

# Valoración de inversiones mediante Juegos de Opciones Reales

Investment valuation using Real Options Game

Juan Marcos Moreno Arias\*

---

\* Magíster en Finanzas. Director de Planeación y Control Financiero Systemgroup. [jmma790@gmail.com].

Artículo recibido: 10 de abril de 2021.

Aceptado: 01 de junio de 2021.

Para citar este artículo:

Moreno Arias, J. M. (2020). Valoración de inversiones mediante Juegos de Opciones Reales. ODEON, 20, 51-92.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n20.03>

## Resumen

En el presente artículo se valora un proyecto de inversión a través de la Teoría de Juegos de Opciones Reales (ROG, por sus siglas en inglés), este enfoque permite ampliar el análisis estándar de valoración al incorporar escenarios de flexibilidad e incertidumbre en estructuras de mercado como monopolio y oligopolio. Dada la importancia que tiene la toma de decisiones en los proyectos de inversión, nace la necesidad de poder identificar estrategias con herramientas que permitan superar las limitaciones de los métodos tradicionales basados en el modelo de flujo de caja descontado (FCD), analizando los impactos que puedan existir sobre la inversión al incorporar las acciones de los demás participantes del mercado.

**Palabras clave:** opciones reales; teoría de juegos; valoración.

**Clasificación JEL:** C14, C7.

## Abstract

This research focuses on valuing an investment project through the Theory of Real Options Games (ROG), this approach allows extending the standard valuation analysis including flexibility and uncertainty scenarios in market structures such as monopoly and oligopoly, given the importance of making decision in investment projects, there is a need to identify strategies with tools to overcome the limitations of traditional methods based on the discounted cash flow model (DCF), analysing the impact that may exist on investment when incorporating the actions of other market participants.

**Key words:** Real option; game Theory, real option game.

**JEL classification:** C14, C7.

## Introducción

Las metodologías estándar de valoración presentan deficiencias en el análisis de oportunidades de inversión cuyo valor deriva de opciones de crecimiento futuro, asumiendo que son una propuesta de ahora o nunca, sin tener en cuenta el valor de esperar y ver o cambiar la decisión a medida que la incertidumbre se resuelve con el tiempo. Myers y Turnbull (1977) resaltan la importancia que tiene el tiempo sobre las decisiones de inversión y cómo estas pueden verse afectadas por el nivel de incertidumbre, donde las opciones reales (OR) ofrecen un panorama más amplio sobre invertir o no (Wang, 2009). Los modelos de valoración han evolucionado al punto de tener la opción de invertir teniendo en cuenta nueva información, lo que permite suspender el proyecto si las condiciones del mercado son desfavorables, gracias a la similitud entre las opciones financieras y opciones reales que implican el derecho mas no la obligación de adquirir un activo, Reiss (1998) menciona que:

La empresa tiene una opción de compra sobre el valor generado por la inversión, más la opción de crecimiento futuro con un precio de ejercicio equivalente al costo. Esta opción es de tipo americana, debido que, la empresa no tiene una fecha límite para decidir invertir, si el valor del proyecto evoluciona favorablemente, la empresa invierte, pero si el proyecto aún no es lucrativo, la empresa decide “esperar y ver”.

Weeds (2002) ha señalado que las OR son oportunidades asociadas a la capacidad de una empresa para mantener la opción influenciada por la posibilidad de que ejerzan una inversión similar y afecten su valor, presionando en una decisión anticipada para no perder participación en el mercado; por supuesto, desde una perspectiva estratégica, se puede estimar la pérdida o ganancia de una ventaja competitiva del primer jugador. Por ejemplo, una inversión estratégica para desarrollar una nueva tecnología implica que la empresa pionera tiene una ventaja e influye en el comportamiento del competidor al fortalecer la posición a largo plazo, estos beneficios y sus implicaciones pueden evidenciarse con la ayuda de la Teoría de Juegos (TJ) junto con la valoración de opciones.

Por esta razón, se propone un enfoque de valoración que integre la TJ y las OR al analizar los problemas en la toma de decisiones financieras y sus

efectos en términos de competencia, debido a la relación positiva entre las expectativas del agente y el valor de la opción, por tanto, cualquier utilidad esperada maximiza la elección del jugador asociado al nivel de riesgo, en otras palabras, se infiere que las ganancias futuras ocasionadas por el factor de incertidumbre pueden aumentar o disminuir la riqueza, así que, tenemos que el ROG reemplaza la maximización de la utilidad desarrollada en los modelos tradicionales por la del *payoff*, lo que facilita el estudio de la dinámica de decisiones bajo incertidumbre y el procedimiento de optimización se centra en encontrar una ecuación de primer orden que maximice o minimice el precio en cada etapa del juego Ziegler (2012).

Dada la importancia que sugiere la valoración de proyectos como determinante del valor, es imperativo analizar el impacto dentro de diferentes escenarios, teniendo en cuenta que una estrategia de inversión puede ser flexible al contemplar situaciones subyacentes. Asimismo, el uso del ROG tiene en cuenta que el valor de la inversión se comporta como una variable que sigue un proceso conocido, el tiempo es infinito y discreto bajo el supuesto de que cualquier jugador presenta una posición neutral al riesgo; el juego es de suma cero desarrollado de forma secuencial o simultánea, por tanto, el enfoque incorpora no solo la flexibilidad y las oportunidades de crecimiento, sino también estrategias competitivas en un entorno incierto.

Este desarrollo permite valorar bajo nuevas oportunidades de inversión corporativas con dimensiones competitivas y estratégicas, lo que hace posible potencializar la planeación estratégica e inversiones financieras en escenarios bajo incertidumbre; por esta razón, el uso de esta metodología permite que la valoración sea flexible y dinámica, y da soporte a la decisión de inversión aprovechando las oportunidades de mercado, a su vez, permite ser eficiente frente a la competencia, lo que fortalece el paradigma de la gestión estratégica y permite captar el impacto que generan las decisiones sobre los competidores (Ferreira *et al.*, 2009).

El presente documento analiza un modelo de valoración basado en la integración de metodologías, que determina el impacto de escenarios de incertidumbre y flexibilidad a través de la identificación de ventajas y limitaciones, contrastando los resultados reflejados en un proyecto hipotético con el objeto de generar la estimación derivada del uso de este método.

# 1. Teoría de Opciones Reales y sus limitaciones en un mercado competitivo

## 1.1. Teoría de Opciones Reales

Las metodologías tradicionales han sido el pilar de las decisiones estratégicas, sin embargo, no ofrecen un panorama claro frente a los posibles escenarios, lo cual imposibilita la creación de una ventaja competitiva. Con la implementación de opciones financieras en la valoración de proyectos de inversión se amplían los márgenes de decisión, teniendo en cuenta el comportamiento del mercado, los rápidos cambios tecnológicos y la intensificación de la competencia. Esto requiere una prospección del potencial de crecimiento estratégico del proyecto siendo este más dinámico que la proyección de los flujos de caja, debido a que no incluye escenarios de incertidumbre y flexibilidad, porque se asume que el comportamiento del activo es determinístico (Dixit *et al.*, 1994). Pensar en las oportunidades de inversión futuras en términos de OR ha proporcionado nuevos conocimientos y permite un progreso sustancial en las decisiones corporativas sobre la asignación de recursos (Smit y Trigeorgis, 2012).

Lo anterior sostiene que el análisis de opciones reales (ROA, por sus siglas en inglés) incorpora y adapta los desarrollos de la teoría de valoración de opciones financieras, ya que implican el derecho mas no la obligación de adquirir un activo (cuadro 1), Trigeorgis (1993).

De esta manera, la flexibilidad se convierte en un elemento fundamental al plantearse escenarios de decisión para ajustarse a nuevas condiciones de mercado. En resumen, el ROA utiliza metodologías para cuantificar los efectos sobre el *VPN*, por tanto, los proyectos estratégicos no se consideran inversiones independientes, sino enlaces en una cadena de decisiones donde las primeras establecen el camino para las siguientes (Smit y Trigeorgis, 2012), brindando un nuevo análisis del efecto de la incertidumbre, debido a que se ha asumido que un alto nivel de incertidumbre puede conducir a una reducción en el valor de los activos; sin embargo, el enfoque del ROA demuestra lo contrario (Hernández, 2002) sin dejar por fuera la dificultad en el cálculo de este parámetro, debido que al tratarse de un proyecto de inversión nuevo, que no dispone de series históricas ni cuenta con un merca-

Cuadro 1: Similitud de opciones

Variable	Opción financiera	Opción real
Precio del subyacente ( $S_0$ )	Precio de las acciones	VP de los FC libres del proyecto
Precio de ejercicio, Strike ( $K$ )	Precio de ejercicio de la opción	Costo de la inversión
Vencimiento ( $T$ )	Tiempo de expiración de la opción	Tiempo de vencimiento de la opción
Tasa libre de riesgo ( $r_f$ )	Tasa de interés libre de riesgo	Tasa de interés libre de riesgo
Volatilidad ( $\sigma$ )	Dispersión de los rendimientos de la acción	Incertidumbre del proyecto

Fuente: elaboración propia, basado en Trigeorgis (1993).

do propio, genera limitantes al momento de aplicar el modelo de valoración, en otras palabras, su cálculo depende más de analizar las fuentes de incertidumbre como: costos, gastos o variables exógenas que influyan dentro de la estimación de este parámetro.

