

Optimización robusta de portafolio empleando métodos bayesianos

Robust portfolio optimization
using Bayesian methods

Diego Felipe Carmona Espejo*
Jhonatan Gamboa Hidalgo**

* Candidato a magíster en Finanzas. Profesional, Superintendencia Financiera de Colombia, Bogotá (Colombia). [diego.carmona@est.uexternado.edu.co], [ORCID ID: 0000-0003-2538-1498].

** Candidato a magíster en Finanzas. Especialista Actuaría, Skandia Holding de Colombia S.A., Bogotá (Colombia). [Jhonatan.gamboa@est.uexternado.edu.co], [ORCID ID: 0000-0001-5106-3448].

Artículo recibido: 12 de junio 2022

Aceptado: 25 de julio 2022

Para citar este artículo:

Carmona Espejo, D. F. y Gamboa Hidalgo, J. (2022). Optimización robusta de portafolio empleando métodos bayesianos. *Odeon*, 21, 81-104.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n21.05>

Resumen

En este artículo se implementa un modelo de optimización robusta bayesiana para la selección óptima de un portafolio de inversión. Para ello, se extiende el modelo desarrollado por Meucci, que consiste en la incorporación del enfoque bayesiano al modelo de portafolio robusto para definir el conjunto de incertidumbre de tipo elipsoidal, bajo una distribución Wishart inversa. De esta forma, se incorpora la incertidumbre de los parámetros estimados para crear la contraparte robusta en el modelo de portafolio. El modelo propuesto utiliza una función de distribución Gamma, como generalización de la función Wishart. Los resultados confirman las conclusiones de Meucci y corroboran las propiedades atribuidas a este tipo de portafolios.

Palabras clave: portafolio óptimo; métodos bayesianos; optimización robusta.

Clasificación JEL: C11, C61, G11.

Abstract

In this paper we implemented a Bayesian robust optimization model to select an optimal investment portfolio. To do that, we extended the model developed by Meucci, which consists of incorporating the Bayesian approach into the robust portfolio model in order to define an ellipsoidal-type uncertainty set under an Inverse Wishart Distribution. Thus, the uncertainty of the estimated parameters for create the robust counterpart in the portfolio model. The proposed model uses a Gamma distribution function, as a generalization of the Wishart function. Results confirm Meucci's conclusions and, it corroborates the properties attributed to those portfolios.

Key words: Optimal portfolio; Bayesian methods; robust optimization.

JEL classification: C11, C61, G11.

Introducción

Las decisiones de inversión y los métodos que justifican dichas decisiones continúan siendo un campo de estudio fundamental de las finanzas. Desde el trabajo esencial de Markowitz en 1952, se han desarrollado muchos enfoques que extienden su propuesta para incorporar elementos que permitan el diseño de mejores estrategias de inversión. Sin embargo, aún continúa la búsqueda de un modelo que supere todas sus limitaciones y fallas.

Previo al trabajo de Markowitz, no existía un modelo matemático que permitiera de manera adecuada crear y gestionar un portafolio óptimo de inversión. Aunque Williams (1938) propuso que el valor de un activo debía ser igual al valor presente de los flujos futuros, y como estos flujos son inciertos solo se podría calcular el valor a través de los dividendos esperados, por lo que en dado caso el inversionista solo estaría interesado en los valores esperados de cada activo individual, y tendría incentivos para invertir todo su capital en aquel activo con mayor valor esperado al no tener presente la volatilidad asociada.

Es allí donde el análisis del riesgo de un activo se vuelve esencial para la gestión de portafolios de inversión y, además, recibe importancia para su valoración. De esta manera, el modelo de media-varianza (MV) de Markowitz surge como una propuesta innovadora para crear portafolios óptimos considerando no solo la rentabilidad esperada, sino también su riesgo. Como resultado se obtiene la frontera eficiente (FE) que incorpora a todos los portafolios óptimos en el sentido MV. Este modelo transformaría la manera de ver el mercado de valores, marcando un antes y un después, ya que toda su construcción da origen a la teoría moderna de portafolio (TMP).

