Black-Litterman con técnicas difusas: caso índice Coleqty

Black-Litterman With Fuzzy Techniques: Case Index Coleqty

Yuly Andrea Franco*

* Magíster en Finanzas. Docente investigadora, Institución Universitaria Agustiniana. [yuly.franco@est.uexternado.edu.co], [ORCID: 0000-0003-2938-9331].

Artículo recibido: 10 de noviembre de 2020.
Aceptado: 15 de diciembre de 2020.

Para citar este artículo:
Franco, Y. A. (2020). Black-Litterman con técnicas difusas: caso índice Coleqty. ODEON, 19, 81-98.
DOI: https://doi.org/10.18601/17941113.n19.04

Resumen

El proceso de optimización de portafolio busca encontrar el mejor de estos a través de las variables de riesgo y retorno, el modelo clásico de Markowitz ha trabajado dicha selección bajo el portafolio de media-varianza, el cual ha sido constantemente criticado por trabajar bajo datos históricos, no contemplar el estado del mercado, su baja diversificación, entre otros. Buscando generar aportes a este modelo, se destaca el trabajo realizado por Fischer Black y Robert Litterman, quienes combinan la asignación de activos financieros basados en el supuesto de equilibrio y la opinión del inversor con respecto al rendimiento futuro de los activos. Sin embargo, debido a los hechos latentes de incertidumbre, ambigüedad, vaguedad y subjetividad que se presentan durante el proceso de optimización de portafolio, se propone el uso de técnicas difusas para su modelación, a fin de abrir nuevos caminos frente al tratamiento de la realidad.

Este artículo es resultado del trabajo de grado de la maestría en Finanzas (Aplicación de técnicas difusas al modelo de selección de portafolio Black-Litterman: Caso Colombia índice Coleqty), el cual propone evaluar los aportes del proceso de optimización de portafolio en el modelo Black-Litterman bajo técnicas difusas en las acciones del índice Coleqty de Colombia, operando el resultado del rendimiento y riesgo bajo funciones de pertenencia triangular y trapezoidal, para obtener así diferentes portafolios en cuanto su diversificación, los cuales se comparan con los indicadores de desempeño Sharpe, Treynor y Alfa de Jensen, destacando el portafolio con mejor rendimiento y menor riesgo, es decir, se determinará cuál es el mejor proceso de optimización de portafolio, si el Black-Litterman clásico o el Black-Litterman con técnicas difusas.

Palabras clave: lógica difusa; Black-Litterman; optimización de portafolio; función de pertenencia.

Clasificación JEL: C61, D81, G11.

Abstract

The portfolio process of optimization search for the best portfolio through the risk measures and return, Markowitz model has worked on that selection under median-variance portfolio, that model has been criticized because it is based on historic information, leaving some aspects unaccounted for, such as the state of the market, lower diversification, among others; in order to improve this model, Fischer Black and Robert Litterman provided information about financial assets assignment based on the assumption of the equilibrium and the investor opinion concerning the future investment asset . Because of the uncertainty in the optimization process, it is proposed to make the use of fuzzy techniques for its treatment.

This article is the result of the Master Degree in Finances, "Aplication of fuzzy techniques to the selection's model of the Black- Litterman portfolio: Colombian Case Coleqty index" that evaluate the optimization process of contributions of portfolio in Black- Litterman Model, based on diffuse techniques in stocks of Coleqty index of Colombia, resulting risk-return base on triangular and trapezoidal functions, obtaining some different portfolios concerning with diversification, it will be compared with Sharpe, Treynor and Jensen's Alpha performance indicators, portfolio with best return and less risk will be important, in order to choose the best optimization process, Black- Litterman classic or Black Litterman fuzzy techniques.
Key words: Fuzzy logic; Black-Litterman; portfolio optimization; membership function.
JEL classification: C61, D81, G11.

Introducción

A partir de la formulación de la teoría clásica de selección de portafolio de Markowitz en 1952, se establece el proceso de optimización media-varianza, que busca seleccionar un conjunto de activos financieros de tal forma que se maximice la rentabilidad y se minimice la varianza de dicho conjunto de activos. Bajo este marco de referencia, la teoría de Markowitz ha traído amplios desarrollos y avances, sin embargo, la consideración de solo dos factores (rentabilidad y varianza) ha generado dificultades como son: la obtención de portafolios con baja diversificación, poca correlación con otros activos y el hecho de solo contemplar información histórica. Para ello fue necesario contemplar otros factores presentes en la economía e incluso en el mercado financiero, como la volatilidad del mercado, concepto que se introduce en Sharpe (1964).

