3	Isa	Isa
4	Cemargos	Cementos Argos
5	Gruposura	Grupo Sura
6	Nutresa	Nutresa
7	Grupoargos	Grupo Argos

mayores a 1, aunque en estos casos se podría interpretar más como un factor de apalancamiento que como una fracción o porción óptima a invertir del capital (Peterson, 2017-2018).

15 Este ejercicio se realizó con datos mensuales en aras de mantener el ejercicio de replicación. No obstante lo anterior, en las conclusiones se describen algunos resultados encontrados bajo el análisis con los datos diarios.

	Nemotécnico	Empresa
8	Pfaval	Grupo Aval (Preferencial)
9	Corficolcf	Corficolombiana
10	Bcolombia	Bancolombia (Ordinaria)

Fuente: www.bvc.com.co. Cálculos propios.

Para el caso de la función de Kelly desacoplada es necesario determinar los parámetros de la deriva (*drift*) y la volatilidad, para luego utilizar la solución en la ecuación diferencial estocástica. Se asume que los precios de los activos siguen un movimiento Browniano geométrico (MBG), por lo que se muestra el proceso de Ito que define la ecuación diferencial estocástica:

$$dS_t = S_t\,(\mu dt + \sigma dW) \qquad (35)$$

Por la solución a esta ecuación estocástica se tiene el comportamiento de la variable aleatoria X_i como función del tiempo, la cual sigue una distribución log-normal.

$$X_i\left(t+\Delta t\right)=\frac{S_i\left(t+\Delta t\right)}{S_i\left(t\right)}-1=e^{\left(\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\Delta t+\sigma_i\sqrt{\Delta t y}}-1, \qquad (36)$$

en donde y es una variable aleatoria con distribución normal estándar que define la magnitud de movimientos hacia arriba o hacia abajo en el precio de la acción para el cambio en el tiempo equivalente a 1 mes ($\Delta t = 1$) (Peterson, 2017-2018).

Con lo anterior se pueden obtener los valores de la deriva (*drift*) y la volatilidad de cada activo utilizando la media y la varianza de los datos de cada activo (*promedio*[*R*] y *Var*[*R*]) (tabla 3).

$$\mu_i = \ln(1 + promedio[R]) \qquad (37)$$

$$\sigma_i\left(\ln\left(Var\left[R\right]e^{-2\mu i}+1\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Tabla 2: Parámetros modelo optimización de portafolio ecuaciones (33) y (34). Datos mensuales

	Ecopetrol (%)	Pfbcolom (%)	Isa (%)	Cemargos (%)	Gruposura (%)	Nutresa (%)	Grupoargos (%)	Pfaval (%)	Corficolcf (%)	Bcolombia (%)
Promedio [*R*]	1,0255	2,7475	2,6768	-0,3039	0,1734	0,5378	0,9462	2,8806	4,2271	2,2509
μ_i	1,0203	2,7104	2,6416	-0,3044	0,1733	0,5364	0,9418	2,8399	4,1402	2,2260
σ_i	6,7458	4,1282	8,3985	6,8714	4,6127	3,6301	6,7899	4,6069	9,5813	4,4273
$\frac{E[X]}{E[X^2]}$	2,1544	10,7509	3,2728	-0,6449	0,8102	3,9493	1,9720	9,3570	3,5806	8,7996

Fuente: www.bvc.com.co. Cálculos propios.