Markowitz (1952) consideró que el rendimiento de un portafolio se calcula a partir de la esperanza matemática de los rendimientos de los activos (μ), mientras que el riesgo se evalúa por medio de la matriz de covarianzas (Σ). Además, su modelo asume que el inversionista es racional, es decir, busca maximizar su utilidad bajo un nivel de tolerancia al riesgo (λ), de tal manera que, a mayor rendimiento esperado, mayor riesgo deberá asumir. Así, se puede encontrar la combinación de activos para la cual se obtiene la mayor rentabilidad dado un nivel de riesgo. El problema que se resuelve en el modelo clásico es el siguiente:

$$\min_{\{w\}} w' \Sigma w - \lambda \mu' w \text{ s.a. } w' 1 = 1 \quad (1)$$

Donde: w es el vector de pesos o participaciones de los activos que conforman el portafolio y 1 es un vector de unos. El problema de optimización anterior representa una versión general del modelo de Markowitz, ya que permite incorporar el perfil de aversión del inversionista siguiendo la función de utilidad cuadrática propuesta por Markowitz (1959). Sin embargo, este problema se redefine para representar solo el ejercicio de minimización de la medida de riesgo para un nivel dado de retorno, como muestra la ecuación 2.

$$\min_{\{w\}} w' \Sigma w \text{ s.a. } \mu' w = \mu_0 \text{ y } w' 1 = 1 \quad (2)$$

Donde: μ_0 representa el retorno esperado objetivo sobre el cual se busca el portafolio de menor riesgo. Aunque este modelo sentó las bases para un análisis más profundo de la construcción óptima de portafolios, tiene muchos problemas como fue señalado por Best y Grauer (1991), Black y Litterman (1992), Michaud (1998) y Meucci (2005, 2011), entre otros. El hecho de utilizar datos históricos para la estimación de los parámetros del modelo como μ y Σ , según indican estos autores, pierde en cierta medida el factor de reconocer adecuadamente la incertidumbre futura, lo cual brinda soluciones muy sensibles ya que estos pueden contener mucho ruido.

También, el modelo MV genera portafolios óptimos que en la práctica presentan alta concentración en pocos activos. Por ejemplo, Black y Litterman (1992) demostraron que mínimos cambios en los retornos esperados tienen un impacto sustancial en la composición del portafolio. De igual forma, Best y Grauer (1991) mostraron que pequeños cambios en las estimaciones generan pesos extremos en algunos activos y se obtienen portafolios muy concentrados.

Estas limitaciones, sumadas a los desarrollos tecnológicos que permiten realizar operaciones de optimización más complejas en menor tiempo, hacen posible ampliar las investigaciones y dar nuevos enfoques al análisis de la gestión de portafolios. Autores como Nesterov y Nemirovski (1993), Lobo *et al.* (1998), Goldfarb e Iyengar (2003) y Tütüncü y Koenig (2004) propusieron diferentes formas de incorporar la incertidumbre a los parámetros, con sets de información, como solución para reducir la alta sensibilidad de estos.

De esta forma, en este trabajo se identifican los enfoques robusto y bayesiano para profundizar y ampliar el desarrollo de optimización de portafolio. Para ello, se adopta el modelo propuesto por Meucci (2011) para la construcción del portafolio robusto bayesiano (PRB), pero se introducen algunos cambios importantes como usar la función Gamma en vez de usar una función de distribución Wishart, lo cual representa una generalización del modelo de Meucci. Este modelo propuesto, denominado como portafolio robusto bayesiano general (PRBG), se implementa para un conjunto de activos del mercado estadounidense.

Este trabajo está organizado en cuatro secciones. En la primera sección se presenta el enfoque de optimización robusta para la construcción de portafolios óptimos, así como sus principales fundamentos y formulaciones. En la segunda

sección se introduce el enfoque bayesiano, sus principios y supuestos, señalando las mejoras que introduce el enfoque para la construcción de las contrapartes robustas. Luego, en la tercera sección, se lleva a cabo la implementación del modelo propuesto y algunas comparaciones con los resultados de las formulaciones previas y el modelo de Markowitz. Finalmente, se presentan algunas conclusiones del trabajo.