Adicionalmente, se introducen mejoras como la expectativa de los expertos Black y Litterman (1991), conocida como el modelo Black-Litterman (BL), donde se generan dos aportes relevantes al modelo de Markowitz, como son el equilibrio de mercado del modelo Capital Asset Pricing Model (CAPM) y las percepciones de los inversionistas en las rentabilidades futuras, donde el inversionista proporciona su punto de vista desde su conocimiento y experiencia; de esta manera, este portafolio cuenta con mayor flexibilidad, agilidad e información actualizada del mercado.

De igual forma, a través de las revisiones históricas en los avances y aportes que ha tenido la lógica difusa en selección de portafolio en el modelo Black-Litterman se han encontrado diferentes autores enfocados en dicho proceso. Para ello se propone la aplicación de las técnicas difusas al proceso de selección de portafolio de Black-Litterman, a fin de convertir los resultados de rendimientos y riesgo en variables difusas, a través del uso de números borrosos triangulares y trapezoidales, evaluando los aportes que genera esta técnica para dicho proceso y seleccionando el mejor portafolio a través de los índices de Sharpe, Treynor y Alpha Jensen entre el portafolio clásico (*a priori*, sin opinión), Black-Litterman tradicional y Black-Litterman difuso.

Este documento incluye una introducción, seguido de la revisión de la literatura que aborda el proceso de selección de portafolio Black-Litterman con lógica difusa, conceptualización de la lógica difusa, seguido por la construcción de los diferentes portafolios y la comparación de los resultados por los indicadores de desempeño; finalmente, se presentan las conclusiones.

1. Revisión de literatura Black-Litterman y lógica difusa

Los modelos de selección de portafolio contemplan información que no es del todo precisa, es decir, es información cargada de subjetividad, incierta o vaga; es subjetiva pues depende del nivel de aspiración de los inversionistas basados en su experiencia y conocimiento, como es el caso del modelo de Black-Litterman; es incierta dadas las condiciones de liquidez que se pueden presentar, los posibles estados de la naturaleza, la fluctuación de la información del mercado de valores y el desconocimiento de variables y decisiones en: la política monetaria, la política cambiaria y demás eventos futuros (desconocidos). Definida esta información como vaga, subjetiva e incierta, se convierte en variables por trabajar hacia la toma de decisiones en un adecuado proceso de selección del portafolio de inversión y optimización, que busca contemplar los diferentes niveles (deseos o aspiraciones) de los inversionistas. Para ello, a través de lógica difusa, se propone modelar estas y otras problemáticas presentadas en la optimización de portafolio enfocadas en el modelo Black-Litterman, asumiendo un gran aporte y una mejor selección que satisfaga cada una de las expectativas de los inversionistas durante su proceso de optimización. Se presenta así la revisión de la literatura de los diferentes documentos encontrados en el proceso de selección de portafolio Black-Litterman con la implementación de la lógica difusa.

De las diferentes bases de datos consultadas se encuentran siete trabajos sobre lógica difusa aplicada al proceso de selección de portafolio con la metodología Black-Litterman. El documento guía para este trabajo fue el de Lawrence *et al.* (2009), en el cual se realiza un enfoque de programación de objetivos difusos usando la función de pertenencia triangular y trapezoidal, donde los modelos difusos arrojan resultados conservadores ante elementos de alta volatilidad, es decir, la mayor participación del portafolio se centra en aquellos activos más estables; de igual forma, se evidencia el gran aporte de la función de pertenencia trapezoidal, la cual genera una mayor minimización de la varianza frente a la función de pertencia triangular. Seguido se encuentran a Gharakhani y Sadjadi (2013), quienes abordan la opinión sobre el rendimiento dada por el experto para los activos financieros al modelo Black-Litterman, que es una opinión subjetiva e imprecisa, donde se propone trabajar por medio de números difusos; el modelo resultante es la programación lineal multiobjetivo, el cual se analiza mediante un enfoque de programación de compromiso difuso utilizando la función de pertenencia trapezoidal, de la cual se presenta un ejemplo numérico real en el que se elige el Morgan Stanley Capital International Index (MSCI) como índice objetivo. Como resultado, los índices de Japón, Estados Unidos, Alemania, Suiza y Francia evidenciaron que los modelos propuestos y los métodos de solución eficientes permiten resolver problemas más complicados en situaciones del mundo real en condiciones aleatorias y ambiguas.