Tabla 3: Matriz de varianzas y covarianzas. Datos mensuales

	Ecopetrol (%)	Pfbcolom (%)	Isa (%)	Cemargos (%)	Gruposur (%)	Nutresa (%)	Grupoargos (%)	Pfaval (%)	Corficolcf (%)	Bcolombia (%)
ECOPETROL	0,4655	0,1190	0,1864	0,1894	0,2340	0,0598	0,2929	0,2234	0,2748	0,1924
PFBCOLOM	0,1190	0,1801	0,0436	0,0368	0,0575	-0,0089	0,0362	0,1344	0,1323	0,1811
ISA	0,1864	0,0436	0,7462	0,2076	0,2496	-0,0119	0,3900	0,2479	0,1011	0,1201
CEMARGOS	0,1894	0,0368	0,2076	0,4704	0,2627	0,1610	0,3063	0,1475	0,4238	0,0536
GRUPOSURA	0,2340	0,0575	0,2496	0,2627	0,2137	0,0906	0,2825	0,1660	0,2721	0,0984
NUTRESA	0,0598	-0,0089	-0,0119	0,1610	0,0906	0,1333	0,1088	0,0088	0,2844	-0,0083
GRUPOARGOS	0,2929	0,0362	0,3900	0,3063	0,2825	0,1088	0,4709	0,2344	0,2458	0,1047
PFAVAL	0,2234	0,1344	0,2479	0,1475	0,1660	0,0088	0,2344	0,2249	0,1365	0,1742
CORFICOLCF	0,2748	0,1323	0,1011	0,4238	0,2721	0,2844	0,2458	0,1365	1,0019	0,1547
BCOLOMBIA	0,1924	0,1811	0,1201	0,0536	0,0984	-0,0083	0,1047	0,1742	0,1547	0,2051

Fuente: www.bvc.com.co. Cálculos propios.

Con las ecuaciones (36) y (37) se define la distribución marginal para cambios en cada una de las acciones en un solo periodo de tiempo (1 mes en este caso), cuando se toman en conjunto con la matriz de varianzas y covarianzas se puede definir una función de distribución conjunta para cambios en el valor de los 10 activos del portafolio, cambios que tienen distribución normal (Peterson, 2017-2018).

Como se mencionó, con la obtención de la ecuación desacoplada el valor esperado $E[\ln(1 + f_i X_i)]$ se reduce a una integral de una dimensión involucrando solamente la distribución marginal. Por lo anterior, el valor i-ésimo esperado en el argumento de la función exponencial para las ecuaciones 27 y 34 está definido de la siguiente forma:

$$E\left[\ln\left(1+f_i X_i\right)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int \ln\left(1+f_i\left(e^{\mu_i-\frac{1}{2}\sigma_i^2+\sigma_i y}-1\right)\right)e^{-\frac{y2}{2}}dy \tag{3.21}$$

Integral que tiene solución por métodos numéricos definiendo $y_j=\dfrac{\ln\left(\dfrac{s_{i,j}}{s_{i,0}}\right)-\left(\mu_i-\dfrac{1}{2}\sigma_i^2\right)}{\sigma_i}$ y utilizando método de integración numérica, en este caso mediante un proceso de evolución diferencial (Peterson, 2017-2018).

Un proceso de evolución diferencial (utilizado para resolver problemas no lineales) se ejecuta a través de tres pasos o etapas principales: mutación, *crossover* y selección “codiciosa” (*greedy selection*)[16].

La mutación genera los candidatos para solucionar el problema combinando la solución previamente aceptada y compara los candidatos con las restricciones en las variables de los problemas. Una variable muy importante en este paso es el factor de escalamiento F, el cual escala las combinaciones aleatorias generadas durante la mutación, y es crítica para generar nuevas soluciones candidatas.

El paso o la etapa de cruce o *crossover* incorpora aleatoriamente candidatos en el paso de mutación dentro de una solución de prueba, en donde la tasa *crossover* C equivale a la probabilidad de que el componente candidato generado durante la mutación avance como solución de prueba.

16 El desarrollo completo se puede revisar en Peterson (2017-2018).

Por su parte, la selección codiciosa (*greedy*) compara la solución previamente aceptada con la de prueba, si esta última es favorable, entonces es aceptada como la mejor solución hasta el momento; en caso contrario, es rechazada y se repite el proceso (Peterson, 2017-2018).

En el ejercicio de Zacariah Peterson se utiliza un algoritmo de Seiner Storn y Kenneth Price (1997), el cual se define como una variación de la formulación original conocida como DE/rand/1/bin, en donde el criterio para detener el proceso se basa en el tiempo de cálculo más que en el número de iteraciones (Peterson, 2017-2018). Para el ejercicio colombiano también se utiliza una variación del proceso de evolución diferencial, en este caso el código DEoptim incluido en el lenguaje de programación R (Boudt, Ardia, Mullen y Peterson, 2011).