1. Construcción robusta de portafolios óptimos

Una de las primeras propuestas robustas para lidiar con el problema de la alta sensibilidad del portafolio óptimo frente a los parámetros estimados fue desarrollada por Michaud (1998). La idea del autor consistía en incorporar la incertidumbre de los parámetros a partir de un ejercicio de remuestreo. Esto permite crear portafolios con pesos mucho más estables y reduce los errores de estimación. Sin embargo, tal como afirman Pachamanova y Fabozzi (2012), este proceso puede ser costoso en términos computacionales, sobre todo si se tiene un portafolio conformado por muchos activos, ya que la optimización del portafolio debe resolverse para cada paso del remuestreo.

Otro enfoque que permite resolver estas mismas limitaciones del modelo MV incorpora la incertidumbre de los *inputs* directamente al modelo de optimización. Esta incorporación se hace a través de conjuntos de incertidumbre, como fue sugerido por Lobo *et al.* (1998), Goldfarb e Iyengar (2003), Tütüncü y Koenig (2004), entre otros. Algunos de los tipos de conjunto de incertidumbre más utilizados son los conjuntos de intervalo de confianza alrededor de cada estimación, y el conjunto de tipo elipsoidal, que toma en cuenta la estructura de las covarianzas de los errores de estimación. La incorporación de la incertidumbre por medio de estos conjuntos, como afirman Pachamanova y Fabozzi (2012), proporciona estimaciones más robustas que el modelo MV, lo cual mejora la precisión de las estimaciones tanto de los retornos como de la matriz de covarianzas. Este enfoque basado en conjuntos de incertidumbre se denomina optimización robusta.

En ese orden de ideas, la formulación de estos problemas robustos depende de la función objetivo que describa el problema por optimizar y del conjunto de incertidumbre que se seleccione. Por ejemplo, como señala Zapata (2021), si se parte de la función de utilidad del modelo MV como indica la ecuación 1, pero se ajusta su formulación para representar el problema de maximización, se tiene:

$$\max_{\{w\}} \{w'\mu - \lambda w' \Sigma w\} \text{ s.a. } w'1 = 1 \quad (3)$$

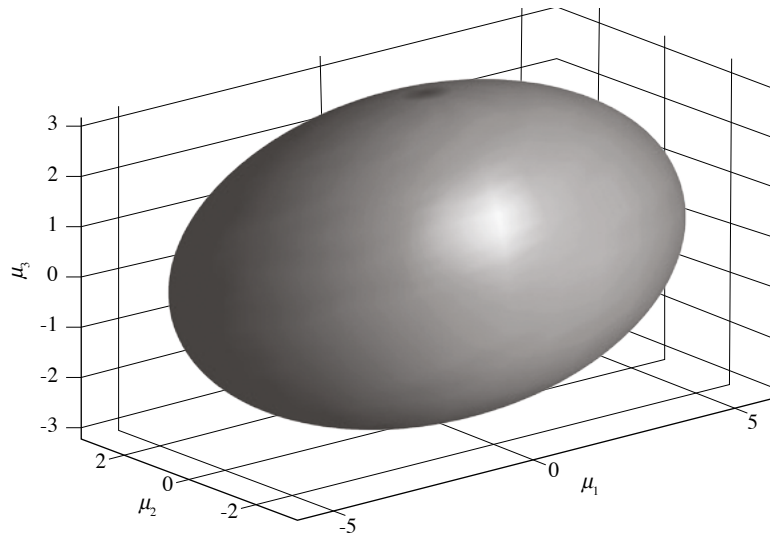
Al implementar un conjunto de incertidumbre por intervalo de confianza, el problema se transforma de la siguiente manera:

$$\max_{\{w\}} \{w'\mu - \lambda w' \Sigma w - \delta |w|\} \text{ s.a. } w'1 = 1 \quad (4)$$

Por el contrario, si para la misma función objetivo se implementa el conjunto de incertidumbre elipsoidal, como muestra la figura 1, se obtiene el siguiente problema:

$$\max_{\{w\}} \{w'\mu - \lambda w' \Sigma w - \delta \sqrt{w' \Sigma_{\mu} w}\} \text{ s.a. } w'1 = 1 \quad (5)$$

Figura 1: Representación en 3D de un conjunto de incertidumbre elipsoidal



Fuente: Pachamanova y Fabozzi (2012).

