

Optimización robusta de portafolios: conjuntos de incertidumbre y contrapartes robustas

**Robust Portfolio Optimization:
Uncertainty Sets and Robust Counterparts**

Carlos Andrés Zapata Q.*

* Magíster en Finanzas. Docente-Investigador, Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas (ODEON), Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [carlosa.zapata@uexternado.edu.co]; [ORCID ID: 0000-0003-3337-0182].

Artículo recibido: 10 de junio de 2021.

Artículo aceptado: 28 de junio de 2021.

Para citar este artículo:

Zapata Quimbayo, C. A. (2021). Optimización robusta de portafolios: conjuntos de incertidumbre y contrapartes robustas. ODEON, 20, 93-121.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n20.04>.

Resumen

Los modelos de optimización robusta (OR) han permitido superar las limitaciones del modelo media-varianza (MV), que comprende el enfoque tradicional para la selección de portafolios óptimos de inversión, al incorporar la incertidumbre de los parámetros del modelo (retornos esperados y covarianzas). En este trabajo se presentan los desarrollos de la OR en la teoría de portafolio mediante el enfoque del peor de los casos, a partir del cual se incorporan las formulaciones robustas para el modelo MV, teniendo en cuenta los trabajos de Markowitz y Sharpe. A partir de estas formulaciones, se lleva a cabo una sencilla aplicación en la que se resaltan las ventajas y bondades de las contrapartes robustas frente al modelo MV original. Al final, se presenta una breve discusión de formulaciones adicionales en materia de conjuntos de incertidumbre y otras medidas de desempeño.

Palabras clave: portafolio óptimo; optimización robusta; conjuntos de incertidumbre.

Clasificación JEL: C61, G11.

Abstract

Robust optimization (OR) models have made it possible to overcome the limitations of the mean-variance (MV) model, which involves the traditional approach for the optimal portfolio selection, by incorporating the uncertainty of the model parameters (expected returns and covariances). In this paper, the OR advances in portfolio theory are presented using the worst-case approach, from which the robust formulations for the MV model are incorporated, considering the Markowitz and Sharpe works. From these formulations, a straightforward application is implemented where the advantages and benefits of the robust counterparts are highlighted compared to the original MV model. At the end, a brief discussion of additional formulations regarding uncertainty sets and other performance measures is presented.

Key words: optimal portfolio; robust optimization; uncertainty sets.

JEL classification: C61, G11.

Introducción

La publicación del trabajo seminal de Harry Markowitz en 1952 marcó el inicio de la teoría moderna de portafolio (TMP). Allí, Markowitz introduce una solución óptima para la selección de un portafolio de inversión dada la naturaleza

estocástica de los retornos de los activos riesgosos¹. Para ello, consideró que el inversionista, como un agente racional, asigna su riqueza a los activos según el retorno esperado de estos y su medida de riesgo². El supuesto que subyace a esta construcción es que los inversionistas se comportan de manera razonable al maximizar el retorno esperado o minimizar el riesgo del portafolio, teniendo en cuenta la correlación (o covarianza) que hay entre los activos. Estos elementos definen el modelo media-varianza (MV) y constituyen la base fundamental para la construcción de portafolios óptimos de inversión en un contexto de optimización determinística.

Desde el trabajo de Markowitz, el modelo MV ha sido la solución dominante al problema de selección de portafolios y abrió un amplio campo de investigación que se extiende a la teoría de valoración de activos financieros bajo una estructura de equilibrio, donde se identifican los trabajos de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), así como desarrollos para la construcción de portafolios teniendo en cuenta, dentro del mismo marco de análisis, la solución óptima para el portafolio tangente (Sharpe, 1964 y 1970), así como otras medidas de riesgo (Treyner, 1965; Elton *et al.*, 1976; Sortino y Price, 1994); e incluso la redefinición del problema de optimización para considerar costos de transacción (Blog *et al.*, 1983; Bertsimas *et al.*, 1999) y otras medidas de desempeño (Keating y Shadwick, 2002; Choueifaty y Coignard, 2008).

Todos estos desarrollos se dan gracias a los avances en la modelización matemática y la implementación de técnicas computacionales de optimización. Sin embargo, son notables las limitaciones que se encuentran en la solución óptima que proporciona el modelo MV, así como algunas de las extensiones anteriores. Por ejemplo, Michaud (1989), Best y Grauer (1991), Black y Litterman (1991, 1992) y Chopra y Ziemba (1993) encontraron que:

1. El portafolio MV óptimo presenta una alta sensibilidad frente a los parámetros considerados (retornos esperados y covarianzas), lo cual involucra altos errores de estimación. Aunque el modelo MV asume la distribución de probabilidad de los retornos bajo la presunción de normalidad, en el modelo de optimización

1 Este modelo de Markowitz representa un marco de análisis para la toma de decisiones óptimas de inversión bajo incertidumbre.

2 Para realizar estas estimaciones se utilizan datos históricos.

solo se consideran las estimaciones de retornos esperados y covarianzas³. Sin embargo, los parámetros se estiman a partir de datos históricos, por lo que están sujetos a la incertidumbre futura.

Black y Litterman (1991, 1992) demostraron que la solución óptima del modelo MV es muy sensible a los cambios en los parámetros de entrada, lo cual genera soluciones inestables e inconsistentes. Por su parte, Chopra y Ziemba (1993) señalaron que pequeños cambios en los parámetros estimados pueden generar portafolios “óptimos” totalmente diferentes.

2. Los portafolios óptimos presentan un desempeño fuera de la muestra deficiente o muy pobre. Best y Grauer (1991) y Chopra y Ziemba (1993) demostraron que el hecho de no reconocer la incertidumbre en los parámetros afecta sustancialmente el desempeño futuro de la solución óptima del portafolio, lo cual se traduce en altas pérdidas.
3. El modelo MV tiende a generar portafolios “óptimos” muy concentrados, ya que pondera significativamente aquellos activos que tienen altos retornos esperados y correlaciones (o covarianzas) bajas o negativas. De forma similar, Kolm *et al.* (2014) encontraron que los activos con grandes retornos esperados y desviaciones estándar bajas están sobrevalorados por el modelo MV, en comparación con sus pesos de referencia; mientras que los activos con retornos esperados bajos y altas desviaciones estándar están subvalorados. De esta forma, entre mayor sea el error de estimación, mayor será el impacto en los pesos optimizados.

Por otra parte, Pachamanova y Fabozzi (2012) afirman que los retornos esperados presentan una variación temporal significativa a lo largo del tiempo, es decir, presentan no estacionariedad. Ellos encontraron que los retornos de los activos se ven afectados por los cambios en las dinámicas de los mercados y por las condiciones económicas, así como por cambios en las tasas de interés, el entorno político, la confianza del consumidor, entre otros. En consecuencia, los retornos históricos pueden generar malos pronósticos de los retornos futuros. De forma análoga, la matriz de covarianzas es inestable en el tiempo. Por tanto, los autores sugieren que la incertidumbre de estos parámetros debe ser considerada en la optimización del portafolio.

3 El supuesto subyacente del modelo MV es que los parámetros representan la incertidumbre inherente de los retornos futuros de los activos y, por tanto, del portafolio de inversión.

En la práctica se encuentran diferentes técnicas que se pueden utilizar para modificar (o robustecer) las estimaciones históricas de los parámetros del modelo MV⁴. Por ejemplo, se pueden utilizar métodos estadísticos para encontrar estimadores menos sensibles a los errores de estimación, como son los bayesianos y de contracción. Una propuesta interesante se encuentra en la técnica de contracción de Ledoit y Wolf (2003) que tiene como objetivo generar estimaciones robustas de la matriz de covarianzas, basado en la estimación de contracción Bayes-Stein⁵, una técnica formulada por James y Stein (1961).