Las simulaciones se corren para los mismos parámetros de riesgo establecidos por Peterson ($P = 0{,}1$; $P = 0{,}3$; $P = 0{,}5$; $P = 0{,}7$ y $P = 0{,}9$), los valores de C y F utilizados son los valores predeterminados por el código de R con $F = 0{,}8$ y $C = 0{,}1$; el número máximo de iteraciones establecido fue de 5.000, y con las restricciones $K_{min} > 0$ y $K_{max} < 1$ con el fin de evitar la asignación total a una sola acción y también asignar un porcentaje del portafolio a todas las 10 acciones.

Con lo anterior se tienen los portafolios finales generados bajo evolución diferencial utilizando el análisis MV (ecuación 33) y también la función de Kelly desacoplada (ecuación 34). Se muestran dos tablas comparativas para cada modelo: las tablas 4a y 4b corresponden a los portafolios finales obtenidos tomando los retornos esperados a partir de los datos del mercado y utilizando el proceso de evolución diferencial para cada modelo (MV y Kelly desacoplado), y las tablas 5a y 5b hacen referencia a los portafolios finales con retornos esperados obtenidos a partir de simulación de Montecarlo y utilizando el proceso de evolución diferencial para la optimización[17].

Tabla 4a: Portafolios finales generados para el modelo MV para cada parámetro de riesgo. Retornos esperados a partir de datos del mercado

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
ECOPETROL	0,01892	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
PFBCOLOM	0,35940	0,29171	0,05408	0,03571	0,03571
ISA	0,03079	0,03275	0,02102	0,03571	0,03571

17 Lo anterior dado que el autor no especifica cómo obtiene los retornos esperados en el ejercicio original.

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
CEMARGOS	0,01892	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
GRUPOSURA	0,01892	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
NUTRESA	0,09484	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
GRUPOARGOS	0,01892	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
PFAVAL	0,33986	0,29171	0,39939	0,03571	0,03571
CORFICOLCF	0,08053	0,29171	0,39939	0,67857	0,67857
BCOLOMBIA	0,01892	0,01535	0,02102	0,03571	0,03571
Asignación total	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Fuente: datos tomados de la BVC. Cálculos propios.

Para el modelo MV se observa que aumenta la participación asignada a Corficolombiana (Corficolf) a medida que aumenta la indiferencia hacia un mayor nivel de riesgo (parámetro de riesgo mayor). Asimismo, disminuyen las participaciones asignadas a Preferencial Bancolombia (Pfbcolom) y Preferencial Grupo Aval (Pfaval) a medida que aumenta la indiferencia al riesgo.

Tabla 4b: Portafolios finales generados para el modelo Kelly desacoplado para cada parámetro de riesgo. Retornos esperados a partir de datos del mercado

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
ECOPETROL	0,01281	0,03467	0,03541	0,03623	0,03616
PFBCOLOM	0,19458	0,04927	0,03048	0,02344	0,01949
ISA	0,07209	0,16404	0,19725	0,21481	0,22622
CEMARGOS	0,01024	0,01416	0,01389	0,01339	0,01342
GRUPOSURA	0,08641	0,09204	0,07198	0,06264	0,05784
NUTRESA	0,19458	0,01416	0,01389	0,01339	0,01342
GRUPOARGOS	0,01024	0,01416	0,01570	0,01786	0,01950
PFAVAL	0,18086	0,26901	0,26383	0,25445	0,25494
CORFICOLCF	0,08055	0,18944	0,22845	0,24998	0,25494
BCOLOMBIA	0,15763	0,15904	0,12913	0,11382	0,10409
Asignación total	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Fuente: datos tomados de la BVC. Cálculos propios.