Es importante aclarar que, tal como lo hacen Tütüncü y Koenig (2004), matemáticamente existen 17 definiciones de robustez, las cuales dependen del contexto particular de aplicación, pero se destaca que el modelo de optimización del peor

de los casos es el método más utilizado dentro del enfoque robusto. Este método consiste en la búsqueda de una solución que tenga el mejor retorno del portafolio para el peor escenario, desde una “visión pesimista de la robustez”. Una de las primeras formulaciones completas de este método fue realizada por Goldfarb e Iyengar (2003) quienes, partiendo del problema de optimización MV, formulan soluciones robustas mediante conjuntos de incertidumbre de tipo intervalo cuya formulación es estrictamente convexa y cuadrática.

Así mismo, estos autores, al extender los desarrollos previos de Lobo *et al.* (1998) y Nesterov y Nemirovski (1993), demuestran que el problema de optimización robusto se resuelve como un problema de programación cónica de segundo orden (SOCP, por sus siglas en inglés), lo cual a nivel computacional simplifica de manera importante los cálculos necesarios para solucionar este tipo de problemas. Además, los autores encuentran que los portafolios robustos pueden soportar un conjunto de información ruidosa o con una alta variabilidad y pueden presentar mejores resultados que los portafolios MV. Sin embargo, no encuentran resultados lo suficientemente concluyentes como para determinar que el portafolio robusto siempre es mejor.

Posteriormente, Tütüncü y Koenig (2004) formularon una generalización de modelo anterior que permite resolver el problema de optimización de la misma forma, pero sin las restricciones sobre la función objetivo. Los autores también definen, mediante intervalos, los conjuntos de incertidumbre que permiten emplear toda la información disponible de cada variable, sin embargo, su implementación se realiza usando el algoritmo desarrollado por Halldórsson y Tütüncü (2003), el cual permite determinar cuáles son los portafolios robustos eficientes para generar la FE. Además, Tütüncü y Koenig (2004) demuestran algunas propiedades fundamentales de los portafolios robustos:

- i) Mejor comportamiento del portafolio óptimo obtenido a partir del peor de los casos, ya que este se obtiene a costa de pequeñas pérdidas de rendimiento en los escenarios más probables.
- ii) Mayor estabilidad en el tiempo, ya que los portafolios tienden a presentar un menor rebalanceo a medida que se dispone de nuevos datos.

Estos resultados confirman las bondades de los portafolios óptimos robustos respecto a los portafolios MV, especialmente en periodos bajistas en el mercado. Kim *et al.* (2018) confirmaron los resultados anteriores y, además, encuentran que los portafolios robustos son superiores a la hora de asignar el riesgo, lo cual

los convierte en las estrategias de inversión más eficientes. Georgantas (2020) también encontró que los portafolios robustos presentan resultados superiores a los portafolios MV en materia de desempeño y una mayor estabilidad en el tiempo.

Por otra parte, Kim *et al.* (2013), al incorporar al análisis el modelo de tres factores propuesto por Fama y French (1993) (modelo FF) para la construcción de los conjuntos de información, encontraron que los portafolios robustos son menos sensibles a cambios en los *inputs* que el modelo MV. Además, encuentran que los portafolios robustos presentan una mayor correlación con los factores descritos del modelo FF.

A pesar de las ventajas anteriores, la literatura de optimización robusta de portafolio aún no ha encontrado soporte de que estos portafolios sean más diversificados que los no robustos, como fue confirmado por Tütüncü y Koenig (2004), Kim *et al.* (2013) y Georgantas (2020). Por ejemplo, los autores encontraron que los portafolios robustos también pueden concentrarse en un pequeño número de activos. Esto se presenta, principalmente, porque los portafolios robustos se enfocan en controlar el riesgo al reemplazar en el portafolio aquellos activos que tienden a presentar mayor grado de rebalanceo, y no mediante la inclusión de una mayor cantidad de activos, como afirman Tütüncü y Koenig (2004). Por tanto, los autores encuentran que es difícil concluir que los portafolios robustos son más diversificados que los del modelo MV. Algunas de las mejoras del enfoque se pueden encontrar mediante la incorporación del enfoque bayesiano, como se muestra a continuación.