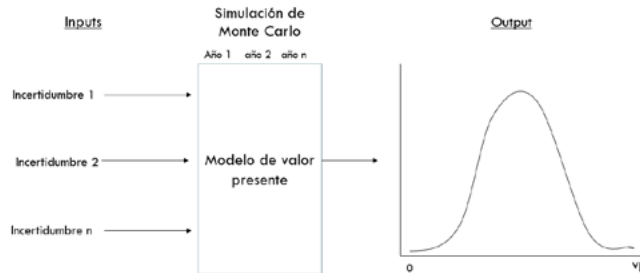
## 1.2. Estimación de la volatilidad

En el caso de las opciones financieras la solución de la volatilidad está sustentada en el análisis y desarrollo de modelos econométricos aplicados sobre series históricas o aproximaciones de las opciones negociadas en el mercado (Trujillo, 2015); sin embargo, en el caso del ROA, al no existir un mercado ni series históricas asociadas a proyectos de inversión no se pueden aplicar los modelos mencionados, por tanto, se utilizará la metodología desarrollada por Copeland y Antikarov (2003), sustentada en una solución discreta mediante la aplicación del modelo binomial basado en Cox *et al.* (1979), asumiendo que el VP del proyecto sin el componente de opciones reales es el mejor estimador del valor de mercado, a su vez contempla unos supuestos claves para soportar el uso de esta metodología dentro de la valoración del activo subyacente:

- Estima que la inversión se comporta como un activo que cotiza en el mercado.

- El modelo contempla probabilidad riesgo-neutral, por tanto, se utiliza una única tasa de descuento asociada al riesgo de inversión.
- El modelo absorbe todas las fuentes de incertidumbre identificadas del proyecto y las consolida en una sola como se observa en la figura 1.

Figura 1: Fuentes de incertidumbre



Fuente: elaboración propia, basado en Copeland y Antikarov (2003).

Debido a que el VP de los FCL se modela mediante un proceso estocástico que sigue una trayectoria de un Movimiento Geométrico Browniano (MGB) se cumple la ecuación diferencial estocástica:

$$dFC_t = \mu FC_t dt + \sigma_f FC_t dW_t \quad (1)$$

donde:  $\mu$  es el componente de tendencia (tasa media de retorno o tasa de crecimiento);  $\sigma_f$  es la volatilidad implícita del flujo de caja;  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar (proceso de Wiener).

Una vez definidos los supuestos del modelo usado por Copeland y Antikarov (2003), la simulación inicia con el cálculo del valor presente de los flujos de caja esperados asumiendo constantes  $\mu$  y  $\sigma$  en el instante  $t = 0$  ( $V_0$ ), por tanto, las variables inciertas del proyecto se toman como *inputs* de entrada en la simulación del instante  $t = 0$ , después, por la aplicación de métodos de Monte Carlo<sup>1</sup> se proyecta el flujo de caja y se calcula el valor presente en cada simulación al final del periodo  $1 = V_1$ , y la rentabilidad anual del proyecto se define como el  $VP_1$  y  $VP_0$ , en  $t = 1$  estimando el valor presente

<sup>1</sup>Procedimiento basado en el valor esperado de una variable aleatoria, el cual puede aproximarse mediante promedio por la ley de los grandes números.



por medio de la simulación y manteniendo constante el denominador  $VP_0$  lo que da como resultado:

$$\begin{aligned} VP_t &= VP_0 e^{rt} \\ \ln \frac{PV_t}{PV_0} &= rt \end{aligned} \quad (2)$$

Después, en cada simulación se calcula el flujo de caja y el valor presente en el periodo 1 el cual corresponde a  $VP_1$ , definiendo la variable aleatoria  $z$  como el retorno logarítmico del proyecto en el primer periodo, expresado como:

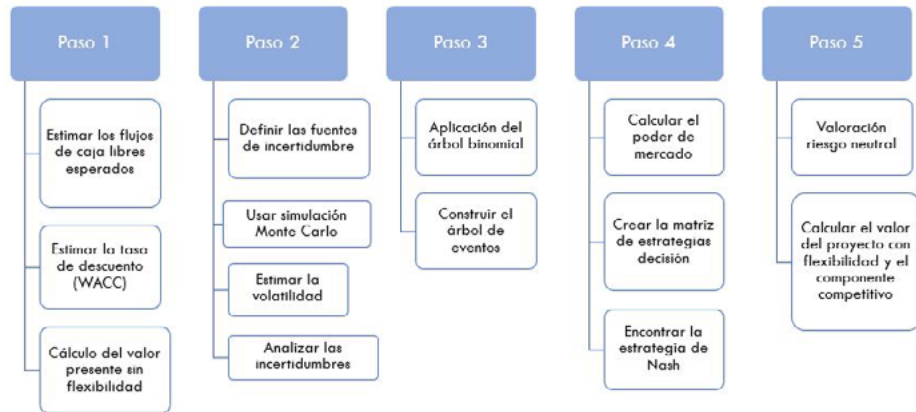
$$z = \ln \frac{PV_t}{PV_0} \quad (3)$$

Una vez definida la variable pronóstico  $z$ , se calcula la desviación estándar ( $s$ ), precisando de esta forma la volatilidad implícita del proyecto ( $\sigma$ ) como el porcentaje anualizado de la desviación estándar ( $s$ ) de los retornos, estimando la relación  $\frac{s}{\sqrt{\delta t}}$ , donde  $\delta t$  es la longitud del periodo de tiempo en años, y el  $VP_1$  se configura al proyectar los  $FCL$  en el periodo  $T = t$  y descontado a la tasa  $WACC$  del proyecto. Al momento de realizar la simulación de Monte Carlo, todas las fuentes de incertidumbre y sus correlaciones son tenidas en cuenta en cada iteración, se asume que el ( $VP_0$ ) permanece constante, mientras que el ( $VP_1$ ) genera  $n$  iteraciones obteniendo  $n$  resultados de la variable  $z$  y su respectiva desviación estándar ( $s$ ), calculando así la volatilidad implícita del proyecto.

### 1.3. Modelo de Valoración

Es importante definir los pasos (figura 2) que son necesarios para generar el modelo de valoración y, una vez calculado  $\sigma$ , el paso siguiente consiste en la construcción del árbol binomial bajo la metodología Cox *et al.* (1979), lo que permite obtener una representación gráfica en tiempo discreto de los flujos del activo subyacente cuando sigue un comportamiento del  $MGB$ , estimando los parámetros de tendencia  $u$ ,  $d$ ; y un modelo binomial de un periodo (Trujillo, 2015), con dos estados de naturaleza en  $t = 0$  hasta  $t = 1$ ; la opción es pactada en el instante  $t = 0$  y vencimiento  $t = 1$ , soportado con los siguientes supuestos:

Figura 2: Pasos de valoración



Fuente: elaboración propia, basado en Copeland y Antikarov (2003).

- Existe un activo libre de riesgo o bono  $x$ , y los agentes pueden invertir a tasa de interés constante  $rf$ , recibiendo en el periodo  $t = 1$ ;  $x(1+rf)$ .
- Existe un activo riesgoso cuyo precio en el instante  $t = 0$  es  $S_0$  y en el instante  $t = 1$  está dado por la variable aleatoria tipo binomial, las probabilidades  $p$  y  $1 - p$  reflejan la expectativa de los agentes al precio del activo:

$$S_1 = \begin{cases} uS_0, & \text{con probabilidad } p \\ dS_0, & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases}$$

- Sobre el activo riesgoso existe una opción de vencimiento en instante  $t = 1$  y precio de ejercicio  $k$ , este activo tiene un comportamiento semejante a una variable aleatoria tipo Bernulli:

$$V_1 = \begin{cases} V_1^u = f(uS_0) \\ V_1^d = f(dS_0) \end{cases}$$

- No hay costos de transacción ni tasas impositivas.
- El mercado es libre de oportunidades de arbitraje, donde se cumple la restricción  $u > 1$ ,  $d < 1$ .

Bajo el supuesto de no arbitraje, se construye la valoración por replicación cumpliendo la ley de único precio, modelando el comportamiento del activo subyacente en  $t = 0$ , considerando dos estados de naturaleza en el instante  $t = 1$ : el estado de crecimiento y el factor multiplicativo ( $u$ ), donde  $V_u = uV_0$ , o decrecimiento ( $d$ ) donde  $V_d = dV_0$ , se espera que  $u > e^{rT} > d$ .

Las variables  $u$  y  $d$  están asociadas al cálculo de la volatilidad ( $\sigma$ ) donde  $u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$  y  $d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$ , y ( $\delta t$ ) está asociado al intervalo del tiempo en que el activo subyacente se traslada discretamente entre los estados de naturaleza, ahora el valor de la opción no depende de las probabilidades o expectativas de los agentes sobre el comportamiento del mercado, sino que estas son valoradas bajo la medida de probabilidad riesgo neutral  $p$  y  $(1 - p)$ , y todos los activos del mercado retornan a la tasa libre.

#### 1.4. Limitación del modelo de valoración en un mercado competitivo

El ROA permite analizar los proyectos de inversión incluyendo el componente de flexibilidad e incertidumbre. Según Grenadier (2002), los agentes formulan estrategias óptimas ignorando la competencia, la entrada de un nuevo participante o el impacto de una guerra de precios, lo que genera la opción de esperar hasta encontrar el momento óptimo de inversión, sin embargo, frente a escenarios de competencia (Novy-Marx, 2007) muestra que esta reduce las oportunidades de ganancias.