Como extensión de los objetivos difusos, Bartkowiak y Rutkowska (2017) utilizan dos fuentes de información sobre los retornos esperados, la primera corresponde a los rendimientos esperados que se derivan del activo, y la segunda a la opinión de los expertos, combinando las dos fuentes en una sola fórmula de retorno esperado. Con una aplicación a los mercados financieros chinos están Fang *et al.* (2017), quienes toman la opinión de los inversores a través de conjuntos difusos, es decir, con vistas difusas y vistas aleatorias difusas; los resultados empíricos mostraron que los modelos difusos son mejores que los tradicionales, lo que comprueba que los enfoques difusos pueden contener más información en las vistas y en la medición de la incertidumbre de una manera más correcta.

En otra línea de la lógica difusa, con el uso de números intuitivos, Echaust y Piasecki (2017) proponen trabajar las opiniones de los expertos como un número intuicionista difuso, se considera el caso canónico cuando el retorno *a priori* (incertidumbre) se determina por medio del diferencial de rentabilidad de la cartera de mercado CAPM que se obtiene utilizando el método de optimización revertida. Lu *et al.* (2019) no utilizan la opinión de un único experto, es decir, desarrollan un método de selección de portafolio de múltiples analistas, equilibrado con cualquier pronóstico demasiado optimista, tomando en cuenta las recomendaciones de inversión ambiguas de los analistas y la heterogeneidad de los datos de fuentes dispares, donde resaltan que las opiniones de los analistas contribuyen sustancialmente al proceso de asignación de inversiones y mejoran el rendimiento de la cartera; asimismo, señalan que el grado de confianza de los inversores en estos puntos de vista influye en el resultado estas, con lo cual amplían la idea del modelo Black-Litterman y mejoran la optimización, esto aplicado a un análisis empírico de alrededor de 1.000 boletines financieros diarios recopilados de dos firmas de corretaje taiwanesas durante dos años.

Finalmente, y como trabajo más reciente, se encuentran, con el mismo enfoque anterior, a Bartkowiak y Rutkowska (2020), quienes trabajan los puntos de vista lingüísticos expresados por diferentes expertos, es decir, bajo distintas fuentes, cada experto presenta su opinión sobre activos particulares de acuerdo con los intervalos y luego se construye un *experton* para cada activo, lo que permite formular puntos de vista intuitivos y ver las opiniones de un grupo de expertos; se forma así el portafolio BL con múltiples opiniones, con una creación de 10.000 carteras basadas en la recomendación de EquityRT, con periodicidad mensual entre noviembre de 2017 y junio de 2019 para las 29 compañías más grandes del mercado de Estados Unidos.

A través de la revisión histórica sobre los avances y aportes que ha tenido la lógica difusa en la selección del portafolio Black-Litterman, se han encontrado gran variedad de autores quienes han logrado demostrar que adicionar números intuitivos, triangulares, trapezoidales, entre otras herramientas de la lógica difusa, en casos de aplicación en el mercado bursátil y a través comparación de los modelos clásicos con los nuevos modelos propuestos, brinda una mejor alternativa para la selección de portafolio, con un control óptimo más adecuado, lo que permite modelar las diferentes percepciones de riesgo, los diversos escenarios de ocurrencia y las distintas expectativas de los inversionistas, así como el riesgo visto de manera asimétrica, con múltiples objetivos e incluso desde la diferentes experiencias de los expertos.

2. Lógica difusa

Hacia 1965, el profesor iraní Lofti Zadeh da inicio a una nueva teoría a través de su artículo titulado "Fuzzy Sets" (conjuntos borrosos), en el cual planteaba un nuevo instrumento que permitiera el estudio de aquellos hechos inciertos que se generaban en ambientes de incertidumbre (no probabilizables), subjetivos o vagos, como extensión de las matemáticas tradiciones para ser aplicado a las ciencias sociales, las ciencias económicas y, en general, en todas las manifestaciones del ser humano en sociedad. La lógica difusa (lógica borrosa) o teoría de la posibilidad, al ser el gran paso y salida de la lógica clásica y bivalente, como afirmaría Zadeh (2008), "sería un paso positivo significativo en la evolución de la ciencia. En gran medida, el mundo real es un mundo difuso. Para lidiar con la realidad difusa, lo que se necesita es una lógica difusa", la cual es definida como:

> Una lógica precisa de la imprecisión y el razonamiento aproximado. Más específicamente, la lógica difusa puede ser vista como un intento de formalización/mecanización de dos notables capacidades humanas. Primero, la capacidad de

> conversar, razonar y tomar decisiones racionales en un ambiente de imprecisión, incertidumbre, información incompleta, información contradictoria, parcialidad de la verdad y parcialidad de la posibilidad. [...] y segundo, la capacidad para llevar a cabo una amplia variedad de tareas físicas y mentales sin medición ni cálculos. (Zadeh, 2008, p.2)

La lógica difusa nace con el desarrollo de la teoría de los subconjuntos borrosos (Castiblanco, 2016), donde un conjunto borroso se define como: sea x un conjunto no vacío, un conjunto borroso A está caracterizado por:

$$\mu_{\underline{A}}(x) : X \rightarrow [0,1] \tag{1}$$

Los conjuntos borrosos son una ampliación de los tradicionales, en este escrito los conjuntos borrosos serán diferenciados de los conjuntos tradicionales por medio del símbolo (-) ubicado debajo de la letra representativa del conjunto, es decir, $\underline{\mathrm{A}}$.

Describiendo la función (1), μ denomina la función de pertenencia, la pertenencia del conjunto borroso $\underline{A}$ es $\mu_{\underline{A}}$, seguido por el grado de pertenencia del elemento x al conjunto borroso, quedando $\mu_A(x)$. A partir de los subconjuntos borrosos se puede definir un número borroso:

> Los números borrosos son conjuntos borrosos con un claro significado cuantitativo, en la medida en que clasifican un concepto alrededor de un número o intervalo de números. Estos números tienen una gran importancia en el control borroso, ya que permiten representar valores numéricos mediante la imprecisión propia de la lógica borrosa. (Barragán,2009)

Existen diferentes clases de números borrosos de acuerdo con su función de pertenencia, que indican el grado de pertenencia de cada elemento en un universo dado, el cual genera así la función de pertenencia trapezoidal, Gaussiana, triangular, en forma de S, entre otras. De acuerdo con el propósito de este trabajo se abordan las dos primeras funciones mencionadas.

La función de pertenencia triangular se define como:

$$\mu_{Tri}[c,\alpha,\beta](x) = \begin{cases} \frac{1-(c-x)}{\alpha} & \text{si } (c-\alpha) \leq x < c \\ \frac{1-(x-c)}{\beta} & \text{si } c \leq x \leq (c+\beta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{2}$$

Donde: c corresponde al centro, $\alpha \geq 0$ a su ancho izquierdo y $\beta \geq 0$ a su ancho derecho.

La función de pertenencia trapezoidal es definida por:

$$\mu_{Trap}[a,b,\alpha,\beta](x) = \begin{cases} \frac{1-(\alpha-x)}{\alpha} & \text{si } (\alpha-\alpha) \leq X < \alpha \\ 1 & \text{si } \alpha \leq x \leq b \\ \frac{1-(x-b)}{\beta} & \text{si } b < x \leq (b+\beta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{3}$$

Siendo $[\alpha, b]$ con $\alpha \leq b$ el intervalo de confianza o núcleo, $\alpha \geq 0$ el ancho izquierdo y $\beta \geq o$ el ancho izquierdo.

La función (3) se puede definir por medio de los cuatro puntos del trapecio $Trap\ [a,b,c,d]\ (x)$ en donde $a \leq b \leq c \leq d$.

Utilizando las funciones de pertenencia y trapezoidal se busca optimizar el proceso de selección de portafolio Black-Litterman, esto bajo el principio de maximización de Bellman y Zadeh (1970), definido como el conjunto de puntos de alternativas en el espacio en el que la función de pertenencia alcanza su máximo valor.