2. Formulación bayesiana del portafolio robusto

La incorporación del enfoque bayesiano en la teoría de portafolio ha sido otro de los métodos que han tenido una acogida importante para mejorar los resultados del modelo MV, ya que permite usar información previa e incluir el conocimiento experto sobre el mercado o variables de interés. Además, también permite incluir dentro de su análisis el riesgo de estimación y la incertidumbre de los parámetros en el modelo. Como se ha descrito, el modelo MV de Markowitz no integra la incertidumbre de los parámetros en el proceso de optimización. En este contexto, bajo un marco bayesiano es factible incorporar un espacio de realizaciones desconocidas de los parámetros al asignarles una distribución de probabilidad y no un valor específico (Avramov y Zhou, 2009). Por último, los métodos bayesianos también presentan algunas ventajas computacionales

al facilitar el uso de algoritmos numéricos rápidos, intuitivos y fácilmente implementables.

Avramov y Zhou (2009) realizaron una revisión de literatura sobre métodos bayesianos en la teoría de portafolio, en la que encontraron que al incorporar dentro del problema de optimización una distribución *prior* y, asumiendo una función de distribución normal sobre algunos parámetros, se llega a que las estrategias de portafolio que resuelven el problema de optimización son diferentes a las estrategias de portafolio del modelo MV, por lo que incluir dichos factores de incertidumbre sí genera cambios en la solución aunque estos están sujetos a la función *prior* que se utilice. Además, algunos trabajos han empelado funciones conjugadas al usar la distribución normal y la distribución Wishart inversa (WI), y han encontrado portafolios que tienen un mejor desempeño fuera de muestra, en comparación con los resultados del modelo MV.

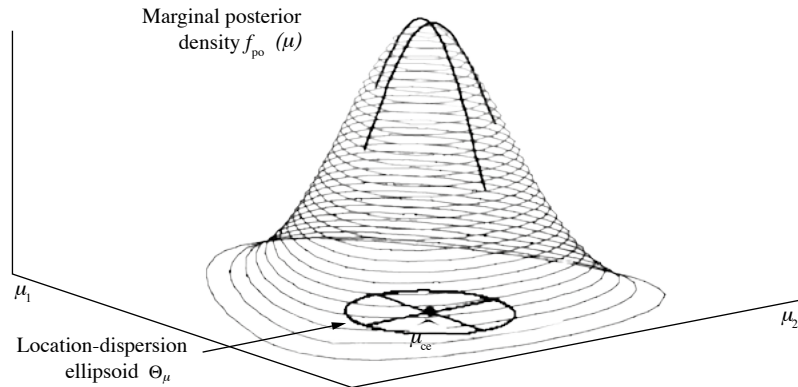
Por otra parte, el modelo bayesiano también permite la integración de la aversión a la incertidumbre dentro del análisis, lo cual puede presentar una ventaja importante, particularmente en aquellos casos en los que se tiene poca información disponible. Además, como afirman Garlappi *et al.* (2004), la incorporación de esta información dentro del proceso de optimización refleja el deseo del inversionista de protegerse contra el error de estimación tomando decisiones conservadoras; este trabajo presenta un análisis detallado de este tema y encuentra que es posible extender el modelo clásico de MV para permitir la posibilidad de incorporar múltiples *priors* junto con la aversión a la incertidumbre de los retornos estimados. En este ámbito, los autores encuentran que este modelo con múltiples *priors* conduce a un mayor coeficiente de Sharpe fuera de muestra.

Al realizar la comparación del modelo bayesiano frente al enfoque robusto, Goldfarb e Iyengar (2003) señalan que, en la optimización robusta bajo el método del peor de los casos, el parámetro no se caracteriza estadísticamente como sí se hace en un marco bayesiano, dado que la formulación robusta asume que el verdadero parámetro se encuentra en una región de incertidumbre centrada alrededor del valor estimado. Esto se logra al usar un conjunto de incertidumbre de tipo intervalo de confianza o de tipo elipsoidal. Sin embargo, Meucci (2011) demostró que ambos métodos se pueden integrar en uno solo, método que él denominó optimización robusta bayesiana (ORB).