De acuerdo con Li y Sick (2011), la literatura del ROA tiene como una de sus conclusiones retrasar la inversión hasta alcanzar un umbral adecuado del VP, precio, demanda u otra variable estocástica; asimismo, considera que las empresas no deben basar su decisión en un modelo que no contemple las implicaciones competitivas, por esta razón, se debería modelar la sensibilidad e interacción de bienes complementarios o sustitutos que afecten el VP, el poder de mercado, la experiencia o ubicación; aquí es donde la decisión de inversión puede influenciar en el comportamiento de los demás participantes de mercado. Así, sustentado en la ventaja de primer movimiento, Novy-Marx (2007) afirma:

La intuición de Cournot es conveniente al afirmar que la competencia debería llevar a las empresas a invertir antes, por lo que nuestro resultado de que la competencia parece llevar a las empresas a retrasar más la inversión es algo sorprendente. Sin embargo, tenga en cuenta que no estamos afirmando que los agentes competitivos demoren más que un monopolista estratégico que se enfrenta al mismo lado de la demanda del mercado, sino que las empresas competitivas retrasan la inversión más de lo que predice el modelo estándar de equilibrio parcial cuando se calibra a los precios observados.

Vollert (2012) muestra diferentes dimensiones de competencia, la primera corresponde a la estructura de mercado que depende del número de participantes y se puede estructurar en monopolio, oligopolio o competencia perfecta; la segunda dimensión corresponde a la postura del tomador de decisión, el cual puede estar interesado en la decisión óptima de la empresa individual o en el resultado de las decisiones de todos los participantes del mercado; por último, estos efectos pueden considerarse en entornos determinísticos o estocásticos y las acciones competitivas pueden ser exógenas o endógenas, lo que permite analizar el impacto que tienen las acciones competitivas, de acuerdo con Trigeorgis (1991), la evaluación competitiva generalmente se modela como un proceso de salto donde solo se tiene en cuenta el tiempo esperado y el impacto de la competencia.

Con base en lo anterior, el ROA es sensible a las interacciones de los demás agentes de mercado permitiendo analizar el efecto de valoración frente a la ausencia de competencia; sin embargo, bajo el escenario donde las empresas tienen participación de mercado es posible analizar el impacto de las decisiones estratégicas frente a la valoración, en palabras de Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011), “En un panorama tecnológico y competitivo en constante cambio, precisamente estas decisiones estratégicas determinan el éxito competitivo de la empresa y el valor de mercado, y a veces su propia supervivencia”, por tanto, hablar en términos de estrategia amplía el uso del análisis estándar del ROA debido a la combinación entre el pensamiento estratégico y el presupuesto de capital que permiten a la empresa realizar inversiones que incrementan la ventaja competitiva, por tanto, la TJ proporciona un enfoque para derivar estrategias bajo equilibrios de Nash en tiempo discreto. Como lo mencionan Ferreira *et al.* (2009) la herramienta del ROG se adapta a diferentes circunstancias del mercado y niveles de incertidumbre que influirán en la demanda y en las decisiones del consumi-

dor. De igual modo, Suttinon *et al.* (2012), proponen que la combinación de OR y TJ permite un análisis más profundo en comparación con otras metodologías, ya que suministra información que contempla los efectos del mercado sobre la competencia, precio y tiempo, junto con las probabilidades de decisión de los competidores.

## 2. Integración de la metodología de Teoría de Juegos en la toma de decisiones bajo incertidumbre

Desde la perspectiva de la globalización, las estrategias de inversión se convierten en una importante herramienta de análisis en los diferentes contextos de un mercado competitivo; es desde este punto donde la relación entre el análisis de OR y TJ permite la proyección de los riesgos que generará una oportunidad de inversión al contemplar diferentes fuentes de incertidumbre junto con la estrategia de mercado en ambientes altamente volátiles, donde el componente integrado puede determinar la efectividad de una inversión, sin basar la decisión necesariamente en el uso proyectado de los flujos de caja, por lo que este enfoque es más dinámico que los tradicionales, ya que es capaz de incorporar el valor de la flexibilidad y oportunidades de crecimiento al igual que estrategias competitivas en un entorno incierto (Smit y Ankum, 1993).

Varios documentos científicos han abordado la importancia de la flexibilidad de la inversión bajo escenarios de incertidumbre, como por ejemplo Baldwin (1982), quien examina el efecto de las estrategias sobre las oportunidades de inversión, y observa que las empresas con poder de mercado desean compensar la pérdida en el valor de las oportunidades futuras que resultan de emprender un proyecto, por tanto, exigen un valor positivo sobre el VPN. Sin embargo, Myers y Turnbull (1977) consideran las oportunidades de inversión estratégicas como opciones de crecimiento, pero al existir el efecto competitivo se generan cambios significativos en el comportamiento de la inversión, como se observa en los artículos científicos de Smit y Ankum, (1993), Smit y Trigeorgis (2012) y Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011).

Esta nueva visión de la inversión trata las oportunidades como opciones reales corporativas, lo que enriquece la planificación de recursos corporativos. La oportunidad de invertir puede verse como una opción *call*, que implica el derecho, pero no la obligación de adquirir un activo; desde esta perspectiva, el supuesto de competencia perfecta implicaría una pérdida del valor esperado del proyecto debido a las diferentes fuentes de incertidumbre; por el contrario, frente a un escenario de monopolio no hay tendencia a invertir de manera anticipada ya que el nivel de incertidumbre es cero, por lo que posponer una inversión no se traduce en una pérdida de valores actuales netos relativamente bajos (Smit y Trigeorgis, 2012)

Por tanto, la TJ estudia la interacción de individuos racionales en la toma de decisiones estratégicas, que pueden verse afectadas por influencia de los demás jugadores, lo que permite anteceder posibles acciones, buscando siempre maximizar su utilidad (Navarro y Tena, 2003).

- La decisión de una empresa ( $A$ ) sobre las cantidades y el precio de un bien por producir, homogéneo a la producción de una empresa ( $B$ ).

El caso anterior hace referencia a un mercado con cierto nivel de competencia, sin embargo, la TJ permite realizar el análisis donde no importa lo que hagan otros agentes, en otras palabras, permite revisar la utilidad final de una decisión de inversión de un agente monopolista de producir hasta  $Q$  unidades de un bien, y su relación con los precios de los bienes sustitutivos, en conclusión, termina siendo el resultado de acciones de otros agentes.

Con base en lo anterior, bajo una estructura de mercado oligopolista, la TJ permite suponer que hay un agente de mercado líder que puede conocer las decisiones de los demás jugadores, supone que la estructura del juego es de dominio público, y la información es completa, por tanto, se conocen las funciones de pago de los agentes seguidores. No obstante, en ambientes de monopolio los consumidores son tomadores de precios, cuanto menores sean los productores mayor es el poder de mercado debido a que la curva de demanda es negativa (Támara y Aristizábal, 2012), por tanto, en un escenario de monopolio natural el problema se centra en obtener un *VPN* óptimo teniendo una opción a perpetuidad. Así, bajo una estructura de mercado oligopolista la TJ permite suponer un agente líder, y el juego es de dominio

público con información completa, conociendo las funciones de pago de los agentes seguidores.

Ahora bien, en el escenario con información completa, se aplicará el duopolio de Stackelberg, este modelo permite analizar el comportamiento corporativo y estratégico en un juego de dos etapas y el conjunto de acciones es continuo; de esta manera, la empresa líder tiene el privilegio del primer movimiento y la empresa seguidora tomará la decisión de inversión con base en la decisión de la empresa líder (Navarro y Tena, 2003). Para dar una solución analítica y encontrar el equilibrio de Nash del juego se utiliza la metodología de inducción hacia atrás<sup>2</sup>, como en cualquier juego secuencial, por tanto, es posible analizar la decisión y las estrategias del seguidor, el impacto del poder de mercado y la correlación entre las decisiones de los diferentes agentes.

## 2.1. Índice Herfindahl-Hirschman

Para estructurar la matriz de pagos estratégicos es necesario incorporar el efecto competitivo utilizando el índice Herfindahl-Hirschman (*HHI*) debido a que es el índice por preferencia para determinar la concentración en el mercado, definido como la suma al cuadrado de las cuotas de mercado de las empresas de una industria (Hannan, 1997).

$$HHI = \sum_{i=1}^n s_i^2 \quad (4)$$

## 2.2. Decisiones estratégicas de inversión

La implementación de la Teoría de Juegos permite incorporar los efectos de un mercado dinámico, incierto y flexible, integrando el ROA en un árbol binomial junto con la matriz de pagos de dicha teoría; así mismo, permite hallar el equilibrio de Nash junto con el precio que maximice el beneficio e identificar el escenario más favorable, a fin de interpretar y comprender las interacciones entre los agentes de mercado frente a una estrategia competitiva óptima, por medio de variables de decisión y elementos que conforman un juego estándar como:

---

<sup>2</sup>Para revisar la solución por inducción hacia atrás ver anexo A.