Utilizando el modelo de Kelly desacoplado se observa que aumenta la participación asignada a Corficolombiana (Corficolf) junto con Interconexión eléctrica SA (ISA) y Preferencial Grupo Aval (Pfaval) se mantiene prácticamente constante a medida que hay menor aversión al riesgo (parámetro de riesgo mayor), mientras que disminuyen las participaciones asignadas a Pfbcolom, Nutresa (Nutresa) y Bancolombia (Bcolombia) a medida que aumenta la indiferencia al riesgo.

Tabla 5a: Portafolios finales generados para el modelo MV para cada parámetro de riesgo. Retornos esperados a partir de simulación de Montecarlo

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
ECOPETROL	0,02108	0,02112	0,10025	0,29307	0,65819
PFBCOLOM	0,40059	0,40123	0,42077	0,41700	0,03464
ISA	0,05123	0,04973	0,02215	0,02195	0,03464
CEMARGOS	0,02108	0,02112	0,02215	0,04612	0,03464
GRUPOSURA	0,02108	0,02112	0,02215	0,02195	0,03464
NUTRESA	0,40059	0,40123	0,30313	0,02195	0,03464
GRUPOARGOS	0,02108	0,02112	0,04298	0,11212	0,06468
PFAVAL	0,02108	0,02112	0,02215	0,02195	0,03464
CORFICOLCF	0,02108	0,02112	0,02215	0,02195	0,03464
BCOLOMBIA	0,02108	0,02112	0,02215	0,02195	0,03464
Asignación total	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

Fuente: retornos generados por simulación de Montecarlo. Cálculos propios.

Con menor aversión al riesgo aumenta la participación de Ecopetrol (Ecopetrol) y disminuye de manera importante la participación de Pfbcolom y Nutresa, en el modelo MV con retornos generados a partir de simulaciones de Montecarlo.

Tabla 5b: Portafolios finales generados para el modelo Kelly desacoplado para cada parámetro de riesgo. Retornos esperados a partir de simulación de Montecarlo

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
ECOPETROL	0,02624	0,04875	0,05400	0,05623	0,05698
PFBCOLOM	0,25167	0,21249	0,18289	0,16646	0,15638
ISA	0,08004	0,11231	0,12386	0,12960	0,13162

P riesgo	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
CEMARGOS	0,01591	0,01593	0,01667	0,01703	0,01699
GRUPOSURA	0,02151	0,03373	0,03423	0,03363	0,03383
NUTRESA	0,30226	0,09022	0,05953	0,05017	0,04553
GRUPOARGOS	0,02518	0,04979	0,05536	0,05767	0,05876
PFAVAL	0,12092	0,16813	0,17119	0,16835	0,16552
CORFICOLCF	0,04257	0,13297	0,17216	0,19731	0,21515
BCOLOMBIA	0,11370	0,13568	0,13012	0,12355	0,11922
Asignación total	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000

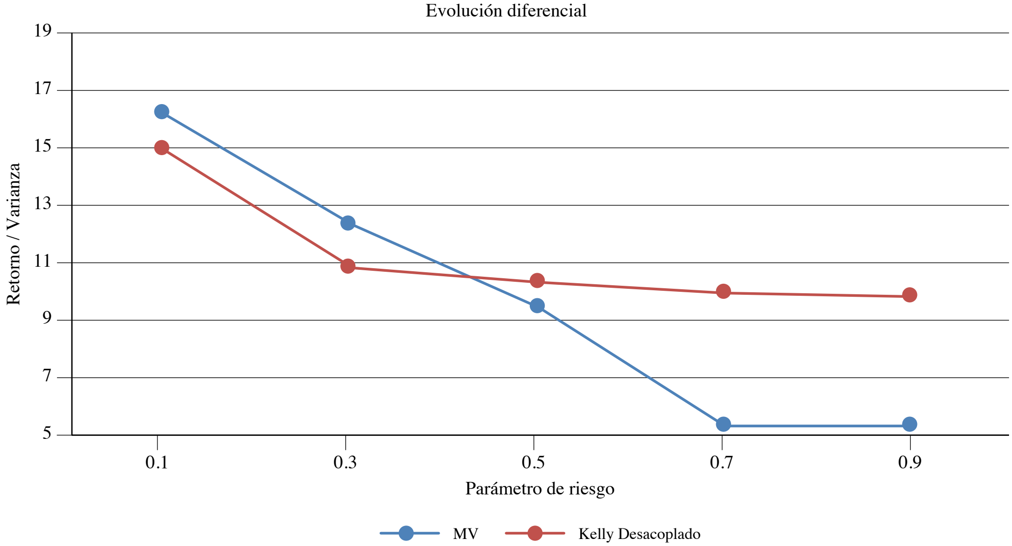
Fuente: retornos generados por simulación de Montecarlo. Cálculos propios.