Tomada una función objetivo dada por G y una restricción C, donde una decisión D corresponde a la unificación entre G y C, en la cual la decisión D se define como la intersección entre la función objetivo y la restricción *fuzzy*.

$$D = G \cap C \tag{4}$$

Watada (2001) define la función (4) como un conjunto de decisiones, es decir, una decisión difusa, donde su función de pertenencia sería caracterizada por:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_G(x), \mu_C(x)) \forall x \in X \tag{5}$$

En el caso de ser varios objetivos y/o restricciones, donde k sería la cantidad de objetivos difusos, es decir, $G_1, G_2, G_3, ...G_k$ y m la cantidad de restricciones difusas, $C_1, C_2, C_3, ...C_m$, la decisión difusa se definiría como una intersección, así:

$$D = \{G_1 \cap G_2 \cap ... \cap G_k\} \cap \{C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_m\} \tag{6}$$

Donde su función de pertenencia está caracterizada por:

$$\mu_D(x) = \min(\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x), ..., \mu_{G_k}(x), \mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x), ..., \mu_{C_m}(x)) \tag{7}$$

Una vez trabajada la decisión en el entorno difuso, es pertinente abordar dicha decisión desde el enfoque de maximización, es decir, a partir de la decisión difusa D se busca obtener el máximo valor de x, $\mu_D(x)$; expresado en términos difusos correspondería a $\mu_D^*(x)$ con k y m objetivos y restricciones difusas respectivamente; la decisión de maximización se denotaría:

$$\begin{aligned} \mu_D^*(x) &= \max \mu_D(x) x \in X \\ &= \max\{min(\mu_{G_1}(x), \mu_{G_2}(x), ..., \mu_{G_k}(x), \\ &\mu_{C_1}(x), \mu_{C_2}(x), ..., \mu_{C_m}(x))\} x \in X \end{aligned} \tag{8}$$

El problema de optimización de portafolio se centra en maximizar D, que de ahora en adelante por notación de este documento se expresará como λ, sujeto a $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$ y $\lambda \geq 0$, donde de acuerdo con las restricciones y la función (8) el resultado corresponde a la intersección de estas, aplicadas al proceso de selección de portafolio Black-Litterman. Este modelo está compuesto por un universo de activos (N), donde su participación está determinada por el vector $W \in \mathbb{R}^n$, donde $W_i \geq 0$, es decir, no se permiten ventas en corto. El retorno de cada uno de los activos está representado por $r \in \mathbb{R}^n$, cuyo valor esperado está dado por $E(r) \in \mathbb{R}^n$.

El exceso de los retornos se presenta si los precios de los activos son ajustados hasta que los retornos esperados sean iguales a las expectativas de los inversionistas, igualando la oferta y la demanda en el mercado. El vector de los retornos cuenta con una distribución normal, con retorno esperado μ y matriz de covarianza σ, es decir, $r \sim N(\mu, \Sigma)$.

El inversionista debe proporcionar las expectativas[1] sobre mínimo un activo del universo (N) de activos, que pasan a ser el conjunto de expectativas k del inversionista, para formar la matriz $P \in \mathbb{R}^{kxn}$. Las expectativas se expresan en los excesos del retorno frente al retorno implícito formando así la matriz $Q \in \mathbb{R}^{n}$.

El modelo Black-Litterman se expresaría en la siguiente fórmula:

$$\left[(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P\right]^{-1}\left[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}Q\right] \tag{9}$$

Bajo la fórmula (9) se construyen los diferentes portafolios, el BL tradicional y con técnicas difusas, seleccionando el mejor portafolio de acuerdo con los resultados de los indicadores de desempeño. El primer índice es el coeficiente de Sharpe, este índice debe su nombre a su creador, el economista William Sharpe, es una medida de exceso del rendimiento, dada una unidad del riesgo en la inversión, es decir, indica cuál ha sido el rendimiento promedio del portafolio por la desviación estándar (volatilidad) del exceso de rendimiento de la inversión. El segundo índice es el de Treynor, este debe su nombre a su creador Jack Treynor, es una medida de los excesos de las rentabilidades comparadas con los rendimientos en una inversión sin riesgo diversificable, este utiliza el riesgo sistemático en lugar del riesgo total y el resultado mayor índica el mejor rendimiento de la cartera analizada. Y el último índice es el Alfa de Jensen, mide la habilidad de un gestor de carteras de inversión para obtener rentabilidades por encima del índice bursátil de referencia (en este caso índice Coleqty), a mayor alfa mayor rentabilidad.

[1] Estas se pueden expresar en términos absolutos o relativos.