La ORB, como la describe Meucci (2011), utiliza conjuntos de información elipsoidales de una función posterior, que resulta de implementar un proceso bayesiano dentro de la reformulación del problema de optimización para obtener la contraparte robusta. En otras palabras, el PRB representa la solución al problema

robusto de optimización que emplea conjuntos de incertidumbre elipsoidales de ubicación-dispersión, pero desde un marco bayesiano. La figura 2 muestra la intuición del modelo para la estimación de los retornos esperados de dos activos.

Figura 2: Conjunto de incertidumbre elipsoidal y distribución de probabilidad posterior



Fuente: Meucci (2011).

Al igual que los resultados de la optimización robusta, los portafolios óptimos robustos bayesianos tienen en cuenta un conjunto de parámetros estimados y generan una solución óptima para todo el conjunto de incertidumbre utilizado. Para ello, estos portafolios incluyen el conocimiento experto en el proceso de optimización al incorporar las expectativas subjetivas que tiene el inversionista. Al final, este modelo arroja dos resultados muy importantes: primero, los conjuntos elipsoidales que se definen para los parámetros representan regiones que se autoajustan al resolver el problema de optimización robusta, acercándolo a un proceso dinámico, si se tiene en cuenta un proceso iterativo para la construcción del portafolio óptimo.

Segundo, los portafolios óptimos están limitados por el nivel de aversión al riesgo de estimación y el riesgo de mercado, es decir, este parámetro define el tamaño de los conjuntos de incertidumbre que son empleados en el proceso de optimización. Una característica de este proceso es que a mayor aversión al riesgo de mercado o de estimación, el PRB converge al portafolio MV. A nivel de cálculos, y como lo describe Meucci, este proceso de optimización propuesto termina siendo similar en complejidad al modelo MV, ya que aquí se llega a una frontera eficiente bayesiana de portafolios, sobre la cual se realiza el proceso de

optimización, y que tiene en cuenta entre sus parámetros la exposición al riesgo de mercado y al riesgo de estimación.

En su modelo, Meucci (2011) define los parámetros bayesianos bajo los siguientes supuestos:

- i) Los retornos esperados siguen una distribución normal.
- ii) Las covarianzas siguen una distribución Wishart inversa.

De esta forma, los retornos esperados y las covarianzas vienen dados por:

$$\mu|\Sigma = N\left(v_0, \frac{\Sigma}{T_0}\right) \quad (6)$$

$$\Sigma^{-1} \sim WI\left(v_1; \left(v_0, \frac{\Sigma_0^{-1}}{v_0}\right)^{-1}\right) \quad (7)$$

Además, Meucci definió los estimadores para el conjunto elipsoidal de la distribución marginal posterior de los retornos esperados (μ), dicho conjunto se caracteriza mediante el estimador del valor esperado de μ y el estimador de la matriz de dispersión, los cuales vienen dados por:

$$\hat{\mu}_{ce} = \mu_1 \quad (8)$$

$$S_{\mu} = \frac{1}{T_1} \frac{v_1}{v_1 - 2} \Sigma_1 \quad (9)$$

Por otra parte, el autor no solo realiza la estimación del conjunto elipsoidal para los retornos esperados, sino que avanza en la estimación de dicho conjunto para la matriz de covarianzas que, al igual que el conjunto elipsoidal anterior, también se describe mediante el estimador del valor esperado de μ y el estimador de la matriz de dispersión, que se muestran a continuación:

$$\hat{\Sigma}_{ce} = \frac{v_1}{v_1 + N + 1} \Sigma_1 \quad (10)$$

$$S_{\Sigma} = \frac{2v_1^2}{(v_1 + N + 1)^3} \left(D_N' \left(\Sigma_1^{-1} \otimes \Sigma_1^{-1} \right) D_N \right)^{-1} \quad (11)$$