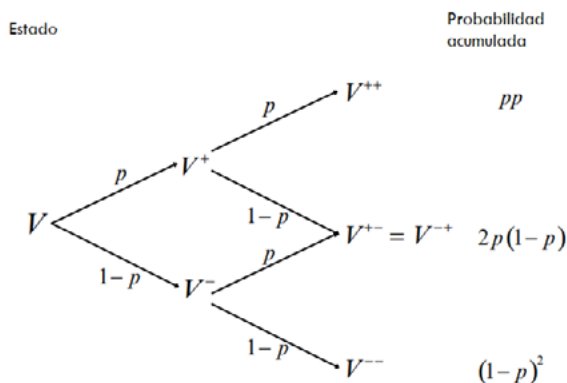
- Un conjunto finito de jugadores (empresas):  $N = \{1, \dots, n\}$ .
- Un conjunto finito de estrategias ( $C$ ) en el juego para cada jugador  $i \in N$

$$C_i : C = \{C_i, \dots, C_n\}$$

Sin embargo, una inversión con incertidumbre competitiva implica necesariamente incluir dentro de la valoración un componente de estrategia, a diferencia de un juego estándar cada estrategia de inversión ( $C_i$ ) involucra la incertidumbre en sus decisiones y no solo depende de la expectativa y el comportamiento esperado de los agentes, sino de escenarios exógenos en los que está implícito el mercado, en otras palabras, bajo oligopolio la oportunidad de inversión es compartida, debido que al ejecutar la opción de invertir esta genera diferentes reacciones frente a la estrategia tomada, lo que se traduce en un cambio en la valoración de los modelos estándar, puesto que ahora implica optimizar un juego estratégico contra la competencia, es decir, la estrategia de inversión debe sustentarse no solo en el criterio del VPN ampliado, sino incluir un VPN estratégico (Smit y Trigeorgis, 2006).

$$VPNE = VPN \text{ (sin flexibilidad)} + \text{Valor de la Opción} + \text{Valor estratégico}$$

Figura 3: Árbol binomial



Fuente: elaboración propia, basado en Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011).

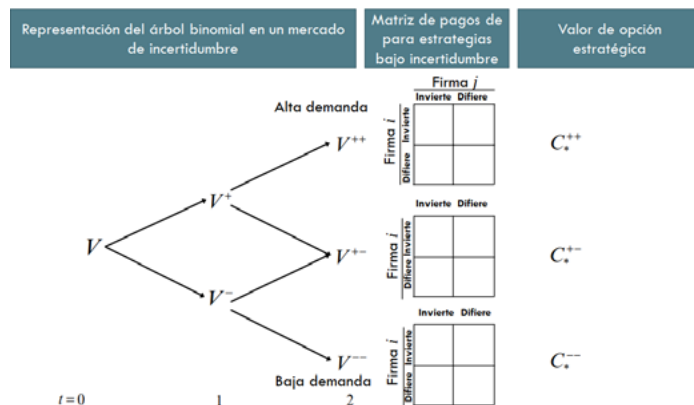


Esto permite modelar el comportamiento estocástico del VP en cada instante de tiempo ( $V$ ) por medio del uso de árboles binomiales (figura 3), con las siguientes características:

- $pp$ : para un estado de alta demanda.
- $2p(1 - p)$ : para un estado de demanda intermedia.
- $(1 - p)^2$ : para un estado de baja demanda.

Definido por los parámetros  $u$ ,  $d$  y bajo el supuesto de no arbitraje, se espera que  $u > e^{rT} > d$ , considere un escenario en duopolio que consta de dos firmas  $i$  y  $j$  que invierten en un mercado emergente a dos años con una tasa libre de riesgo, donde las firmas pueden realizar la inversión ahora, esperar e invertir después (año 2), con opciones estratégicas representadas en una matriz de  $2 \times 2$ , con las siguientes opciones: ambos invierten, ambos difieren o solo un agente invierte y el otro difiere. La estructura básica del juego esta descrita en la figura 4, el árbol binomial muestra la evolución del valor de la inversión frente a diferentes escenarios de demanda y al finalizar cada nodo se encuentra una matriz  $2 \times 2$ , con el *payoff* de la interacción competitiva, seguido de los resultados de equilibrio (\*), equivalente al valor de la estrategia óptima en cada estado del mercado ( $C_*^{++}$ ;  $C_*^{+-}$ ;  $C_*^{--}$ ) (Chevalier-Roignant y Trigeorgis, 2011).

Figura 4: Matriz de estrategia



Fuente: elaboración propia, basado en Chevalier-Roignant y Trigeorgis (2011).

## 2.3. Estrategias competitivas

Una vez analizado el componente competitivo (HHI), se integra al cálculo de la estrategia

- Invierte e invierte:
  - Jugador  $j = (V^{++}(s)) - I$
  - Jugador  $i = (V^{++}(1 - s)) - I$
- Invierte y difiere:
  - Jugador  $j = V^{++} - I$
  - Jugador  $i = 0$

Bajo el principio de inducción hacia atrás a lo largo de la matriz de pagos en  $t = 2$ , se calcula el valor de la opción estratégica para el jugador  $j$ :

- $C^+ = \frac{pC^{++} + (1-p)C^{+-}}{1+r}$
- $C^- = \frac{pC^{+-} + (1-p)C^-}{1+r}$
- $C = \frac{pC^+ + (1-p)C^-}{1+r}$

Lo anterior ha permitido generar un modelo que da soporte analítico incorporando la relación costo-beneficio de la flexibilidad estratégica sujeta a la incertidumbre y proyección del comportamiento estocástico, cuantificando acciones estratégicas frente a esta conducta de mercado.

## 3. Aplicación del modelo

### 3.1. Descripción del proyecto y principales supuestos:

El proyecto se encuentra estructurado en cinco pasos, como se muestra en la figura 2, por tanto, el valor estimado de la inversión es COP\$ 626 millones, para el primer mes esperan obtener ingresos por COP\$ 383 millones. En la tabla 1, anexo C, se detallan los valores de entrada tenidos en cuenta en el cálculo, a fin de obtener el primer año un ingreso por COP\$ 2,925

millones alcanzando una tasa de crecimiento discreto promedio de 10,80 % o 10,26 % continua durante el periodo de estudio. Por otro lado, el costo de venta anual estimado es 34,65 % equivalente a COP\$ 1,014 millones al año, los gastos administrativos son 18,94 % equivalente a COP\$ 554 millones. Con los resultados obtenidos para el primer año el proyecto genera un margen bruto de 65 % y margen operativo del 37 %, y se considera una tasa impositiva del 34 %, acompañada de una tasa de depreciación del 5,56 %; por último, la tasa de descuento (WACC)<sup>3</sup> se asume constante e igual a 15,39 % durante los años de duración del proyecto y tasa libre de riesgo que equivale a  $r = 4,86$  %. Con la información anterior se calcula el *VPN* equivalente a COP\$ 22 millones, lo que permite dar un primer análisis del comportamiento esperado de la inversión a dos años, como se observa en la tabla 2.

## 3.2. Desarrollo del modelo de valoración

### 3.2.1. Valoración inercial

El VP de la inversión equivale a COP\$ 648MM, mientras su valor presente neto ( $VPN = VP - I$ ) es COP\$ 22MM, y la tasa interna de retorno (TIR) es 18 %, sin embargo, aún no se ha incluido el componente competitivo que permite analizar el impacto sobre el VPN.

### 3.2.2. Estimación de la volatilidad

Se definen las fuentes de incertidumbre y se estima la volatilidad (paso 2) mediante la simulación de Monte Carlo con la metodología Copeland y Antikarov, para el caso propuesto se identificaron tres fuentes de incertidumbre:

- Saldo en mora: varía mensualmente y es asignado de acuerdo al comportamiento de la cartera y efectividad de cobro, dependiendo de variables macroeconómicas como inflación y desempleo.
- Efectividad de cobro: analiza el comportamiento histórico de la compañía frente a la asignación y su tasa de efectividad por edad de mora.

---

<sup>3</sup>Para detalle del cálculo ver anexo C.

Figura 5: Estado de resultados

Estado de Resultados	Año 0	Año 1	Año 2
Ingresos x Ventas		\$ 2.925	\$ 1.977
Costo de ventas		\$ 1.014	\$ 685
<b>Utilidad bruta</b>		<b>\$ 1.912</b>	<b>\$ 1.292</b>
Gastos administrativos		\$ 554	\$ 374
Depreciación		\$ 256	\$ 256
<b>Utilidad Operacional</b>		<b>\$ 1.102</b>	<b>\$ 661</b>
Gastos financieros		\$ 7	\$ 7
<b>Utilidad antes de impuestos</b>		<b>\$ 1.094</b>	<b>\$ 654</b>
Impuestos (34%)		\$ 372	\$ 222
Inversión	\$ 626		
<b>Utilidad Neta</b>	<b>\$ 626</b>	<b>\$ 722</b>	<b>\$ 432</b>
Margen Bruto		65,35%	65,35%
Margen Operativo		37,66%	33,46%
+EBIT		\$ 1.102	\$ 661
+Depreciaciones		\$ 256	\$ 256
- Capex	\$ 626		
- Inc. Capital de trabajo		\$ 516	\$ 368
<b>=Flujo de Caja operativo</b>	<b>\$ (626)</b>	<b>\$ 842</b>	<b>\$ 349</b>
-Impuestos		\$ 375	\$ 225
<b>=FCL</b>	<b>\$ (626)</b>	<b>\$ 467</b>	<b>\$ 324</b>
<b>VPN del proyecto</b>	<b>\$ 22</b>		
<b>VPO - Valor presente de los FCL</b>	<b>\$ 648</b>		
<b>VP1 - Valor presente de los FCL11</b>	<b>\$ 748</b>		
<b>TIR</b>	<b>18%</b>		

Fuente: elaboración propia.