También se puede emplear información adicional para actualizar las estimaciones históricas, basado en un contexto de actualización bayesiana mediante criterios subjetivos, por ejemplo, en función de las expectativas u opiniones del inversionista (*views*). En este contexto, se encuentra el modelo Black-Litterman (BL) construido por Black y Litterman (1991, 1992). El modelo BL proporciona un marco bayesiano intuitivo para la selección de portafolios de inversión al combinar las *views* con la estimación de los retornos de equilibrio que proporciona el modelo CAPM (Capital Asset Pricing Model). Además de esta versión canónica del modelo BL, también se encuentran contribuciones importantes en los trabajos de He y Litterman (1999), Idzorek (2007) y Meucci (2008, 2009) que mejoran el modelo BL.

Estos desarrollos dentro del enfoque bayesiano han tenido una gran acogida gracias a su formulación intuitiva. Sin embargo, en las últimas dos décadas también se ha popularizado un enfoque de optimización que proporciona estimaciones robustas al considerar la incertidumbre tanto de los retornos como de la matriz de covarianzas. Este enfoque se conoce como optimización robusta (OR) de portafolio. La OR es un enfoque de optimización bajo incertidumbre

4 Kolm *et al.* (2014), al revisar los desarrollos de optimización de portafolios en los últimos 60 años, muestran la importancia de incorporar herramientas robustas para la selección de portafolios óptimos.

5 Aunque esta técnica hace parte del enfoque bayesiano para la construcción de portafolios óptimos, al igual que el modelo Black-Litterman, la técnica de contracción de Ledoit-Wolf en esencia tiene un fundamento diferente: la estimación se forma reduciendo una estimación previa observada de la estimación muestral (o poblacional) hacia un estimador actualizado, que incorpora información adicional para, de esta forma, obtener una estimación posterior que proporciona una matriz de covarianzas regularizada. La estimación posterior se obtiene a partir de una ponderación que está determinada por el factor de contracción, teniendo en cuenta la distribución de los datos observados o información adicional.

basada en *sets* (o conjuntos) de información⁶ y representa una forma intuitiva y eficiente de lidiar con la incertidumbre de los parámetros al incorporar información adicional de las estimaciones puntuales de los retornos esperados y de sus covarianzas (Pachamanova y Fabozzi, 2012).

El enfoque OR para la selección de portafolio fue introducido por El Ghaoui *et al.* (1997) y Ben-Tal y Nemirovski (1998), y considera que los retornos esperados de los activos son variables aleatorias, al igual que el modelo BL, y permite obtener el portafolio óptimo cuando los parámetros se desvían de la estimación dentro de algún conjunto posible de información que se denomina conjunto de incertidumbre. En este contexto, Ben-Tal y Nemirovski (1998) introducen un número importante de formulaciones y proveen un análisis detallado del enfoque OR y su implementación utilizando programación lineal y programación convexa. Posteriormente, Goldfarb e Iyengar (2003) presentaron formulaciones robustas para el modelo MV y para el valor en riesgo (VaR) del portafolio, utilizando conjuntos de incertidumbre elipsoidales, mientras que Tütüncü y Koenig (2004) consideraron conjuntos de incertidumbre de intervalo para los retornos esperados y en la matriz de covarianzas.

A partir de estos trabajos se presenta un crecimiento importante en la literatura de OR con desarrollos notables para robustecer las soluciones del modelo MV (Garlappi *et al.*, 2007), o sus extensiones usando medidas de riesgo basadas en el VaR y el valor en riesgo condicional (CVaR) (El Ghaoui *et al.*, 2003; Zhu y Fukushima, 2009; Zymmler *et al.*, 2013), así como medidas de desempeño (Kapsos *et al.*, 2014; Sharma *et al.*, 2017); factores sistemáticos de riesgo (Kim *et al.*, 2013, 2018); entre otros. Además, aunque la implementación de modelos robustos para la optimización de portafolio ha representado grandes desafíos, como afirman Bertsimas *et al.* (2011) y Kim *et al.* (2018), los avances en el campo de la programación matemática y en el uso de herramientas computacionales han impulsado la práctica de este enfoque (Fabozzi *et al.*, 2007; Kolm *et al.*, 2014; Kim *et al.*, 2018).

A diferencia de los modelos bayesianos, la OR ofrece una solución intuitiva que puede implementarse mediante programación convexa (programación

6 La OR está relacionada con otros métodos de optimización bajo incertidumbre, como la optimización estocástica que considera que la incertidumbre puede describirse mediante distribuciones de probabilidad definidas correctamente, mientras que la OR considera la solución óptima (o factible) para cualquier realización de la incertidumbre en un conjunto definido bajo un marco determinístico (Xidonas *et al.*, 2020).

lineal, cuadrática o de cono de segundo orden—SOCP, por sus siglas en inglés), teniendo en cuenta las especificaciones de los conjuntos de incertidumbre y las restricciones del problema. El presente trabajo aborda los desarrollos de la OR y muestra algunas formulaciones robustas para el modelo MV y la forma de resolver el problema de selección de portafolio usando conjuntos de incertidumbre de intervalo y de tipo elipsoidal.

Este trabajo se encuentra organizado en 5 secciones. En la sección 1, se presentan los fundamentos teóricos del modelo MV para la selección de portafolios y sus limitaciones. En la sección 2 se introduce el enfoque de optimización robusta (OR) de portafolios, los tipos de los conjuntos de incertidumbre y la construcción de las contrapartes robustas del modelo MV. En la sección 3 se lleva a cabo una implementación de los modelos a partir de un ejercicio comparativo para el modelo MV y sus contrapartes robustas. Luego, en la sección 4 se presenta una discusión sobre el alcance del enfoque de OR y algunas extensiones teniendo en cuenta otras formas de conjunto de incertidumbre y medidas de desempeño. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

1. Selección de portafolio: el modelo mv y la noción de equilibrio

Markowitz (1952) introduce una solución óptima para la selección de un portafolio de inversión conformado por activos riesgosos, teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de los retornos de estos activos. En este sentido, considera como insumos al modelo de portafolio el retorno esperado de los activos ($E(R_i) = \mu_i$) y su medida de riesgo que está determinada por las covarianzas (Σ) de los activos, bajo la presunción de normalidad en los retornos (Romero, 2010). El problema formulado por Markowitz contempla a un inversionista averso al riesgo⁷ que tiene que escoger un portafolio óptimo conformado por n activos riesgosos que representan el conjunto de oportunidades de inversión disponible en el mercado de capitales. Además, esta formulación se puede representar como un problema de minimización de la varianza del portafolio como muestra la ecuación (1). De esta forma, si el portafolio de inversión tiene un retorno esperado determinado

7 Además, Markowitz (1959) asume que este inversionista es un agente racional que solo se preocupa por el retorno esperado del activo y su riesgo, los cuales se asumen conocidos.

por $E(R_p) = w'\mu = \mu_0$ y una varianza igual a $\sigma_p^2 = w'\Sigma w$, entonces, el problema de optimización, considerando las restricciones, puede formularse como:

$$\min_w w'\Sigma w \quad (1)$$

$$\text{s. a. } w'1 = 1 \text{ y } w'\mu = \mu_0$$

Donde: $w \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ denota el vector de pesos de los n activos riesgosos que componen el portafolio; $\Sigma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ representa la matriz de covarianzas; $\mu \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ el vector de retornos esperados $[E(R_i)]$ de los activos; y $1 \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector de unos. El problema descrito en la ecuación (1) incorpora dos restricciones:

1. $w'1 = 1$ indica que la sumatoria de los pesos de los activos que componen el portafolio debe ser igual a 1 (o 100%).
2. μ_0 representa el retorno esperado del portafolio de varianza mínima.

Si la segunda restricción no se tiene en cuenta, se obtiene el portafolio de mínima varianza global (MV-Markowitz o PMVG). Además, una formulación adicional del problema de optimización puede incorporar restricciones en el signo de los pesos. Por ejemplo, si las ventas en corto están prohibidas en el mercado, se puede agregar la restricción de que los pesos de los activos deben ser no negativos, es decir, $w_i \geq 0$. Con todas estas restricciones, el portafolio MV óptimo se resuelve como un problema determinístico utilizando programación cuadrática (QP, por sus siglas en inglés)⁸ (Francis y Kim, 2013; Kolm *et al.*, 2014).