Con el modelo de Kelly desacoplado, con retornos generados a partir de simulaciones de Montecarlo, Corficolcf, Pfaval e ISA aumentan su participación en el portafolio con menor aversión al riesgo; Bcolombia se mantiene prácticamente igual; Nutresa disminuye de manera importante su participación, y Pfbcolom también disminuye su participación, pero en menor medida.

Por último, y como se indicó en la introducción, se realiza la comparación de las funciones objetivo mediante el análisis de la relación retorno-riesgo (rentabilidad esperada/varianza) para cada modelo con la optimización a través del proceso de evolución diferencial (figura 1); adicionalmente, se evalúa la precisión de las funciones objetivo calculando la relación retorno-riesgo para los portafolios utilizando simulaciones de Montecarlo (figura 2).

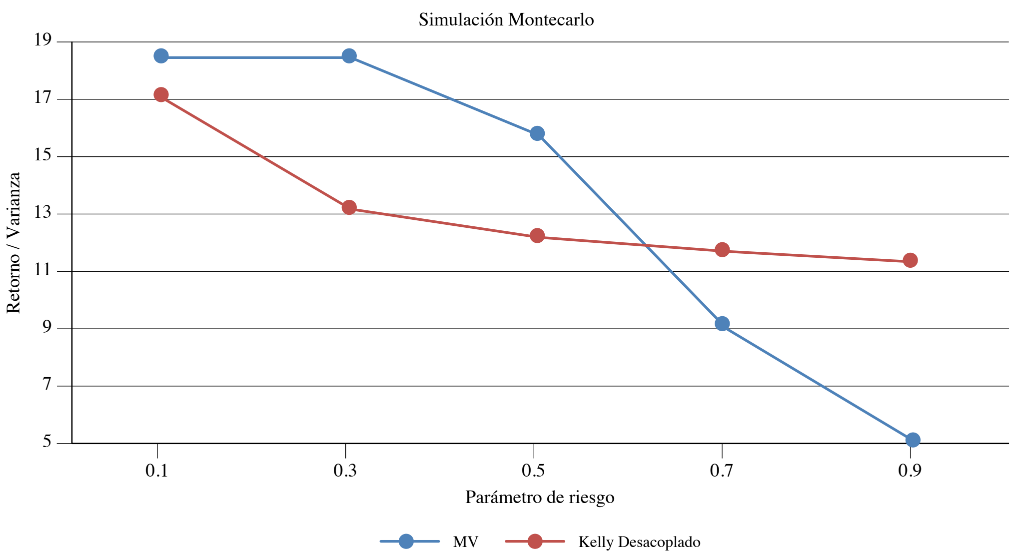
A mayor indiferencia al riesgo, la relación retorno-riesgo disminuye para ambos modelos, pero la caída en los portafolios bajo el modelo MV es mucho mayor que bajo el modelo Kelly desacoplado al punto de que a partir de un parámetro de riesgo de indiferencia (0,5), el modelo Kelly supera en relación retorno-riesgo al modelo MV, diferencia que prácticamente se dobla con el parámetro en 0,9.

Figura 1: Relación retorno-riesgo para los portafolios generados para modelo MV y Kelly desacoplado a través del proceso de evolución diferencial



Fuente: elaboración propia.