- Comisión: de acuerdo con la edad de mora y la efectividad estimada se calcula la tasa de comisión de ingreso que es el resultado de la simulación de Monte Carlo de las dos variables anteriores.

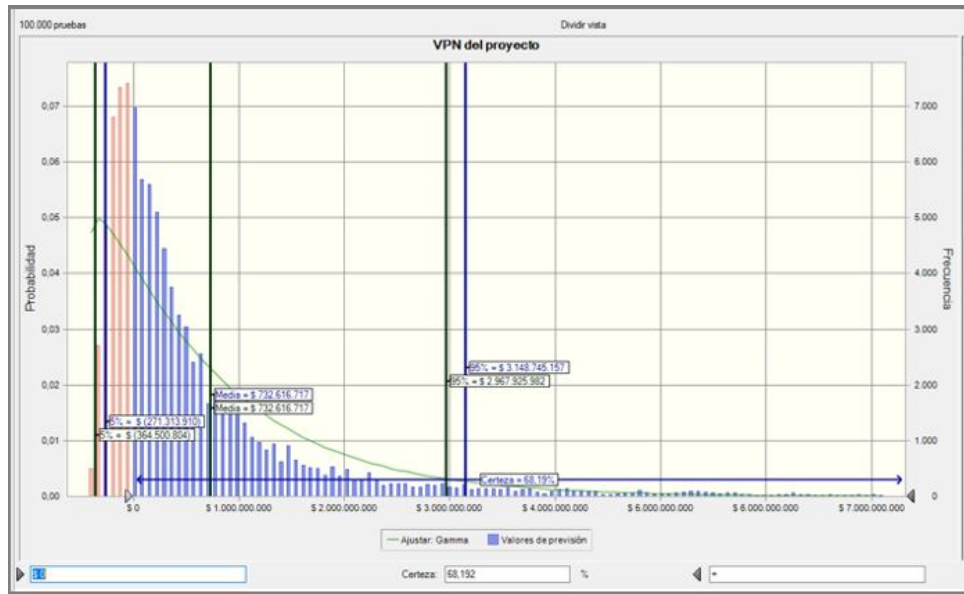
Definidas las fuentes de incertidumbre, se asume que los ingresos ( $I_t$ ) siguen un proceso estocástico con distribución Log-normal y parámetros  $(\mu, \sigma)$ :

$$dI_t = \mu I_t dt + \sigma I_t dW_t \quad (5)$$

Donde:

$\mu$ , es el componente de tendencia (tasa media de retorno o tasa de crecimiento), y  $W_t$  es un movimiento Browniano estándar, la desviación estándar del proceso estocástico es  $\sigma = 10,23\%$ .

Figura 6: Resultados de la simulación



Fuente: elaboración propia.

Una vez definidos los supuestos del modelo, se realizan 100,000 iteraciones permitiendo obtener resultados óptimos con respecto a la valoración inercial donde el *EVPN* muestra una mejora significativa pasando de *COP*\$22 MM a *COP*\$732 MM, y nivel de certeza de 68 % (figura 6), se calcula la variable pronóstico  $z$  estimando la volatilidad consolidada de  $\sigma=73,23\%$

### 3.2.3. Cálculo del poder de mercado

Se tienen en cuenta los ingresos de un año comparados con el sector compuesto por 33 empresas, el 80 % está conformado por 9 empresas (tabla 2 anexo C), la compañía líder es Digitex con un *HHI* de 325 equivalente a 18,04 %, la compañía de estudio tiene un *HHI* de 107 que equivale a 10,34 % en ambiente de oligopolio, mientras que al hacer el mismo ejercicio en duopolio el mercado se compone por la empresa líder con un *HHI* de 4,040 equivalente a 63,56 %, el caso simulado tiene un *HHI* de 1,328 equivalente a 36,44 %

### 3.2.4. Simulación duopolio

Se construye un árbol binomial que contempla los efectos en alta, media y baja demanda (figura 7), partiendo del VP ( $V = \text{COP\$ } 648 \text{ MM}$ ) a un estado de alta demanda que transcurre de  $t = 0$  a  $t = 2$  con saltos de crecimiento de  $u = 2,08$ ; en este caso, el valor bruto de mercado es  $V^{++} = uuV = \text{COP\$ } 2.808 \text{ MM}$ , asumiendo que una sola empresa (líder o simulada) ingrese al mercado esta obtendrá el valor de mercado bruto menos el costo de la inversión  $I = 626$ , y un valor neto de  $V^{++} - I = 2,808 - 626 = 2,182$ .

En caso de que la empresa no decida ingresar al mercado durante el tiempo estimado su valor de diferir será igual a cero, sin embargo, en caso de que ambas empresas inviertan al vencimiento, el mercado se segmenta dentro de la cantidad de participantes en el ejemplo de duopolio, Digicel (empresa líder) obtiene un poder de mercado de  $63,56\%$  y el caso simulado tendrá una participación de  $36,44\%$ .

### 3.2.5. Estrategias de inversión

La estrategia se distribuirá de la siguiente forma:

- Competencia entre dos empresas (figura 7):
  - Invierte-invierte: Digicel tiene participación de mercado  $s = 63,56\%$  del valor del mercado menos el costo de inversión  $(V^{++})s - I = 2,808(63,56\%) - 626 = 1,159$ , mientras que la empresa simulada obtiene  $(V^{++})s - I = 2,808(36,44\%) - 626 = 398$
  - Estrategia (invierte-difiere): en este caso el jugador que invierta tendrá un comportamiento semejante a un monopolista, por tal, razón absorbe todo el mercado y su participación sería equivalente al  $100\%$ , sin embargo, el jugador que decida diferir recibirá una compensación de cero.



ción de inversión y maximice su utilidad; bajo el criterio de único competidor (monopolio), el pago por recibir sería  $V^{+-} - I = 648 - 626 = 22$ , sin embargo, si la empresa decide diferir la opción su pago será cero, si ambas compañías optan por invertir no encontrarán incentivos que maximicen su utilidad dado que sus pagos son negativos, en este caso la empresa líder tiene una estrategia de invertir, por ende, la respuesta del caso simulado es diferir la inversión recibiendo cero en vez de una compensación negativa; dado que la empresa juega su respuesta óptima a las acciones de su rival, el equilibrio de Nash en este estado de demanda es  $(0, 22)$ .

Al analizar el último estado de demanda el valor de mercado es  $V^{--} = COP \$150MM$ , e inferior al costo de la inversión; de este manera, ninguna empresa tiene incentivos para invertir, por tanto, las empresas tiene una estrategia dominante hacia diferir y el equilibrio de Nash en este nodo es  $(0, 0)$ .

### 3.2.6. Valoración de la opción estratégica

Una vez encontrado el equilibrio de Nash en cada nodo del árbol, se valora la opción estratégica con la metodología de valoración hacia atrás bajo la probabilidad Riesgo-Neutral, permitiendo encontrar el VP de la opción, donde  $r = 0,0486$ ,  $u = 2,08$  y  $d = 0,48$ , la probabilidad neutral de riesgo es:

$$p = \frac{(1+0,0486)-0,48}{2,08-0,48} = 35,49\% ; (1-p) = 64,51\%$$

Partiendo de  $t = 2$ , se realiza el proceso de valoración de la opción estratégica  $C^+$ :

$$C^+ = \frac{pC^{++}+(1-p)C^{+-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(398)+(64,51\%)(0)}{1,0486} = 135$$

Ahora se procede a realizar la valoración de la opción estratégica  $C^-$

$$C^- = \frac{pC^{+-}+(1-p)C^{-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(0)+(64,51\%)(0)}{1,0486} = 0$$

Por último, se valora la opción estratégica en  $t = 0$ :

$$C = \frac{pC^++(1-p)C^-}{1+r} = \frac{(35,49)135+(64,51)0}{1,0486} = 46$$



Es decir, el valor actual de la oportunidad de inversión del caso simulado a dos años y contemplando las interacciones estratégicas en todos los estados de mercado, es  $C = 46$ , y para el caso del líder el valor de la opción estratégica es  $C = 142$ , esto se obtiene siguiendo el mismo proceso de valoración.

$$C^+ = \frac{pC^{++} + (1-p)C^{+-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(1,159) + (64,51\%)(22)}{1,0486} = 406$$

$$C^- = \frac{pC^{+-} + (1-p)C^{-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(22) + (64,51\%)(0)}{1,0486} = 8$$

$$C = \frac{pC^+ + (1-p)C^-}{1+r} = \frac{(35,49)406 + (64,51)8}{1,0486} = 142$$

### 3.2.7. Simulación oligopolio

Considere ahora un juego de dos etapas de tiempo, a su vez, el mercado se estructura con un nuevo competidor y se distribuye:

- $s_{j4}$  = Emtelco: 56, 53 %
- $s_{j3}$  = Digitex: 19, 59 %
- $s_{j2}$  = Aesca: 12, 63 %
- $s_{j1}$  = Caso simulado: 11, 23 %

Por tanto, el desarrollo estratégico de la simulación se basa en la respuesta de inversión de la competencia, es decir, desde la posición del  $s_{j1}$  se espera la respuesta de  $s_{j2}$  y esta responde de acuerdo con la decisión del jugador  $s_{j3}$  del mismo modo que su respuesta está asociada a la estrategia de  $s_{j4}$ , todos los jugadores responden a dos estrategias en los diferentes estados del juego que son invertir (I) o diferir (D), generando 16 estrategias en cada estado de mercado (figura 8).