Además, si el problema de optimización contempla el vector de retornos esperados para μ_0 , el cual admite representar todos los retornos factibles dado el conjunto de oportunidades de inversión, esta solución permite obtener toda la frontera eficiente (FE) de Markowitz. Este problema clásico de selección de portafolio representa el inicio de un campo de investigación que se extiende a la valoración de activos financieros, donde se identifican los trabajos pioneros de Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966). En este marco, la solución

8 No obstante, se pueden incorporar restricciones adicionales que vuelven más complejo el problema formulado. Para resolver este tipo de problemas se requieren aproximaciones algorítmicas más flexibles, que pueden resolverse utilizando métodos numéricos.

óptima de portafolio vincula al portafolio tangente, el cual representa la mejor asignación de activos riesgosos en presencia del activo libre de riesgo (r_f). En términos generales, el problema de optimización formulado inicialmente por Sharpe puede representarse como:

$$\max_w \frac{(\mu - r_f)1}{\sqrt{w' \Sigma w}} \quad s.a. w'1 = 1 \quad (2)$$

Donde la función objetivo indicada se conoce como el coeficiente de Sharpe (ϑ). Una versión simple del problema descrito en (2), por ejemplo, una formulación general considerando pesos negativos puede resolverse de forma analítica (ver Francis y Kim, 2013, para más detalles). De igual forma, en (2) se puede agregar la restricción de pesos no negativos ($w_i \geq 0$).

Por otra parte, este problema de optimización también puede representarse como un problema de maximización de la relación *trade-off* entre el retorno esperado del portafolio ($\mu'w$) y su varianza ($w'\Sigma w$). De acuerdo con Fabozzi *et al.* (2007) y Francis y Kim (2013), esta versión adopta la forma cuadrática de la función de utilidad, siguiendo lo indicado por Markowitz (1959), como muestra la ecuación (3).

$$\max_w \{w'\mu - \lambda w'\Sigma w\} \quad s.a. w'1 = 1 \quad (3)$$

Donde λ se define como la medida (o coeficiente) de aversión al riesgo. La solución óptima de este problema descrito en (3) es equivalente a la optimización del coeficiente de Sharpe (ϑ) si se considera un coeficiente de aversión al riesgo determinado por

$$\lambda = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M^2} \quad (4)$$

De ahora en adelante nos referiremos a este modelo como MV-Sharpe. Por otra parte, la solución del problema descrito en las expresiones (2) o (3) comprende el insumo principal para la construcción del modelo de valoración CAPM, el cual viene determinado por la ecuación (5).

$$E(R_i) = r_f + \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (5)$$

Donde: $E(R_i)$ denota el retorno esperado del activo i y $E(R_M)$ es el retorno esperado del portafolio de mercado. Además, $\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$ es la medida de riesgo sistemático de cada activo i , donde σ_M^2 es la varianza del portafolio de mercado. El modelo CAPM permite estimar el retorno esperado (de equilibrio) de cualquier activo i que haga parte del portafolio de mercado teniendo en cuenta la medida de riesgo sistemático, la cual muestra una relación directa entre esta y el retorno esperado. Ahora, teniendo en cuenta el modelo CAPM, si se define π_i como el retorno de equilibrio del activo i , expresado como exceso respecto a la tasa r_f , la ecuación (5) puede reescribirse como:

$$\pi_i = \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (6)$$

Al reemplazar los componentes de la medida de riesgo β_i , se tiene

$$\pi_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2} [E(R_M) - r_f] \quad (7)$$

Dado que $E(R_M)$ se obtiene al ponderar los n activos del portafolio de mercado teniendo en cuenta su peso w_i , es decir, $E(R_M) = \sum_{i=1}^n E(R_i)w_i$, entonces la ecuación (7) puede expresarse como:

$$\pi_i = \frac{E(R_M) - r_f}{\sigma_M^2} \sum_{i=1}^n Cov(R_i, R_j)w_i \quad (8)$$

Finalmente, la ecuación (8), en forma matricial, viene dada por:

$$\pi = (\lambda \Sigma)w \quad (9)$$

De esta forma se obtienen los retornos esperados de equilibrio. Al despejar el vector w de la ecuación (9), se encuentra también la solución para el portafolio tangente (w_{MV}):

$$w_{MV} = (\lambda \Sigma)^{-1} \pi \quad (10)$$

A pesar de los desarrollos que representa el modelo MV, se identifican limitaciones importantes que fueron resaltadas arriba, entre ellas, el hecho de que el modelo MV ignora por completo la incertidumbre de los retornos esperados y de la matriz de covarianzas. Para superar esta limitación, se presentan diferentes propuestas alternativas que expanden el campo de investigación en teoría de portafolio y comprenden los enfoques de optimización robusta que serán tratados a continuación.

2. Optimización robusta de portafolio

De acuerdo con Pachamanova y Fabozzi (2012), la optimización robusta (OR) representa una forma intuitiva y eficiente de lidiar con la incertidumbre de los parámetros. Para ello, la OR utiliza conjuntos de incertidumbre que contienen información adicional a las estimaciones puntuales de los retornos esperados de los activos (μ) y sus covarianzas (Σ). De esta forma, el problema de optimización robusta se resuelve para todo el conjunto de incertidumbre, incluso si μ toma su peor valor posible. Este enfoque se conoce como el peor de los casos (*worst-case*). Dado que la contraparte robusta del problema original de optimización se puede formular como un problema con infinitas restricciones⁹, este puede no tener solución (Kim *et al.*, 2018). Por tanto, la OR puede imponer el enfoque del peor de los casos en el que solo se observa la peor realización (o escenario) dentro del conjunto de incertidumbre para encontrar la solución óptima.

La implementación de este enfoque de OR se realiza a partir de la formulación de problema de tipo *máximo-mínimo* (o *mínimo-máximo*) que busca las ponderaciones óptimas de cada activo dentro del portafolio cuando los retornos (inciertos) toman el peor valor dentro del conjunto de incertidumbre especificado, de tal forma que el valor de la función objetivo también es el peor de todos los posibles escenarios (Fabozzi *et al.*, 2007; Pachamanova y Fabozzi, 2012; Kim *et al.*, 2018). Así, al tener en cuenta la incertidumbre en la función objetivo en la optimización, la OR proporciona una solución más consistente en comparación

9 En otras palabras, las restricciones estrictas con parámetros inciertos se pueden expresar agregando una restricción para cada realización del conjunto de incertidumbre.

con el modelo MV. Para llevar a cabo esta implementación se recomiendan los siguientes pasos:

1. Formular el problema de optimización robusto definiendo un conjunto de incertidumbre. Esta formulación requiere, por tanto, definir un tipo particular del conjunto de incertidumbre.
2. Reformular la contraparte robusta del problema en una forma estándar de programación convexa (CVX)¹⁰. Este procedimiento puede derivar en formas de programación de tipo lineal, cuadrática o SOCP.
3. Utilizar el optimizador para resolver el problema robusto reformulado.

Este procedimiento permite resolver el problema que determina la peor realización posible de los parámetros inciertos definidos en el conjunto de incertidumbre, antes de resolver el problema original de selección óptima del portafolio. Para entender mejor el enfoque se presentan a continuación los tipos de conjuntos de incertidumbre y la construcción de la contraparte robusta.