Figura 2: Relación retorno-riesgo para los portafolios generados utilizando simulación de Montecarlo para los portafolios utilizados en la figura 1

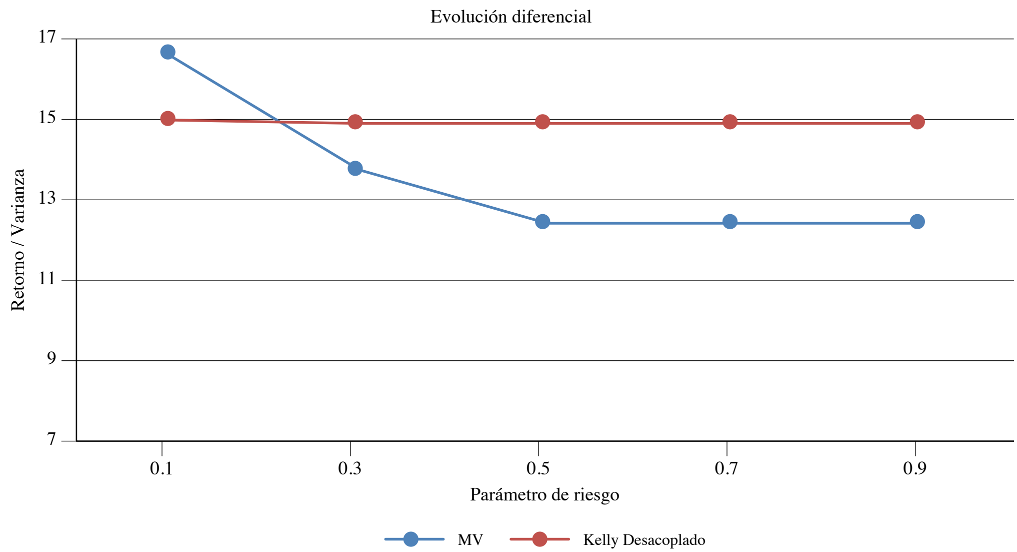


Fuente: elaboración propia.

Para el caso de la simulación de Montecarlo, el modelo MV nuevamente inicia con mayor relación retorno-riesgo, la cual incluso aumenta para un parámetro de riesgo de 0,3, pero eventualmente disminuye de manera importante, mientras que bajo el modelo de Kelly desacoplado la relación disminuye como en el caso del proceso de evolución diferencial, pero nuevamente en menor medida, superando a partir del parámetro de riesgo 0,7 la relación retorno-riesgo bajo el modelo MV.

Al realizar las comparaciones calculando la rentabilidad promedio, así como la varianza a partir de los datos diarios, la convergencia del modelo de Kelly desacoplado es aún más fuerte frente al modelo de media varianza (figura 3).

Figura 3: Relación retorno-riesgo para los portafolios generados para modelo MV y Kelly desacoplado a través del proceso de evolución diferencial. Datos diarios

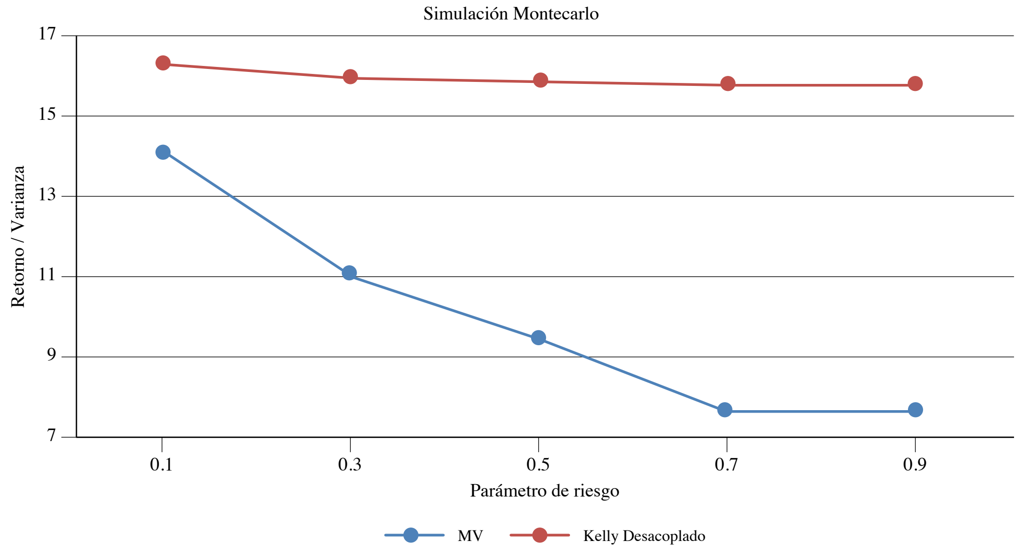


Fuente: elaboración propia.