3. Aplicación lógica difusa Black-Litterman

Con las acciones que componen el índice Coleqty, la canasta número 27 de Colombia, con corte al 31 de diciembre de 2019, bajo un histórico con frecuencia diaria desde el año 2015, se elabora la base de datos para iniciar el modelo Black-Litterman. Según la contribución del modelo BL, se tiene en cuenta la opinión de expertos bajo su expectativa del retorno de las acciones, en este caso se acude a la opinión de un experto[2], quien manifiesta la expectativa del retorno anual[3] para las acciones de acuerdo con su opinión y experiencia.

Bajo el modelo de optimización de portafolio BL en Matlab las expectativas del experto se adicionan como un total de 25 puntos de vista, es decir, $v = 25$, agregando un grado de incertidumbre atado a su perspectiva identificado como $omega$, que forma la matriz P la cual selecciona los activos que hacen parte de la expectativa y Q el vector de expectativas, como se refleja en la figura 1:

Figura 1. Opinión de experto

```
v = 25  ;  % total 25 views
P = zeros(v, numAssets);
q = zeros(v, 1);
Omega = zeros(v);

% View 1
P(1, assetNames=="ECOPETROL") = 1;
q(1) = 0.0952;
Omega(1, 1) = 5e-5;

% View 2
P(2, assetNames=="BCOLOMBIA") = 1;
q(2) = 0.6387 ;
Omega(2, 2) = 5e-4;

% View 3
P(3, assetNames=="ISA") = 1;
q(3) = 0.1780;
Omega(3, 3) = 5e-4;
```

[2] Opinión proporcionada por el experto Orlando Santiago Jácome, ingeniero financiero, especialista en Mercado de Capitales de la Universidad del Rosario y gerente de Fénix Valor, firma de Consultoría Financiera inscrita ante la Superintendencia Financiera de Colombia (Resolución 1498 del 01 de noviembre de 2017) como proveedora de información del Mercado de Valores en Colombia.

[3] El porcentaje de potencial de valorización de las acciones se emite como resultado del análisis técnico, fundamental y estadístico de la información financiera de cada compañía, del experto Orlando Santiago.

Después de la opinión del experto sobre el retorno de las acciones, es decir, bajo el modelo Black-Litterman, el nuevo portafolio cuenta con mayor número de acciones, con un portafolio de 34 acciones versus 14 que proponía el modelo clásico, lo que genera así una mayor diversificación, donde en opinión del experto fueron contempladas dieséis acciones, eliminadas tres, en tres se disminuyó la participación y en una aumentó.

Tomando los resultados obtenidos anteriormente el β del portafolio Black-Litterman arroja un resultado $0,567$ y un rendimiento de $12,07\%$, que se asumen como variables difusas, donde se les asignan los respectivos límites para las funciones triangulares y trapezoidales, descritas a continuación.

3.1. Black-Litterman con técnicas difusas triangulares

Para el enfoque de programación difuso, Lawrence *et al.* (2009) proponen trabajar como medida del riesgo para el portafolio los β de cada activo; para ello, con el uso de técnicas difusas triangulares, el β es asumido por el experto con un límite de tolerancia entre [0,53, 0,567, 0,59] y para el rendimiento del portafolio su comportamiento estaría dado en un límite superior e inferior de 1%, obteniendo así un número triangular borroso $[11,07\%, 12,07\%, 13,07\%]$. Sea $G_k(x)$ los kth objetivos difusos (los β y rendimientos) con una función de pertenencia triangular:

$$\begin{aligned} \mu_i(x) &= \frac{G_i(x)-L_i}{g_i-L_i} \\ \mu_i &= \frac{U_i-G_i(x)}{U_i-g_i} \end{aligned} \tag{10}$$

Contemplando las siguientes restricciones:

- Maximizar D = λ
- λ[4] $\leq \mu_i(x)=\frac{G_i(x)-L_i}{g_i-L_i}$
- $\lambda \leq \mu_i = \frac{U_i-G_i(x)}{U_i-g_i}$
- $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$
- $\lambda \geq 0$

[4] Para restricción de riesgo y rendimiento.

Tomando los rendimientos y los β con el BL tradicional de cada acción y la función de pertenencia triangular (10), se obtienen las nuevas participaciones del portafolio en cada activo, contemplando 31 acciones; al aplicar el principio de maximización D se obtiene un $\lambda = 0,87$.