2.1. Conjuntos de incertidumbre para los retornos esperados

En la literatura sobre OR se han estudiado, principalmente, dos tipos de conjuntos de incertidumbre (Fabozzi *et al.*, 2007):

1. Conjunto de incertidumbre de intervalo.
2. Conjunto de incertidumbre elipsoidal.

Ambos tipos de conjuntos pueden definirse sobre los retornos esperados (μ) y en la matriz de covarianzas (Σ). Por ejemplo, un conjunto de incertidumbre puede definirse como un intervalo de confianza¹¹ alrededor de cada retorno esperado. Esta formulación se conoce como conjunto de incertidumbre de intervalo. También es posible formular conjuntos de incertidumbre más completos que incorporan información adicional sobre el error de estimación. Este es el caso del conjunto de incertidumbre de tipo elipsoidal que toma en consideración las covarianzas de los errores de estimación. Ambas formas de conjuntos se detallan a continuación.

¹⁰ Esta herramienta está disponible para MATLAB, Python, R y Julia, entre otros.

¹¹ O intervalo de credibilidad en el contexto bayesiano.

2.1.1 Conjunto de incertidumbre de intervalo

La formulación más simple para incorporar la incertidumbre de los parámetros del modelo consiste en asumir que los retornos de los activos estimados $(\hat{\mu}_1, \dots, \hat{\mu}_n)$ “no” son significativamente diferentes de sus verdaderos valores (μ_1, \dots, μ_n) . Para ello, siguiendo a Tütüncü y Koenig (2004) y Fabozzi *et al.* (2007), se puede definir el siguiente conjunto de incertidumbre para los retornos:

$$U_\mu = \left\{ \mu \mid |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i; \quad \forall i = 1, \dots, n \right\} \quad (11)$$

Donde: U_μ se define como el conjunto de incertidumbre de μ para cada activo; δ_i es el límite que define la dispersión máxima aceptable entre los retornos estimados y su verdadero valor. Además, cada elemento de δ_i controla el retorno esperado de cada activo, por tanto, su valor debe calcularse individualmente. Por ejemplo, si se asume que los retornos del activo se distribuyen de la forma $R_i \sim_{iid} N(\mu_i, \sigma_i)$, entonces, δ_i viene determinado por:

$$\left(\hat{\mu}_i - \frac{Z_{\alpha/2} \sigma_i}{\sqrt{T}}; \hat{\mu}_i + \frac{Z_{\alpha/2} \sigma_i}{\sqrt{T}} \right) \quad (12)$$

Así, todos los posibles retornos de cada activo i vienen dados por el siguiente intervalo:

$$\left(\hat{\mu}_i - \delta_i \leq \mu_i \leq \hat{\mu}_i + \delta_i \right) \quad (13)$$

A pesar de la simplicidad en su formulación, el conjunto de incertidumbre de intervalo no considera las correlaciones entre los retornos de los activos. Esta limitación puede superarse mediante la adopción de otros conjuntos de incertidumbre para los retornos o la incorporación de conjuntos de incertidumbre para la matriz de covarianzas.

2.1.2 Conjunto de incertidumbre de tipo elipsoidal

El conjunto de incertidumbre elipsoidal, también conocido como conjunto de incertidumbre cuadrático, permite incluir información del segundo momento de la distribución de los parámetros inciertos (Fabozzi *et al.*, 2007; Yin *et al.*,

2021). De esta forma, para los retornos se tiene la siguiente configuración del conjunto de tipo elipsoidal:

$$U_{\mu} = \left\{ \mu \mid (\mu_i - \hat{\mu}_i)' \Sigma_{\mu}^{-1} (\mu_i - \hat{\mu}_i) \leq \delta_i^2 \right\} \quad (14)$$

Donde: Σ_{μ} representa la matriz diagonal de covarianzas de los errores de estimación de los retornos esperados o matriz de incertidumbre; δ_i es el parámetro que controla el tamaño del elipsoide. Ahora, si se asume que μ sigue una distribución normal multivariada, entonces, $(\mu_i - \hat{\mu}_i)' \Sigma_{\mu}^{-1} (\mu_i - \hat{\mu}_i)$ se estima como una distribución χ^2 con n grados de libertad, tal que δ_i viene determinado por el α -ésimo percentil de la distribución χ^2 . Además, $\hat{\mu}_i$ se puede estimar como la media aritmética de la muestra de retornos de los activos.

De las dos formulaciones anteriores, se puede intuir que la incertidumbre de intervalo puede generar soluciones de esquina o portafolios altamente concentrados, al igual que el modelo MV original, debido a su formulación más conservadora (Fabozzi *et al.*, 2007, mientras el conjunto de incertidumbre elipsoidal supera esta limitación como indican Goldfarb e Iyengar (2003), Fabozzi *et al.* (2007) y Georgantas *et al.* (2021). Por esta razón, es mucho más recomendable el uso de un conjunto de incertidumbre elipsoidal (o cuadrático). Sin embargo, el lector debe tener presente que estos no son las únicas formas de conjuntos de incertidumbre, existen muchas formulaciones adicionales, aunque estas son más complejas.

2.2 Contrapartes robustas

2.2.1 Modelo MV robusto con incertidumbre de intervalo

El paso número 2 indicado atrás requiere reformular el problema de optimización original en una contraparte robusta. La construcción de esta contraparte depende de la función objetivo y del conjunto de incertidumbre que se adopte. Por ejemplo, al considerar la formulación de la función de utilidad para el modelo MV-Sharpe, se tiene:

$$\max_w \{ w' \mu - \lambda w' \Sigma w \} \text{ s. a. } w' 1 = 1 \quad (15)$$

y, además, se toma un conjunto de incertidumbre de intervalo para los retornos de la forma indicada en la ecuación (11), tal que U_μ se introduce al problema de optimización, entonces la contraparte robusta del problema original indicado en (15) puede expresarse como:

$$\max_w \left\{ \min_{\{\mu \in U_\mu \mid |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i\}} (w' \mu) - \lambda w' \Sigma w \right\} \text{ s. a. } w' 1 = 1 \quad (16)$$

Este problema es del tipo *máximo-mínimo*. Esta versión robusta muestra que, si las estimaciones de retornos esperados de un activo son poco precisas, es decir, tienen un alto error de estimación, entonces este activo se penaliza en la función objetivo y tendrá un peso menor en el portafolio óptimo. Además, en la ecuación (16), el conjunto U_μ definido en forma de intervalo contiene valores de los retornos esperados de cada activo cercanos μ . De esta forma, al asignar una ponderación (w_i) a cada uno de los activos, el peor retorno del activo i puede representarse como

$$(\hat{\mu}_i w_i - \delta_i w_i) \text{ si } w_i > 0; \text{ y}$$

$$(\hat{\mu}_i w_i - \delta_i w_i) \text{ en otro caso}$$

Por lo que la expresión del retorno en el peor caso puede expresarse como $\hat{\mu}_i w_i - \delta_i |w_i|$, donde $|w_i|$ denota el valor absoluto de los pesos de cada activo. De esta forma, la versión robusta puede reescribirse como:

$$\max_w \{w' \mu - \lambda w' \Sigma w - \delta |w|\} \text{ s. a. } w' 1 = 1 \quad (17)$$

La ecuación (17) es equivalente al problema definido en (18), sin embargo, se debe tener presente que el problema se transformó de *máximo-mínimo* a solo un problema de *máximo*. Así, robustecer el problema de optimización original del modelo MV-Sharpe, al incorporar información adicional sobre la incertidumbre en las estimaciones de los retornos esperados, tiene la misma complejidad computacional del problema original.

Por otra parte, el efecto de la robustez introducida en (19) puede identificarse de dos formas. Primero, se puede ver que los retornos esperados con alto error de estimación se ajustan a la baja en la función objetivo del problema¹². Además, el término adicional en la función objetivo ($\delta|w|$) se puede interpretar como un término similar al riesgo ($\lambda w' \Sigma w$) ya que representa una penalización por el error de estimación. El tamaño de la penalización está determinado por la aversión del inversionista al riesgo de estimación.