La relación retorno-riesgo se mantiene prácticamente constante bajo los diferentes niveles de parámetros de riesgo, mientras que el modelo MV disminuye para luego estabilizarse a partir de 0,5. Nuevamente, el modelo MV supera en la relación retorno-riesgo al criterio de Kelly con el menor nivel de indiferencia al riesgo (0,1) bajo el proceso de evolución diferencial.

Bajo simulaciones de Montecarlo, el criterio de Kelly supera en los distintos niveles de aversión (indiferencia) en la relación retorno-riesgo frente al modelo MV, lo cual puede ser una evidencia de que en el largo plazo el criterio de Kelly se comporta mejor en la búsqueda de maximizar el crecimiento de las inversiones (figura 4).

Figura 4: Relación retorno-riesgo para los portafolios generados utilizando simulación de Montecarlo para los portafolios utilizados en la figura 3. Datos diarios



Fuente: elaboración propia.

3. Conclusiones

Al incorporar un horizonte de tiempo de largo plazo, es importante tener en cuenta la posibilidad de movimientos significativos en los precios de los activos. El criterio de Kelly busca encontrar la fracción óptima de capital por invertir de manera que maximice la tasa de crecimiento esperada de dicha inversión. En el desarrollo seguido en este documento a través del ejercicio de Zacariah Peterson (2017, 2018), se observa que el retorno óptimo de un portafolio de inversión no es una función lineal de la fracción o parte del capital asignado en cada inversión.

Se muestra, entonces, una opción de optimización bajo una función no lineal desacoplada que permite la optimización simultanea de las variables de retorno y riesgo adicionando un parámetro *P* de riesgo que indica un mayor o menor grado de aversión al mismo. A partir de ahí se busca realizar una comparación entre el modelo clásico de Markowitz (el modelo MV) y el criterio de Kelly mediante la asignación óptima de un portafolio comprendido por 10 acciones (para el caso de Peterson, el ejercicio se realiza sobre 10 acciones de la Bolsa de Bombay, y en este documento sobre 10 acciones de la BVC), y analizando la relación retorno-rentabilidad de los dos modelos bajo diferentes valores del parámetro de riesgo *P*.

En el ejercicio de Peterson se observa que luego de correr las diferentes simulaciones, las asignaciones entre los activos de los dos portafolios (portafolio bajo MV frente al modelo de Kelly desacoplado) son bastante similares, con diferencias leves y una tasa de convergencia menor para el modelo de Kelly frente al modelo de MV, mientras se aumenta el factor de riesgo P hasta el punto en el cual el modelo de Kelly difiere de manera significativa en las asignaciones para cada activo.

Para el caso colombiano, las asignaciones de los portafolios son bastante diferentes entre los dos modelos, y a medida que disminuye la aversión al riesgo, el criterio de Kelly supera de manera importante al modelo MV al analizar la relación retorno-riesgo, lo cual permite confirmar en este caso que, dadas las propiedades asintóticas de las predicciones bajo el criterio de Kelly, se espera que este último funcione mejor en un horizonte de largo plazo, situación que se puede observar al realizar las comparaciones calculando la rentabilidad promedio, así como la varianza a partir de los datos diarios, en donde la convergencia del modelo de Kelly desacoplado es aún más fuerte frente al modelo de media varianza.

Referencias

Bichpuriya, Y. K. y Soman, S. A. (2016). Application of probability density forecast of demand in short term portfolio optimization, en 2016 IEEE International Conference on Power System Technology (Powercon), Australia.

Björk, T. (2009). *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford University Press.