3.2. Black-Litterman con técnicas difusas trapezoidales

En las técnicas difusas trapezoidales, el experto asume para el β del portafolio un límite de tolerancia de [0,54, 0,55, 0,57, 0,58] y para el rendimiento del portafolio un comportamiento en un límite del número trapezoidal borroso de $[11,07\%, 12,20\%, 13,20\%, 13,70\%]$. Donde $G_k(x)$ son los kth objetivos difusos (los β y los rendimientos) con una función de pertenencia trapezoidal dada así:

$$\begin{array}{ll} \mu_i(x) = \frac{G_i(x)-b_1}{b_2-b_1} & b_1 \leq G_i(x) \leq b_2 \\ \mu_i(x) = \frac{b_4-G_i(x)}{b_4-b_3} & b_3 \leq G_i(x) \leq b_4 \\ \mu_i(x) = 0 & \text{en otro caso} \end{array} \tag{11}$$

Bajo las restricciones de:

- Maximizar D = λ
- $\sum_{j=1}^{n} x_j = 1$
- $\lambda \geq 0$

Aplicando así los límites trapezoidales para las variables de rendimientos y el β bajo la función de pertenencia trapezoidal antes mencionada, se obtienen las nuevas participaciones del portafolio en cada activo, maximizando el λ con un resultado de $1,61$, un λ mayor frente al obtenido en la técnica triangular.

Bajo números trapezoidales el portafolio contempla tres acciones que los números triangulares eliminan de su canasta, pero a su vez descarta la participación de otras tres, esto debido al mejor análisis de expectativa de retorno y menor varianza, es decir, por el mayor número de posibilidades de un mejor retorno y del riesgo que estas pueden tener en esta técnica contemplando una mayor cantidad de posibilidades de ocurrencia frente al triangular. Al igual que el modelo tradicional de Black-Litterman, bajo las técnicas difusas trapezoidales, se conforma el portafolio con la misma cantidad de acciones (34).

3.3. Resultados

Una vez obtenido el portafolio a través de la teoría clásica (*a priori* o Markowtiz), se contempla la opinión de expertos en cuanto al conocimiento y experiencia de dichas acciones para la expectativa de los rendimientos, para formar así el portafolio Black-Litterman, el cual genera una mejor diversificación en el portafolio, contemplando 20 acciones más, es decir, el portafolio con la teoría clásica es construido con 14 acciones, mientras que con el modelo Black-Litterman se construye un portafolio de 34 acciones, donde no solo cuenta con una mejor diversificación, sino una mayor rentabilidad de 12,07%, frente a una rentabilidad de 1,49% al modelo clásico; se resalta así el mayor aporte de este modelo frente al modelo de Markowitz, es decir, la de obtener una mayor diversificación.

Bajo la propuesta de trabajar la rentabilidad y el riesgo del portafolio (optimización de portafolio), obtenidos en el resultado bajo el modelo Black-Litterman a través de técnica difusas, utilizando la función de pertenencia triangular y trapezoidal, donde la diversificación del portafolio se mantiene entre 31 y 34 acciones respectivamente, se puede decir que el modelo Black-Litterman tradicional y difuso contempla una canasta similar en cantidad de acciones.

La rentabilidad obtenida en los tres portafolios Black-Litterman está sobre el 12% aproximadamente, pero resulta ser más rentable para el inversionista el portafolio BL con metodologías trapezoidales, el cual genera una rentabilidad del $12,89\%$; este resultado es obtenido como la función objetivo de maximizar λ, donde se logra un mejor resultado frente al triangular, el cual arrojó un $\lambda = 1,61$ frente a un $\lambda = 0,87$ respectivamente, debido a que la función de pertenencia trapezoidal permite minimizar más la varianza de un portafolio dado el mayor número de posibilidades con las que se pueden abordar bajo esta función. El modelo Black-Litterman difuso triangular cuenta con una mayor varianza en comparación con el modelo tradicional y el modelo trapezoidal, sin embargo, a pesar de contar con un mayor rendimiento frente al tradicional, este no es tenido en cuenta como una buena alternativa, precisamente por su alta dispersión en el riesgo del inversionista.

Finalmente, se comparan los cuatro portafolios obtenidos con las acciones del índice Coleqty utilizando tres indicadores de desempeño: el coeficiente de Sharpe, el índice de Treynor y el Alpha de Jense. Para el índice de Sharpe el mejor portafolio resulta ser el modelo tradicional de Black-Litterman, pero es seguido por el Black-Litterman difuso trapezoidal, dependiendo del nivel de riesgo que esté dispuesto a asumir el inversionista o del nivel de rentabilidad deseado; el índice de Treynor, al igual que el de Alpha de Jensen, indican que el mejor portafolio corresponde al de Black-Litterman difuso trapezoidal; lo anterior indica que es el portafolio con mayor rentabilidad y menor riesgo sistemático, destacando así las metodologías difusas trapezoidales, con una mayor alternativa de diversificación y menor riesgo sistemático frente a la volatilidad de los activos.