2.2.2 Modelo MV robusto con incertidumbre elipsoidal

De forma análoga, la contraparte robusta del problema indicado en (15) puede definirse para un conjunto de incertidumbre para los retornos de tipo elipsoidal de la siguiente forma:

$$\max_w \left\{ \min_{\{\mu \in \{\mu | (\mu_i - \hat{\mu}_i)' \Sigma_{\mu}^{-1} (\mu_i - \hat{\mu}_i) \leq \delta^2\}\}} w' \mu - \lambda w' \Sigma w \right\} \text{ s. a. } w' 1 = 1 \quad (18)$$

Ahora, en lugar de encontrar el peor de los casos para el intervalo definido sobre cada activo, se debe identificar el peor de los casos en general con un conjunto de incertidumbre elipsoidal. La versión robusta del problema en este caso puede formularse como indica la ecuación (19).

$$\max_w \left\{ w' \mu - \lambda w' \Sigma w - \delta \sqrt{w' \Sigma_{\mu} w} \right\} \text{ s. a. } w' 1 = 1 \quad (19)$$

Aquí, el término $\delta \sqrt{w' \Sigma_{\mu} w}$ puede interpretarse como la penalización para la estimación del riesgo¹³, dado que el conjunto de incertidumbre puede interpretarse como una región de confianza n -dimensional para μ definido por el error de estimación de la matriz de covarianzas. De acuerdo con Fabozzi *et al.* (2007),

12 Esta formulación robusta está muy relacionada con los métodos estadísticos de contracción señalados atrás.

13 El término $\delta \sqrt{w' \Sigma_{\mu} w}$ también puede ser reemplazado por $\|\Sigma_{\mu}^{1/2} w\|$, donde $\|\cdot\|_2$ denota la norma-2 euclidiana para el vector. Para obtener esta solución, la construcción de la contraparte robusta requiere, primero, usar el método lagrangiano para encontrar el valor de μ que maximiza la función objetivo.

en la práctica, se utilizan diferentes métodos para estimar la matriz Σ_{μ} . Los enfoques de estimación más simples consisten en usar solo la matriz diagonal que contiene las varianzas de las estimaciones (a diferencia de usar toda la matriz completa). Además, los enfoques estándar para estimar los retornos esperados, como métodos de regresión o estimaciones bayesianas, así como modelos multifactoriales, pueden generar estimaciones para la matriz Σ_{μ} . También se puede utilizar el estimador de contracción James-Stein.

Por otra parte, los problemas definidos en las expresiones (17) y (19) pueden verse como formas estándar de optimización convexa. Por ejemplo, Goldfarb e Iyengar (2003) encontraron que estos problemas pueden formularse como un programa SOCP y pueden resolverse fácilmente con optimizadores y con un bajo costo computacional. Asimismo, los autores encuentran que los conjuntos de incertidumbre anteriores pueden extenderse a formas más completas que van desde politopos¹⁴ hasta conjuntos cónicos más avanzados que pueden derivarse de procedimientos estadísticos. De forma similar, El Ghaoui *et al.* (1998) encontraron que las contrapartes robustas de los problemas de optimización con conjuntos de incertidumbre de tipo elipsoidal se pueden escribir como programa SOCP.

3. Implementación de los modelos

Los modelos descritos en la sección anterior, tanto en su forma original como en su versión robusta, se comparan mediante un ejercicio sencillo de evaluación de desempeño para una inversión hipotética. Los modelos analizados son: i) modelo MV original según las formulaciones de Markowitz (PMVG) y de Sharpe (MV-Sharpe); ii) versión robusta del modelo MV-Sharpe con conjunto de incertidumbre de intervalo (MVRI); y iii) versión robusta del modelo MV-Sharpe con conjunto de incertidumbre elipsoidal (MVRE).

3.1 Datos y periodos de análisis

Para probar el desempeño de los modelos se sigue el enfoque de separación en dos periodos de análisis: i) el análisis dentro de muestra que comprende

14 Por ejemplo, una forma poliédrica. La incertidumbre poliédrica puede verse como un caso especial de incertidumbre elipsoidal. Además, Goldfarb e Iyengar (2003) demostraron que si U_{μ} es de forma poliédrica, el problema se vuelve lineal y la contraparte robusta es equivalente a un problema de optimización lineal.

el periodo Ene-2013 a Dic-2019; ii) el análisis fuera de muestra comprende el periodo Ene-2020 a Dic-2020. Los datos de precios y retornos de los activos se toman de Yahoo Finance en periodicidad mensual para ambos periodos. El análisis comparativo se realiza para el conjunto de activos que comprenden el índice Dow Jones del mercado estadounidense. De los activos que incluye el índice, se escogen los 12 activos que cumplen los siguientes criterios:

1. Activos que superan un coeficiente de Sharpe mensual de 0,15. Esto evita incorporar aquellos activos con retornos esperados negativos o altas volatilidades.
2. Activos que tengan datos faltantes o que se hayan incorporado al índice después de enero de 2013¹⁵.

La tabla 1 presenta los activos seleccionados, junto con los cálculos mensuales de retornos esperados, volatilidad y el coeficiente de Sharpe.

Tabla 1: Composición del índice Dow Jones

#	Compañía	Símbolo	$E(R_i)$	σ_i	ϑ_i
1	McDonald's Corp.	MCD	0,012	0,0388	0,31
2	Home Depot Inc	HD	0,0167	0,0494	0,34
3	Honeywell Inc	HON	0,0145	0,0408	0,35
4	JPMorgan Chase & Co	JPM	0,0159	0,0576	0,28
5	Apple Inc	AAPL	0,0176	0,0746	0,24
6	Boeing Company	BA	0,0194	0,0716	0,27
7	Coca-Cola Company	KO	0,0076	0,0379	0,21
8	Procter & Gamble	PG	0,0098	0,0399	0,25
9	Johnson & Johnson	JNJ	0,0110	0,0413	0,27
10	Cisco Systems Inc	CSCO	0,0131	0,0595	0,22
11	Verizon Com/tions Inc	VZ	0,0079	0,0477	0,17
12	Intel Corporation	INTC	0,0152	0,0605	0,25

Fuente: Bloomberg (2021).

15 Por ejemplo, Dow Inc. no se toma en cuenta ya que este se incorpora al índice en abril de 2019.

Por otra parte, el periodo dentro de muestra comprende momentos tanto alcistas como bajistas, esto permite analizar el desempeño de los modelos de optimización de portafolios en diferentes condiciones del mercado financiero. Los datos de este periodo son los que se utilizan como insumos para resolver los modelos de optimización y construir los portafolios óptimos. Este ejercicio de optimización para cada modelo se implementa en R utilizando la librería CVXR¹⁶.

Además, el propósito de llevar a cabo el análisis fuera de la muestra es el de verificar la consistencia de los resultados obtenidos dentro de esta. Como este análisis comprende gran parte del periodo de crisis originada por la pandemia del covid-19, es interesante evaluar el comportamiento de estos portafolios óptimos, incluso su comparación con el índice de referencia (*Benchmark*).

3.2 Resultados para los portafolios óptimos

Para la evaluación de desempeño de los portafolios óptimos se utilizan los criterios de optimización (estándar) del modelo MV considerados en los modelos: el retorno esperado, la desviación estándar (volatilidad) de los retornos y el coeficiente de Sharpe (θ). Además, se emplea el indicador Drawdown que representa la máxima caída acumulada de los retornos en los dos periodos de análisis.