Bolsa de Valores de Colombia (2018). Documento Metodología COLCAP. Recuperado de www.bvc.com.co

Boudt, K., Ardia, D., Mullen, K. M. y Peterson, B. G. (2011). *Large-scale portfolio optimization with DEoptim*. Recuperado de https://cran.r-project.org/web/packages/DEoptim/vignettes/DEoptimPortfolioOptimization.pdf.

Brealey, R. y Myers, S. (2008). *Principles of corporate finance* (9 ed.). McGraw-Hill.

Breiman, L. (1961). Optimal gambling system for favorable games. *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability*, 1, 63-68.

Browne, S. y Whitt, W. (1996). Portfolio choice and the Bayesian Kelly criterion. *Advanced Applied Probability*, 28, 1145-1176.

Davis, M. Lleo, S. (2013). Fractional Kelly strategies in continuous time: Recent developments, en Handbook of the fundamentals of financial decision making (Part 1 and 2, L. MacLean y W. T. Ziemba eds.). World Scientific Publishing.

Fabozzi, F. J., Kolm, P. N., Pachamanova, D. A. y Focardi, S. M. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons Inc.

Huynh, H. T., Lai, V. S. y Soumare, I. (2009). *Stochastic simulation and applications in finance with matlab programs*. John Wiley & Sons.

Kelly, J. L. (1956). A new interpretation of information rate. *Bell systems technical journal*, *35*, 917-926.

Kim, G. y Jung, S. (2013). *The Construction of the Optimal Investment Portfolio Using the Kelly Criterion*. World 3.6.

Yingdong, L. y Meister, B. K. (2009). Application of the Kelly criterion to Ornstein-Uhlenbeck processes, en J. Zhou (ed.), *Complex Sciences*. *Complex 2009*. *Lecture Notes of the Institute for Computer Sciences, Social Informatics and Telecommunications Engineering* (vol. 4). Springer.

MacLean, L. C., Thorp, E. O. y Ziemba, W. T. (2010). Good and bad properties of the Kelly criterion. *Risk, 20*(2).

MacLean, L. C., *et al*. (2011). How does the fortune's formula Kelly capital growth model perform? *Journal of Portfolio Management, 37*(4).

Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *Journal of Finance*.

Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investment*. Wiley.

Markowitz, H. (1991). Foundations of portfolio theory. *Journal of Finance*.

Merton, R. C. (1992). *Continuos time finance*. Blackwell Publishers.

Peterson, Z. (2017-2018). *Kelly's criterion in portfolio optimization: A decoupled problem*. Adams State University.

Pham, H. (2009). *Continuos-time stochastic control and optimization with financial applications*. Springer-Verlag.

Prigent, J. L. (2007). *Portfolio optimization and performance analysis*. Taylor & Francis Group.

Rotando, L. M. Thorp, E. O. (1992). *The Kelly criterion and the stock market*. *American Mathematical Monthly*.

Samuelson, P. A. (1971). The 'fallacy' of maximizing the G mean in long sequences of investing or gambling. *Proceedings of the national academy of sciences*, *68*(10), 2493-2496.

Shonkwiler, R. W. (2013). *Finance with montecarlo*. Springer Science + Business Media.

Thorp, E. O. (2011). The Kelly criterion in blackjack sports betting, and the stock market. In *The Kelly Capital Growth Investment Criterion: Theory and Practice* (pp. 789-832).

Wesselhöfft, N. (2016). The Kelly criterion: Implementation, simulation and backtest (Master in statistic thesis) Humboldt Universität zu Berlin.

Wilmott, P. (2006). *Paul Wilmott on Quantitative Finance* (2 ed.). John Wiley & Sons.

Yang, G. y Xinwang, L. (2016). A improved algorithm for fuzzy multistage portfolio optimization model. *Paper presented at 2016 IEEE International Conference on Fuzzy Systems*. Canada.

Zaheer, H. y Pant, M. (2016). Solving portfolio optimization problem through differential evolution, en IEEE ICEEOT proceedings. Paper presented at International Conference on Electrical, Electronics and Optimization Techniques (ICEEOT), Chennai, India.