4. Conclusiones

Bajo el proceso de optimización de portafolio en la aplicación de la selección de portafolio del modelo de Black-Litterman a través de técnicas difusas triangulares y trapezoidales a las acciones del índice Coleqty de Colombia se pueden obtener los siguientes aportes:

1. El modelo clásico de Markowitz se ha trabajado bajo el enfoque de media varianza, el cual ha sido constantemente criticando por su forma de trabajar con solo datos históricos, no contemplar el estado del mercado, su baja diversificación, entre otros; así, la adición de Fischer Black y Robert Litterman ha permitido obtener portafolios con una mayor diversificación y mejores rendimientos.

2. Por medio de la lógica difusa se permite una optimización más apropiada en el proceso de selección de portafolio; al ser este más realista, con menos costos de transacción, ha sido aplicado a diversos casos prácticos en las bolsas de valores de Frankfurt, Viena, España, entre otros.

3. Las técnicas difusas aplicadas al modelo Black-Litterman generan una mejor manera de operar la rentabilidad y el riesgo del portafolio, brindando más alternativas al momento de contemplar los resultados posibles, con el uso de la función de pertenencia apropiado.

4. Los portafolios con mejor rendimiento son los obtenidos a través del uso de las técnicas difusas, tanto con la función de pertenencia triangular como trapezoidal, destacando el portafolio con la función de pertenencia trapezoidal con un rendimiento mayor.

5. Los indicadores de desempeño Treynor y Alpha de Jensen destacan el portafolio Black-Litterman bajo metodologías trapezoidales, de acuerdo con su mayor rentabilidad y la baja variabilidad de la rentabilidad de una acción respecto a aquella promedio del mercado $beta$.

Referencias

Barragan Pina, A. J. (2009). Síntesis de sistemas de control borroso estables por diseño memoria (tesis para optar al grado de doctor). Universidad de Huelva.

Bartkowiak, M. y Rutkowska, A. (2017). Black- litterman model with multiple experts? linguistic views. *Advances in Intelligent Systems and Computing*, 456, 35-43.

Bartkowiak, M. y Rutkowska, A. (2020). Vague expert information/recommendation in portfolio optimization-an empirical study. *Axioms*, 9(2), 1-12.

Bellman, R. E. y Zadeh, L. A. (1970). *Decision Making in A fuzzy environment*. Library.

Black, F. y Litterman, R. (1991). Asset allocation: Combining investor view. *The Journal of Fixed Income*, 1(2), 7-18.

Castiblanco-Ruiz, F. A (2016). *La teoría de los subconjuntos borrosos en el proceso presupuestario de las organizaciones*. Bogotá: Editorial Universitaria de la Universidad La Gran Colombia.

Echaust, K. y Piasecki, K. (2017). Black-Litterman model with intuitionistic fuzzy posterior return. *The IEB International Journal of Finance*, 15(1), 8-19.

Fang, Y., Bo, L., Zhao, D. y Wang, S. (2017). Fuzzy views on Black-Litterman portfolio selection model. *Journal of Systems Science and Complexity*, 1-13.

Gharakhani, M. y Sadjadi, S. J. (2013). A fuzzy compromise programming approach for the Black-Litterman portfolio selection model. *Decision Science Letters*, 2(1), 11-22.

Lawrence, K. D., Pai, D. R., Klimberg, R. K. y Lawrence, S. M. (2009). A fuzzy programming approach to financial portfolio model. In *Applications of Management Science* (Vol. 13).

Lu, I. C., Tee, K. H. y Li, B. (2019). Asset allocation with multiple analysts? views: A robust approach. *Journal of Asset Management*, 20(3), 215-228.

Sharpe, W. (1964). Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *The Journal of Finance*, 19(3), 425-442.

Watada, J. (2001). Fuzzy portfolio model for decision making in investment. In *Dynamical Aspects in Fuzzy Decision Making* (pp. 141-162).

Zadeh, L. A. (2008). Is there a need for fuzzy logic? *Information Sciences*, 178(13), 2751-2779.