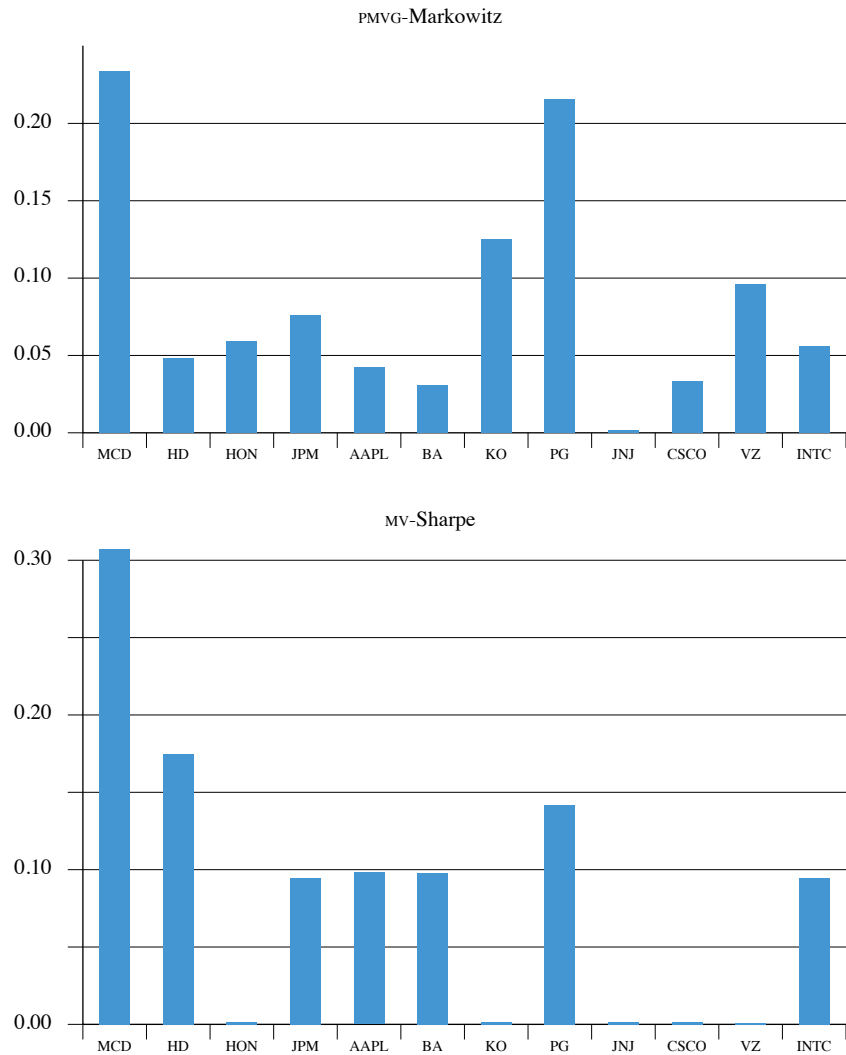
3.2.1 Composición de los portafolios y desempeño

Los resultados de la composición de los portafolios óptimos se resumen en la figura 1.

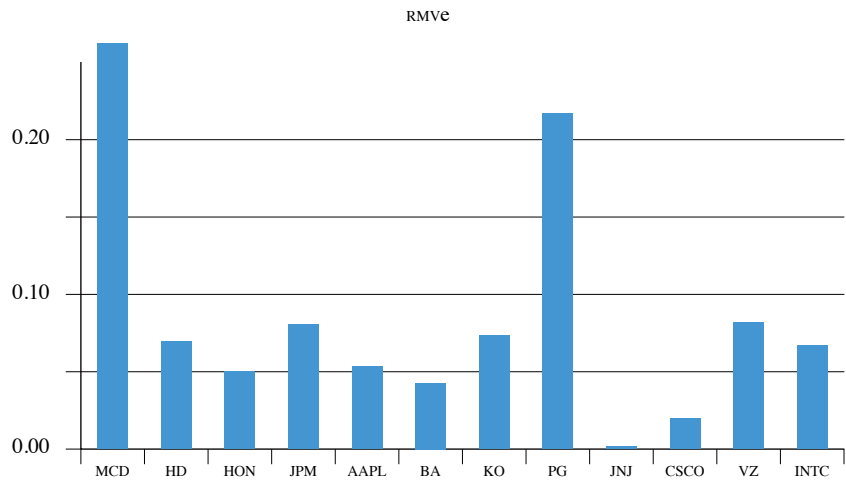
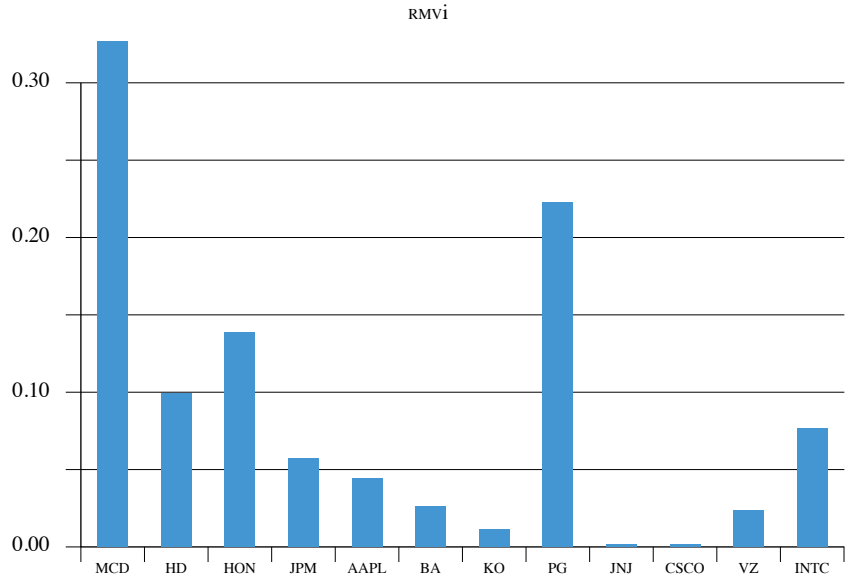
La figura 1a muestra los resultados para los pesos óptimos de los portafolios de mínima varianza de Markowitz (PMVG) y de máximo Sharpe (o de máxima utilidad esperada, MV-Sharpe), de acuerdo con los problemas de optimización definidos en las ecuaciones (1-3). De estos portafolios óptimos se resalta el hecho de que el de MV-Sharpe deja por fuera 5 activos (HON, KO, JNJ, CSCO y VZ). Por su parte, la figura 1b presenta las dos formulaciones robustas para el portafolio de MV-Sharpe usando los conjuntos de incertidumbre de intervalo (RMVi) y de tipo elipsoidal (RMVe), según las ecuaciones (17-19). A diferencia del portafolio de MV-Sharpe del modelo original, ambas contrapartes robustas solo dejan por fuera uno o dos activos excluidos: JNJ, CSCO y JNJ, respectivamente. Este resultado confirma la construcción de portafolios mucho mejor diversificados, a partir del enfoque robusto de optimización.

16 El código utilizado en este trabajo está disponible en <https://github.com/cazapata25/RPO/blob/main/code>.

Figura 1: Composición de los portafolios óptimos



(a) Modelo MV original



(b) Modelo MV robusto: contrapartes para los conjuntos de intervalo y elipsoidal

Fuente: elaboración propia.

Por su parte, los resultados de las medidas de desempeño (dentro y fuera de muestra) se presentan en las tablas 2 y 3.

Tabla 2: Desempeño de los portafolios dentro de muestra

Portafolio	Retorno esperado	Volatilidad	Coef. Sharpe	Max. Drawdown	No. activos
PMVG	0,0119	0,0275	0,4327	0,0717	11
MV-Sharpe	0,0145	0,0297	0,4882	0,0651	7
RMVi	0,0131	0,0282	0,4645	0,069	10
RMVe	0,0125	0,0276	0,4529	0,0694	11
Benchmark	0,0093	0,0327	0,2844	0,1235	-

Fuente: elaboración propia.