- $(V^{++})_{s_{j1}} - I = 2,808(25,84\%) - 626 = 100$
- $(V^{++})_{s_{j2}} - I = 2,808(29,08\%) - 626 = 191$
- $(V^{++})_{s_{j3}} - I = 2,808(45,08\%) - 626 = 640$
- $(V^{++})_{s_{j4}} - I = 2,808(0\%) - 0 = 0$

Sin embargo, en el nodo 3 la estrategia del jugador  $s_{j3}$  es diferir; como se observó en el nodo 1, el jugador  $s_{j4}$  absorbe toda la capacidad de mercado y es el único que tiene un  $VPN$  positivo. En el nodo 4, suponga que dos jugadores optan por la opción de diferir ( $s_{j3}$  y  $s_{j4}$ ) lo que significa que su pago es igual a cero, de esta manera el mercado se distribuye entre los participantes activos, en este caso los jugadores tienen participación de  $s_{j2} = 52,95\%$  y  $s_{j1} = 47,05\%$ , y reciben un  $VPN$  positivo con pagos  $s_{j2} = 861$  y  $s_{j1} = 696$ , pero como el juego se desarrolla bajo Stackelberg, la empresa líder tiene una ventaja de primer movimiento, por tanto, estas estrategias no satisfacen un equilibrio de Nash.

Al analizar las 16 estrategias en el estado de alta demanda el equilibrio de Nash que satisface este juego es  $(D, D, I, I)$ , esto se debe a que la empresa líder maximiza su utilidad de igual forma que el jugador  $s_{j3}$ ; dado que los jugadores  $s_{j1}$  y  $s_{j2}$  difieren la opción esto les permite tener una compensación igual a cero, pero no negativa; así,  $s_{j3}$  incrementa su participación de mercado y obtiene un  $VPN$  positivo. En la figura 8 se puede identificar la estrategia de Nash sombreada con los pagos 0, 0, 97, 1460.

Al analizar el estado de media demanda el mercado se asemeja a un monopolio, debido a que solo permite a una empresa realizar la inversión y la estrategia de Nash es  $(0,0,0,22)$  debido que  $s_{j4}$  tiene un  $VPN$  positivo; ahora en el estado de baja demanda se evidencia que el  $VPN$  es inferior al valor de la inversión inicial y el equilibrio de Nash es  $(0,0,0,0)$ ; bajo probabilidad riesgo neutral se calcula el valor de la opción estratégica.

### 3.2.9. Valoración de la opción estratégica

Partiendo de  $t = 2$ , se realiza el proceso de valoración estratégica  $C^+$ :

$$C^+ = \frac{pC^{++} + (1-p)C^{+-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(0) + (64,51\%)(0)}{1,0486} = 0$$

Ahora se procede a realizar la valoración de la opción estratégica  $C^-$

$$C^- = \frac{pC^{+-} + (1-p)C^{-}}{1+r} = \frac{(35,49\%)(0) + (64,51\%)(0)}{1,0486} = 0$$

Por último, se valora la opción estratégica en  $t = 0$  para la empresa simulada donde:

$$C = \frac{pC^+ + (1-p)C^-}{1+r} = \frac{(35,49)0 + (64,51)0}{1,0486} = 0$$

Es decir, el valor actual de la oportunidad de inversión para  $s_{j1}$  a dos años, contemplando las interacciones estratégicas con la competencia en todos los estados de mercado, es de  $C = 0$ , debido que la mejor respuesta de  $s_{j1}$  es diferir; para el jugador  $s_{j2}$  el valor de la opción estratégica es 0, para el  $s_{j3}$  es 11 y para  $s_{j4}$  el valor de su opción es 177.

## 4. Conclusiones

Como consecuencia de lo expuesto anteriormente se evidencia que el análisis combinado de OR y TJ permite evaluar problemas de inversión bajo escenarios de incertidumbre y desarrollar estrategias de optimización fortaleciendo la participación de mercado al evaluar posiciones estratégicas competitivas frente a oportunidades de inversión.

Por lo tanto, la metodología tradicional (VPN) muestra una deficiencia en el análisis del caso debido a que, en primera instancia, bajo el criterio tradicional, la opción de inversión es viable dado que su VPN es mayor que cero, sin embargo, al incluir el efecto competitivo y dependiendo de su participación de mercado la inversión puede no ser viable.

El modelo desarrollado ha permitido abordar problemas de decisiones de inversión, y ha proporcionado una nueva solución que contribuye a mejorar el estudio del comportamiento competitivo de las empresas. Así mismo, el análisis de ambientes monopolísticos permitió deducir que la opción de esperar y ver es eficiente, debido a que no tiene incentivos para una in-

versión temprana al no considerar inversiones competitivas que alteren su participación en el mercado. Por el contrario, en ambientes competitivos no siempre es recomendable la opción estratégica de esperar, dado que, puede implicar una pérdida en el valor esperado del proyecto debido a la entrada competitiva anticipada, lo que genera pérdidas en ventajas competitivas o participación de mercado; en algunos casos, una inversión temprana puede convertirse en una desventaja estratégica debido a la capacidad de respuesta de los jugadores, puede ser de forma agresiva o cooperativa, cambiando la estructura inicial del juego y los incentivos de inversión.

La simulación desarrollada permitió analizar un juego con dos escenarios, el primero un mercado conformado por dos jugadores simétricos y compuesto por una empresa líder y una seguidora; el segundo escenario permitió incluir más agentes de mercado lo que amplió el análisis del impacto competitivo de la interacción entre los diferentes jugadores, permitiendo generar estrategias competitivas que influyen en el VPN; lo anterior se pudo ver reflejado en el análisis de sensibilidad que dio una perspectiva diferente sobre la tendencia que tiene el VPN frente al poder de mercado de un agente, concluyendo que la decisión estratégica de inversión va a depender de la participación de mercado y, por ende, de la decisión de la empresa líder.

En el desarrollo de un mercado de duopolio, dependiendo del valor del proyecto, puede ser atractivo para ambas empresas diferir la inversión, dependiendo de la elección de la empresa líder; sin embargo, tan pronto la empresa líder invierta, la empresa seguidora deberá analizar el impacto sobre su inversión y decidir si difiere o invierte. Por su parte, en el caso de un mercado oligopólico, cuando hay muchos competidores y cada uno con poder de mercado determinado, la decisión anticipada de inversión de la empresa líder puede erosionar el valor del proyecto.

Lo anterior, permite comprender el comportamiento de los competidores y la manera como sus decisiones pueden afectar o mejorar significativamente las proyecciones estratégicas de una empresa a corto y largo plazo, y cuándo las decisiones de sus competidores tienen un impacto en sus ganancias. Por tanto, es importante gestionar la reacción y relación competitiva y sus posibles beneficios, esta metodología (ROG) puede ser una valiosa herramienta de análisis financiero en la implementación de proyectos.

Para tal fin, debe resolverse la complejidad e identificación de los supuestos que afectan la valoración, en el caso desarrollado se utilizaron variables macroeconómicas que afectaron el comportamiento de los flujos. Por otro lado, la Teoría de Juegos permite que un problema estratégico complejo se pueda reducir a una estructura analítica más sencilla, segmentado en cinco dimensiones: la primera corresponde a identificar jugadores; la segunda, al orden en la toma de decisiones; la tercera, a definir el conjunto de acciones y la información que manejará cada jugador; la cuarta, a la estructura de pagos, y, por último, la solución por inducción hacia atrás.

## Referencias

- Baldwin, C. Y. (1982). Optimal sequential investment when capital is not readily reversible. *The Journal of Finance*, 37(3), 763-782.
- Brealey, R. A., Myers, S. C., Marcus, A. J., Wang, H., y Zhu, L. (2007). *Fundamentals of corporate finance*. McGraw-Hill/Irwin New York.
- Chevalier-Roignant, B., y Trigeorgis, L. (2011). *Competitive strategy: Options and games*. MIT press.
- Copeland, T., y Antikarov, V. (2003). Real options: A practitioner's guide, revised edition. *Thomson/Texere, New York*.
- Cox, J. C., Ross, S. A., y Rubinstein, M. (1979). Option pricing: A simplified approach. *Journal of financial Economics*, 7(3), 229-263.
- Dixit, A. K., Dixit, R. K., y Pindyck, R. S. (1994). *Investment under uncertainty*. Princeton University Press.
- Ferreira, N., Kar, J., y Trigeorgis, L. (2009). Option games the key to competing in capital-intensive industries. *Harvard Business Review*, 87(3), 101-107.
- Grenadier, S. R. (2002). Option exercise games: An application to the equilibrium investment strategies of firms. *The Review of Financial Studies*, 15(3), 691-721.
- Hannan, T. H. (1997). Market share inequality, the number of competitors, and the hhi: An examination of bank pricing. *Review of Industrial Organization*, 12(1), 23-35.
- Hernández, D. (2002). *Opciones reales: el manejo de las inversiones estratégicas en las finanzas corporativas*. (Trabajo de Grado de la Licenciatura en Economía, Universidad Nacional Autónoma de México, México).
- Li, Y., y Sick, G. (2011). Investment under uncertainty: A equilibrium between competition and cooperation.
- Mascareñas, J. (2007). Opciones reales en la valoración de proyectos de inversión. *Monografías sobre Finanzas Corporativas*.