Tabla 3: Desempeño de los portafolios fuera de muestra

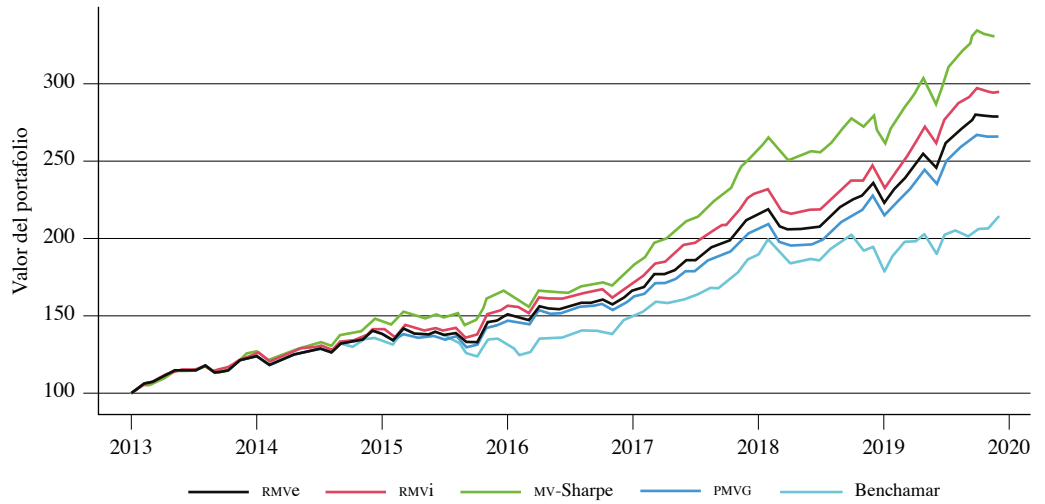
Portafolio	Retorno esperado	Volatilidad	Coef. Sharpe	Max. Drawdown
PMVG	0,0065	0,0649	0,1002	0,0717
MV-Sharpe	0,0073	0,0801	0,0911	0,0651
RMVi	0,0096	0,0680	0,1412	0,069
RMVe	0,0069	0,0670	0,1030	0,0694
Benchmark	0,0058	0,0787	0,0737	0,1235

Fuente: elaboración propia.

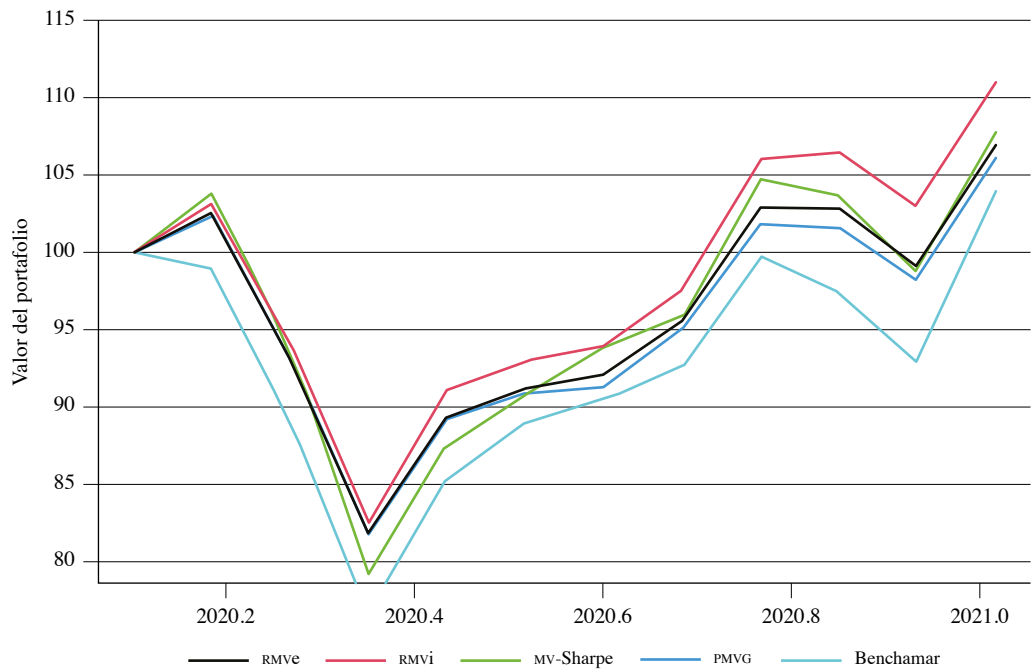
Los resultados dentro de muestra confirman el resultado del modelo MV original. Allí se observa que el modelo MV-Sharpe genera el más alto ratio (0,4882), frente a todos los demás portafolios óptimos y respecto al *benchmark*. Sin embargo, fuera de muestra, el resultado es totalmente diferente. Los modelos robustos (RMVi y RMVe) generan portafolios con mejor desempeño, es decir, mejores ratios de Sharpe: 0,1412 y 0,1030, respectivamente; incluso el PMVG presentó una ratio mayor que el modelo MV-Sharpe: 0,1002 frente a 0,0911.

El análisis de desempeño anterior también se presenta de forma gráfica para ambos periodos de análisis (dentro y fuera de muestra). Para ello, se asume una inversión hipotética de \$100 millones en todos los portafolios (incluido el *benchmark*). Para el periodo dentro de muestra, la inversión presenta un mejor desempeño para el portafolio construido con el modelo MV-Sharpe.

Figura 2: Desempeño de inversión hipotética en los portafolios óptimos



(a) Dentro de muestra



(b) Fuera de muestra

Fuente: elaboración propia.

4. Discusión final y extensiones

La implementación del enfoque robusto de optimización de portafolios ha tenido un mayor interés teórico y práctico, y ha ganado popularidad en las últimas dos décadas. Aunque el presente artículo muestra una breve revisión de este enfoque y los beneficios de su implementación, se debe tener en cuenta que los desarrollos recientes en este campo van mucho más allá del alcance de este trabajo. En los últimos años han proliferado interesantes contribuciones en materia de medidas robustas de desempeño y modelación de conjuntos de incertidumbre mucho más sofisticados.

Los conjuntos de incertidumbre de tipo intervalo y elipsoidal también pueden usarse para modelar la incertidumbre de la matriz de covarianzas (Σ). Por ejemplo, de forma análoga a las formulaciones indicadas en las ecuaciones (11) y (14), y siguiendo los desarrollos de Lobo y Boyd (2000) y Goldfarb e Iyengar (2003), se puede dar una especificación para incorporar conjuntos de incertidumbre en Σ usando la formulación de intervalo, como indica la ecuación (20)

$$U_{\Sigma} = \left\{ \Sigma \mid \Sigma_{lower} \leq \Sigma \leq \Sigma_{upper}, \Sigma \succeq 0 \right\} \quad (20)$$

O para un conjunto de incertidumbre elipsoidal, como muestra la ecuación (21).

$$U_{\Sigma} = \left\{ \Sigma \mid \left(\text{vec}(\Sigma) - \text{vec}(\hat{\Sigma}) \right) \Sigma_{\Sigma}^{-1} \left(\text{vec}(\Sigma) - \text{vec}(\hat{\Sigma}) \right)^T \leq k^2, \Sigma \succeq 0 \right\} \quad (21)$$

Estas formulaciones de conjuntos de incertidumbre para la matriz Σ , junto con las formulaciones para los retornos esperados, tratados en la sección 2.1, representan los casos más simples de conjuntos de incertidumbre. Sin embargo, la literatura en OR ha extendido el estudio a otras formas mucho más sofisticadas y que permiten generar portafolios óptimos mucho robustos y consistentes. Por ejemplo, Bandi y Bertsimas (2012) proponen formas de conjuntos que incorporan las correlaciones, colas gruesas u otra información (o momentos) de la distribución empírica. Además, ellos muestran cómo construir conjuntos de incertidumbre basados en datos históricos y pruebas estadísticas.

Por otra parte, también se resaltan los desarrollos que han contribuido a robustecer las medidas de desempeño como CVaR (El Ghaoui *et al.*, 2003;

Huang *et al.*, 2007; Zhu y Fukushima, 2009; Kara *et al.*, 2019), la medida Omega (Kapsos *et al.*, 2014; Sharma *et al.*, 2017; Georgantas *et al.*, 2021), así como el tratamiento factorial para la construcción de portafolios óptimos (Garlappi *et al.*, 2007; Lu, 2011), entre otros. De igual forma, se resaltan los trabajos que han contribuido al enfoque bayesiano robusto como Schöttle *et al.* (2010) y Meucci (2011), quienes presentan importantes contribuciones para continuar avanzando en este campo de investigación.