- McDonald, R., y Siegel, D. (1986). The value of waiting to invest. *The Quarterly Journal of Economics*, 101(4), 707-727.
- Myers, S. C., y Turnbull, S. M. (1977). Capital budgeting and the capital asset pricing model: Good news and bad news. *The Journal of Finance*, 32(2), 321-333.
- Navarro, J. P., y Tena, E. C. (2003). *Teoría de juegos*. Pearson educación.
- Novy-Marx, R. (2007). An equilibrium model of investment under uncertainty. *The Review of Financial Studies*, 20(5), 1461-1502.
- Reiss, A. (1998). Investment in innovations and competition: An option pricing approach. *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 38(3), 635-650.
- Smit, H. T., y Ankum, L. (1993). A real options and game-theoretic approach to corporate investment strategy under competition. *Financial Management*, 241-250.
- Smit, H. T., y Trigeorgis, L. (2006). Real options and games: Competition, alliances and other applications of valuation and strategy. *Review of Financial Economics*, 15(2), 95-112.
- Smit, H. T., y Trigeorgis, L. (2012). *Strategic investment: Real options and games*. Princeton University Press.
- Suttinon, P., Bhatti, A. M., y Nasu, S. (2012). Option games in water infrastructure investment. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 138(3), 268-276.
- Támara, A., y Aristizábal, R. (2012). Las opciones reales como metodología alternativa en la evaluación de proyectos de inversión. *Ecos de economía*(35), 29-44.
- Trigeorgis, L. (1991). Anticipated competitive entry and early preemptive investment in deferrable projects. *Journal of Economics and Business*, 43(2), 143-156.



Trigeorgis, L. (1993). The nature of option interactions and the valuation of investments with multiple real options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28(1), 1-20.

Trujillo, J. F. M. (2015). *Una introducción a las opciones reales*. U. Externado de Colombia.

Vollert, A. (2012). *A stochastic control framework for real options in strategic evaluation*. Springer Science & Business Media.

Wang, W.-K. (2009). *Application of stochastic differential games and real option theory in environmental economics* (Tesis Doctoral no publicada). University of St Andrews.

Weeds, H. (2002). Strategic delay in a real options model of r&d competition. *The Review of Economic Studies*, 69(3), 729-747.

Ziegler, A. C. (2012). *A game theory analysis of options: Corporate finance and financial intermediation in continuous time*. Springer Science & Business Media.

## Anexos

### Anexo A. Duopolio Solución por inducción hacia atrás

Con base en las decisiones que ha tomado la  $E_1$ , se analizará el esquema de decisiones de la  $E_2$ , resolviendo el problema de maximización:

$$\max u_2(q_1, q_2) = q_2[a - c - q_1 - q_2] \quad (6)$$

Bajo la condición de primer orden se tiene:

$$\partial u_2(q_1, q_2)/\partial q_2 = 0 \quad (7)$$

Resolviendo la ecuación se obtiene  $a - c - q_1 - q_2 = 0$ , de donde se deduce:

$$q_2 = \frac{a - q_1 - c}{2} \quad (8)$$

con base en lo anterior, se tiene la condición de segundo orden que es  $\partial^2 u_2(q_1, q_2)/\partial q_2^2 = -2 < 0$

Por tanto, se espera que la respuesta de la  $E_2$  a la acción estratégica está dada por la función de respuesta:

$$R_2(q_1) = \frac{a - q_1 - c}{2}, \quad \text{para } 0 \leq q_1 \leq a - c$$

Sin embargo, se debe analizar la función de maximización de la utilidad de la  $E_1$ , debido que es una respuesta anticipada a la estrategia de la  $E_2$

$$\max u_1(q_1, R_2(q_1)) = q_1[a - c - q_1 - R_2(q_1)] = \frac{q_1(a - q_1 - c)}{2}$$

Y bajo la condición de primer orden sobre la variable  $q_1$ , se tiene:

$$\partial u_1(q_1, R_2(q_1))/\partial q_1 = 0$$

Se obtiene que  $\frac{a - 2q_1 - c}{2} = 0$ , deduciendo que  $q_1 = \frac{a - c}{2}$ , y bajo la condición de segundo orden se tiene que  $\partial^2 u_1(q_1, R_2(q_1))/\partial q_1^2 = -1 < 0$

Por tanto, la decisión de las cantidades por producir de la  $E_1$  son:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2}$$

La función de respuesta de la  $E_2$ , converge a la decisión de  $E_1$ , por tanto

$$R_2(q_1^*) = \frac{a-q_1^*-c}{2} = \frac{a-c}{4}$$

En ese orden de ideas, las cantidades de producción para cada empresa son:

$$E_1 = \frac{a-c}{2} \qquad E_2 = \frac{a-c}{4}$$

Por último, la estrategia de inversión bajo el equilibrio de Nash es:

$$s^* = (s_1^* = q^*, s_2^* = R_2)$$

Es decir, la estrategia de la  $E_1$  es la cantidad  $q_1^*$ , mientras que las cantidades de la  $E_2$  están en función de la respuesta a la producción de la  $E_1$ ,  $R_2(q_1)$ , por tanto, las cantidades estratégicas de producción serán:

$$q_1^* = \frac{a-c}{2} \qquad y \qquad q_2^* = \frac{a-c}{4}$$

## Anexo B. Desarrollo del modelo

### 4.1. Supuestos por edad de mora

Cuadro 2: Supuestos

Rango	# Obligaciones	Saldo en mora	% Efectividad	Recaudo	Comisión	Margen %
1-30	3.798,46	16.670	63 %	10.563	3 %	66 %
30-60	1.129,29	4.690	33 %	1.529	5 %	66 %
60-90	660,71	2.497	7 %	171	9 %	59 %
90-120	506,50	1.943	3 %	65	13 %	55 %
120-180	414,13	1.606	5 %	80	15 %	58 %
180-360	364,29	1.706	2 %	40	16 %	49 %
Total Periodo	6.873,38	29.113	19 %	12.447	10 %	65 %

Cuadro 3: Índice Herfindahl-Hirschman (*HHI*)

<b>Compañía</b>	<b>Ingresos</b>	<b>% Participación</b>	<b>HHI</b>
Digitex Servicios Bpo&O S.A.	139.445	18,04 %	325
Aecsa	89.951	11,64 %	135
Covinoc	60.536	7,83 %	61
<b>Caso Simulado</b>	<b>79.938</b>	<b>10,34 %</b>	<b>107</b>
Refinancia	59.564	7,70 %	59
Konecta	58.609	7,58 %	57
Gestiones y Cobranzas S.A	54.955	7,11 %	51
Abc de Servicios S.A	33.957	4,39 %	19
People Contact S.A.S	28.449	3,68 %	14
Cobranza Nacional de Créditos Limitada	24.041	3,11 %	10
Interdinco	20.455	2,65 %	7
Serlefin	16.213	2,10 %	4
Grupo consultor andino S.A.	12.870	1,66 %	3
Mundial De Cobranzas S.A.S.	11.753	1,52 %	2
Solunion Colombia Servicios De Credito Ltda	11.200	1,45 %	2
Financreditos	10.701	1,38 %	2
C & C Services S.A.S.	9.932	1,28 %	2
Gesticobranzas	6.892	0,89 %	1
Crear Pais	6.084	0,79 %	1
Profitline	5.778	0,75 %	1
GSC outsourcing	4.310	0,56 %	0
Adcore	4.019	0,52 %	0
GF Cobranzas Jurídicas S.A.S	3.945	0,51 %	0
Hevaran	3.379	0,44 %	0
Visión gerencial	3.340	0,43 %	0
Cyc P Cobranzas y Cobradores Profesionales S.A.	3.288	0,43 %	0
Datascoring	2.553	0,33 %	0
Cyres de Colombia S.A.S.	2.122	0,27 %	0
Summa Valor S.A.S.	1.259	0,16 %	0
<b>Total</b>	<b>773.104</b>	<b>1</b>	<b>865</b>

## Anexo C. Cálculo WACC

El Weighted Average Cost of Capital (WACC), o costo medio ponderado del capital, es utilizado como tasa de descuento para valorar empresas o proyectos de inversión mediante el método del descuento de flujos de caja esperados; el cálculo del WACC tiene en cuenta el nivel de fondos propios, endeudamiento, costo financiero y tasa impositiva, por tanto, aborda todas las fuentes de recursos de la empresa; este se resume en la siguiente fórmula:

$$WACC = Ke * (E/(E + D)) + Kd * (1 - T) * (D/(E + D))$$

donde:

- $Ke$ : rentabilidad anual requerida por los accionistas o socios.
- $E$ : fondos propios.
- $D$ : endeudamiento financiero.
- $Kd$ : costo anual de la deuda financiera.
- $T$ : tasa de impuesto sobre beneficios.

Para su cálculo, todas las variables son conocidas de antemano excepto el costo de los fondos propios ( $Ke$ ), que se debe obtener aparte; para su obtención se utiliza el método *CAPM* (Capital Asset Pricing Model) el cual, como norma general, supone que existe una relación lineal entre el sector de pertenencia de la empresa y el mercado (Brealey *et al.*, 2007), siendo algunos sectores más volátiles que el mercado y otros menos volátiles, por tanto, la fórmula para obtener el coste del capital es la siguiente:

$$Ke = rf + [E[Rm] - rf] * \beta$$

donde:

- $rf$ : rentabilidad del activo sin riesgo.
- $E[Rm]$ : rentabilidad media del mercado.

- $\beta$ : riesgo de mercado de un activo.

Para determinar la  $r_f$  se toman activos emitidos por bancos centrales o países de alta calificación crediticia al mayor plazo posible para evitar la distorsión que suponen las decisiones de política monetaria y aspectos coyunturales. En cuanto a la  $E[Rm]$  se hace una proyección de la rentabilidad estimada para el conjunto del mercado lo suficientemente amplia en plazo (10 años) para evitar posibles distorsiones de corto plazo.

Por último, en cuanto al Beta ( $\beta$ ), es el comportamiento del sector de pertenencia de la empresa respecto al mercado en función de su comportamiento. Si, además, queremos determinar el efecto de Beta en función de la estructura financiera de la empresa deberemos obtenerla apalancada según la siguiente fórmula:

$$\beta_e = \beta_u \left( 1 + \frac{D(1 - T)}{E} \right)$$

Donde  $\beta_u$  es la Beta del sector de pertenencia de la empresa y  $\beta_e$  es la Beta de la propia empresa en función de su estructura de capital propio y financiación externa; en resumen, el cálculo, del WACC para el proyecto hipotético se encuentra en la figura 9.

Figura 9: Cálculo WACC

Cálculo de WACC		Cálculo Tasa Libre de Riesgo		Cálculo de Betas Apalancadas		WACC- Weighted Average Cost of Capital	
Parametros							
Risk Free	4,86%	Risk Free	4,86%	Beta Desapalancado	0,48	kd	10,54%
Riesgo País de Colombia	1,76%	Riesgo País de Colombia	1,76%	Relación D/E	1,17	Tasa Impositiva	34,00%
Risk Premium	8,60%	rf	6,62%	Tasa Impositiva	0,34	D/(D+E)	54,02%
Premium por tamaño de empresa	9,81%	<b>Costo del Equity - CAPM Modificado</b>		Beta Apalancado	0,85	Ke 2017	25,31%
Tasa Impositiva	34,00%	rf	6,62%	<b>Relación D/E Octubre 2017</b>		E/(D+E)	45,98%
Beta Desapalancado	0,48	Risk Premium	8,60%	Deuda (COPS MM)	54.759	<b>WACC a Diciembre</b>	<b>15,394%</b>
Inflación US	1,91%	Premium por tamaño de empresa	9,81%	Patrimonio (COPS MM)	46.611		
Inflación COL	3,18%	Beta apalancado	0,85	Capital Invertido	101.370		
Devaluación	1,25%	Ke - Sin Devaluación	23,76%	D/E	1,17		
		Ke	25,31%	Deuda %	54,02%		
				Patrimonio %	85,12%		

Fuente: elaboración propia.

## Anexo D. Sensibilidad en la inversión

Cuadro 4: Tabla de sensibilidad

	Down					Base	Up				
VP/PM(%)	<b>17</b>	<b>35</b>	<b>72</b>	<b>150</b>	<b>312</b>	<b>648</b>	<b>1.346</b>	<b>2.795</b>	<b>5.806</b>	<b>12.059</b>	<b>25.047</b>
<b>1</b>	(625)	(625)	(625)	(624)	(623)	(620)	(614)	(601)	(574)	(518)	(403)
<b>10</b>	(624)	(622)	(618)	(611)	(595)	(561)	(492)	(349)	(51)	568	1.854
<b>19</b>	(622)	(619)	(612)	(597)	(567)	(503)	(371)	(97)	472	1.655	4.111
<b>28</b>	(621)	(616)	(605)	(584)	(538)	(445)	(250)	155	996	2.741	6.368
<b>37</b>	(619)	(613)	(599)	(570)	(510)	(386)	(129)	407	1.519	3.828	8.624
<b>46</b>	(618)	(610)	(592)	(557)	(482)	(328)	(7)	659	2.042	4.914	10.881
<b>55</b>	(616)	(606)	(586)	(543)	(454)	(269)	114	911	2.565	6.001	13.138
<b>64</b>	(615)	(603)	(579)	(529)	(426)	(211)	235	1.162	3.088	7.088	15.394
<b>73</b>	(613)	(600)	(573)	(516)	(398)	(153)	357	1.414	3.611	8.174	17.651
<b>82</b>	(612)	(597)	(566)	(502)	(370)	(94)	478	1.666	4.134	9.261	19.908
<b>91</b>	(610)	(594)	(560)	(489)	(342)	(36)	599	1.918	4.657	10.347	22.165
<b>100</b>	(609)	(591)	(553)	(475)	(314)	22	720	2.170	5.181	11.434	24.421

Fuente: elaboración propia.

En el cuadro 4 se analiza la sensibilidad que presenta el proyecto en sus estados de alta, media y baja demanda (los cuales están multiplicados por los factores  $u$  y  $d$  como se muestra en la figura 3), junto con el impacto sobre el VP al incluir el costo de inversión (VPN) en un periodo de tiempo de 5 años, esto permite ampliar el análisis competitivo inicial, debido a que la figura 10 de sensibilidad muestra cómo la curva se traslada hacia la derecha entre mayor sea el poder de mercado, lo que significa que se acerca a una competencia monopolística; por el contrario, cuando el gráfico muestra que la curva del VPN se traslada hacia la izquierda, significa que su poder de mercado es casi nulo y no tiene incentivos para ejercer la opción porque el VPN es negativo, por lo que se infiere:

Escenario 1: poder de mercado equivalente al 1% en los estados expuestos, de donde se obtiene:

- Alta demanda: en este estado el VP que tiene el proyecto en el año 5 es equivalente a 25,0047; pero al incluir la participación de mercado



(1 %) el VP disminuye hasta 222, menos el costo de la inversión (626), el VPN se muestra negativo y equivalente a 403.

- Media demanda: el VP del proyecto es 648, sin embargo, al incluir el poder de mercado y el costo de la inversión el VPN es negativo e igual a 620.
- Baja demanda: el VP del proyecto es 17, sin embargo, al incluir el poder de mercado (1 %), menos el costo de la inversión 626 el VPN es negativo e igual a 625.

Por consiguiente, se puede inferir que la estrategia dominante en este escenario es no invertir debido que con cualquier participación de mercado la empresa presenta VPN negativos.

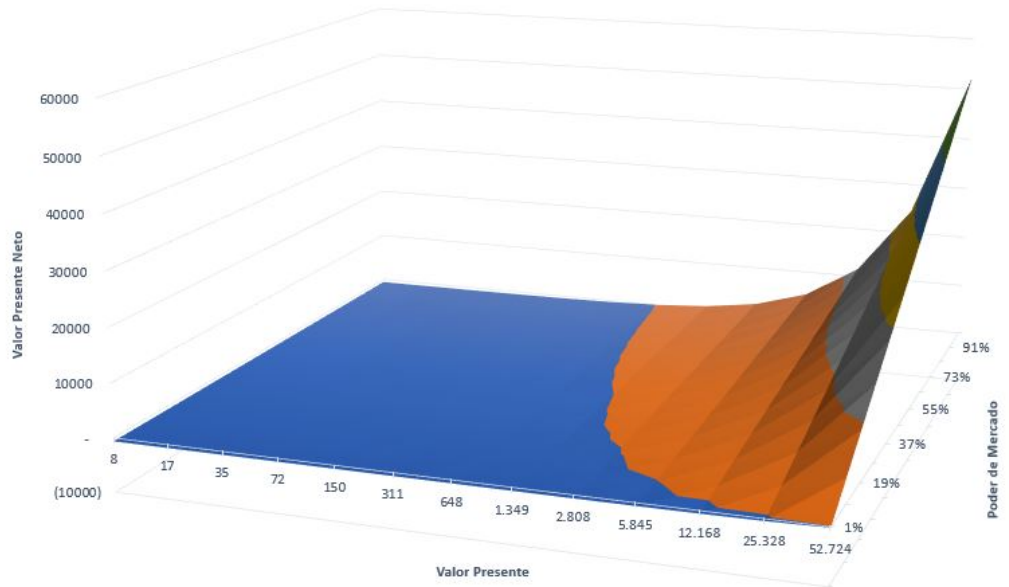
Escenario 2: poder de mercado equivalente al 100 % en los estados expuestos, de donde se obtiene:

- Alta demanda: en este estado el VP que tiene el proyecto en el año 5 es equivalente a 25,0047; pero al incluir la participación de mercado (100 %) el VP conserva su valor, menos el costo de la inversión 626, el VPN es positivo y equivalente a 24,421.
- Media demanda: el VP del proyecto es 648, sin embargo, al incluir el poder de mercado y el costo de la inversión el VPN es negativo e igual a 22.
- Baja demanda: el VP del proyecto es 17, sin embargo, al incluir el poder de mercado (100 %), menos el costo de la inversión (626) el VPN es negativo e igual a 609.

En este escenario, el jugador presenta un comportamiento monopolístico, debido a que absorbe toda la participación de mercado, por tanto, tiene una estrategia dominante en los estados de alta y media demanda de inversión, sin embargo, en baja demanda su VPN es negativo, por tanto, la estrategia dominante es no invertir.

En síntesis, en la figura 10 se pueden ver todos los escenarios posibles, lo que permite analizar las implicaciones que genera el grado de participación del mercado sobre una inversión, junto con la estrategia posible que se puede tomar sobre la misma.

Figura 10: Sensibilidad en la inversión



Fuente: elaboración propia.