5. Conclusiones

Las limitaciones que ha presentado el modelo MV en la práctica, debido a su alta sensibilidad a los cambios en los parámetros, así como su propensión para generar portafolios poco diversificados, han permitido el desarrollo de nuevos enfoques robustos para su construcción y optimización considerando la incertidumbre de las estimaciones de retornos esperados y de la matriz de covarianzas. De estos, el enfoque de OR, presentado en este trabajo, ofrece una alternativa prometedora ya que permite abordar directamente las limitaciones anteriores. Una ventaja importante de este enfoque es la facilidad con la que pueden implementarse los algoritmos de optimización. Además, como gran parte de los desarrollos de la OR representan problemas de programación convexa, la proliferación de herramientas computacionales en este campo ha facilitado su uso.

Este trabajo resalta las ventajas del enfoque de OR para construir de forma eficiente portafolios óptimos, en comparación con el modelo MV tradicional. Asimismo, se señalan nuevos campos de investigación que han ido surgiendo y representan importantes contribuciones para continuar fortaleciendo la teoría moderna de portafolio (TMP).

Referencias

- Bandi, C. y Bertsimas, D. (2012). Tractable stochastic analysis in high dimensions via robust optimization. *Mathematical programming*, 134(1), 23-70.
- Ben-Tal, A. y Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 769-805.
- Bertsimas, D., Darnell, C. y Soucy, R. (1999). Portfolio construction through mixed-integer programming at Grantham, Mayo, Van Otterloo and Company. *Interfaces*, 29(1), 49-66.

- Bertsimas, D. y Brown, D. (2009). Constructing uncertainty sets for robust linear optimization. *Operations Research*, 57(6), 1483-1495.
- Bertsimas, D., Brown, D. y Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53(3), 464-501.
- Best, M. y Grauer, R. (1991). On the sensitivity of mean variance efficient portfolios to changes in asset Means. *The Review of Financial Studies*, 4(2), 314-342.
- Black, F. y Litterman, R. (1991). *Global Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies*. Goldman, Sachs & Co Fixed Income Research, 1-44.
- Black, F. y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43.
- Blog, B., Hoek, G., Kan, A. y Timmer, G. (1983). The optimal selection of small portfolios. *Management Science*, 29(7), 792-798.
- Chopra, V. y Ziemba, W. (1993). The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6-11.
- Choueifaty, Y. y Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40-51.
- El Ghaoui, L., Oustry, F. y Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1), 33-52.
- El Ghaoui, L., Oks, M. y Oustry, F. (2003). Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach. *Operations Research*, 51(4), 543-556.
- Elton, E., Gruber, M. y Padberg, M. (1976). Simple criteria for optimal portfolio selection. *The Journal of Finance*, 31(5), 1341-1357.
- Fabozzi, F., Huang, D. y Zhou, G. (2010). Robust portfolios: Contributions from operations research and finance. *Annals of Operations Research*, 176(1), 191-220.
- Fabozzi, F., Kolm, P., Pachamanova, D. A. y Focardi, S. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons.

- Francis, J. y Kim, D. (2013). *Modern Portfolio Theory: Foundations, Analysis, and New Developments*. John Wiley & Sons.
- Garlappi, L., Uppal, R. y Wang, T. (2007). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *Review of Financial Studies*, 20(1), 41-81.
- Georgantas, A., Doumpos, M. y Zopounidis, C. (2021). Robust optimization approaches for portfolio selection: a comparative analysis. *Annals of Operations Research*, 1-17.
- Goldfarb, D. e Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28(1), 1-38.
- He, G. y Litterman, R. (1999). *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*. Technical report, Goldman Sachs–Investment Management Research, 1-18.
- Huang, D., Fabozzi, F. y Fukushima, M. (2007). Robust portfolio selection with uncertain exit time using worst-case VaR strategy. *Operations Research Letters*, 35, 627-635.
- Idzorek, T. (2007). A step-by-step guide to the Black-Litterman model: Incorporating user-specified confidence levels (pp. 17-38). En S. Satchell (Ed.). *Forecasting expected returns in the financial markets*. Academic Press.
- James, W. y Stein, C. (1961). *Estimation with quadratic loss*. Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1, 361-380.
- Kapsos, M., Christofides, N. y Rustem, B. (2014). Worst-case robust Omega ratio. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 499-507.
- Kara, G., Ozmen, A. y Weber, G. (2019). Stability advances in robust portfolio optimization under parallelepiped uncertainty. *Central European Journal of Operations Research*, 27(1), 241-261.
- Keating, C. y Shadwick, W. (2002). A universal performance measure. *Journal of Performance Measurement*, 6(3), 59-84.
- Kim, J., Kim, W. y Fabozzi, F. (2013). Recent developments in robust portfolios with a worst-case approach. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 161(1), 103-121.

- Kim, J., Kim, W., Kwon, D. y Fabozzi, F. (2018). Robust equity portfolio performance. *Annals of Operations Research*, 266(1-2), 293-312.
- Kolm, P., Tütüncü, R. y Fabozzi, F. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371.
- Ledoit, O. y Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5), 603-621.
- Lintner, J. (1965). Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *The Journal of Finance*, 20(4), 587-615.
- Lobo, M. y Boyd, S. (2000). Portfolio optimization with linear and fixed transaction costs and bounds on risk. *Annals of Operations Research*, 152(1), 341-365.
- Lu, Z. (2011b). Robust portfolio selection based on a joint ellipsoidal uncertainty set. *Optimization Methods & Software*, 26, 89-104.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: efficient diversification of investments*. Wiley.
- Meucci, A. (2008). Fully flexible views: Theory and practice. *Risk*, 21(10), 97-102.
- Meucci, A. (2009). Enhancing the Black-Litterman and related approaches: Views and stress-test on risk factors. *Journal of Asset Management*, 10, 89-96.
- Meucci, A. (2011). *Robust Bayesian Allocation*. <https://ssrn.com/abstract=681553>, 1-18.
- Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is optimization optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4), 768-783.
- Pachamanova, D. y Fabozzi, F. (2012). Equity Portfolio Selection Models in Practice. *Encyclopedia of Financial Models*, 1, 61-87.

- Rockefeller, R. y Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 3(1), 21-41.
- Romero, C. (2010). La Teoría Moderna de Portafolio: un ensayo sobre sus formulaciones originales y sus repercusiones contemporáneas. *ODEON*, 5, 103-118.
- Schöttle, K., Werner, R. y Zagst, R. (2010). Comparison and robustification of Bayes and Black-Litterman models. *Mathematical Methods of Operations Research*, 71(3), 453-475.
- Sharma, A., Utz, S. y Mehra, A. (2017). Omega-CVaR portfolio optimization and its worst-case analysis. *OR Spectrum*, 39(2), 505-539.
- Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk. *The Journal of Finance*, 19(1), 425-42.
- Sortino, F. y Price, L. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *Journal of Investing*, 3(3), 59-64.
- Treynor, J. (1965) How to rate management of investment funds. *Harvard Business Review*, 43, 63-75.
- Tütüncü, R. y Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1-4), 157-187.
- Xidonas, P., Steuer, R. y Hassapis, C. (2020). Robust portfolio optimization: A categorized bibliographic review. *Annals of Operations Research*, 292(1), 533-552.
- Yin, C., Perchet, R. y Soupé, F. (2021). A practical guide to robust portfolio optimization. *Quantitative Finance*, 21(6), 911-928.
- Zhu, S. y Fukushima, M. (2009). Worst-case conditional value-at-risk with application to robust portfolio management. *Operations Research*, 57(5), 1155-1168.
- Zymler, S., Kuhn, D. y Rustem, B. (2013). Worst-case value at risk of nonlinear portfolios. *Management Science*, 59(1), 172-188.