Posteriormente, y conforme al proceso de optimización robusto, se realiza la optimización sobre el peor de los escenarios. Para ello, se emplean los conjuntos elipsoidales que describen tanto los retornos esperados como la matriz de covarianzas. La solución óptima para los parámetros y conjuntos establecidos, es decir, el PRB, viene dada por:

$$w_{rB}^{(i)} = \arg \max_{w \in C; w' \Sigma_1 w \leq \gamma_{\Sigma}^{(i)}} \left\{ w' \mu_1 - \gamma_{\mu} \sqrt{w' \Sigma_1 w} \right\} \quad (12)$$

Donde:

$$\gamma_{\mu} \equiv \sqrt{\frac{q_{\mu}^2}{T_1} \frac{v_1}{v_1 - 2}} \quad (13)$$

$$\gamma_{\Sigma}^{(i)} \equiv \frac{v^{(i)}}{\frac{v_1}{v_1 + N + 1} + \sqrt{\frac{2v_1^2 q_{\Sigma}^2}{(v_1 + N + 1)^3}}} \quad (14)$$

Los resultados anteriores se obtienen para una función de distribución Wishart inversa, siguiendo los supuestos que requiere el modelo PRB. Sin embargo, también se pueden emplear funciones de distribución diferentes. En este trabajo, además de revisar la consistencia del modelo de Meucci, se propone una extensión de este modelo al usar una distribución gamma. Cabe resaltar que esta extensión es posible gracias a uno de los supuestos establecidos por Meucci, quien emplea para la matriz de covarianzas una distribución Wishart inversa. Ahora, teniendo en cuenta que la distribución Wishart es un caso particular de la distribución gamma, entonces el modelo de Meucci se puede recalculer con esta última distribución. Como resultado, se puede obtener un modelo más general. Los detalles de esta construcción se presentan a continuación.

La función de distribución de probabilidad gamma viene dada por:

$$f_{\alpha, \beta, v, \Sigma}^{\Gamma}(\Gamma) = \frac{1}{k} |\Sigma|^{-\alpha} |\Gamma|^{\alpha - \frac{1}{2}(\rho+1)} \frac{1}{\beta^{\rho\alpha}} e^{-\frac{1}{\beta} \text{tr}\{\Sigma^{-1}\Gamma\}} \quad (15)$$

Se encuentra que la matriz de covarianzas viene determinada por:

$$\Sigma^{-1} \equiv \Omega \sim \Gamma(\alpha, \beta, (v_1 \Sigma_1)^{-1}) \quad (16)$$

Al emplear este ajuste se puede llegar a una versión extendida de las ecuaciones 8 y 9 que caracterizan el conjunto elipsoidal que se emplea para el parámetro μ y que se obtiene mediante su distribución marginal posterior:

$$S_{\mu} = \frac{\alpha}{\beta T_1 (2\alpha - \rho)} \Sigma_1 \quad (17)$$

$$S_{\Sigma} = \frac{2\beta^2 (2\alpha - \rho)}{\alpha^2} [D_N' (\Sigma_1 \otimes \Sigma_1) D_N]^{-1} \quad (18)$$

De forma similar, al cambiar el supuesto de la función de distribución Wishart inversa por una función de distribución gamma inversa, se tiene:

$$f_{\alpha, \beta, v, \Sigma}^{\Gamma}(\Gamma) = \frac{1}{k} |\Gamma|^{\alpha} |\Sigma|^{-\alpha - \frac{1}{2}(\rho+1)} \frac{1}{\beta^{\rho\alpha}} e^{-\frac{1}{\beta} \text{tr}\{\Gamma \Sigma^{-1}\}} \quad (19)$$

Mientras que para la matriz de varianzas y covarianzas se tiene:

$$\Sigma \sim \Gamma^{-1}(\alpha, \beta, v_1 \Sigma_1) \quad (20)$$

Por tanto, se obtiene una versión extendida de los parámetros que describen el conjunto elipsoidal para la matriz de covarianzas (ecuaciones 10 y 11):

$$\Sigma_{ce} = \left(\frac{\alpha}{\beta(2\alpha + \rho + 1)} \right) \Sigma_1 \quad (21)$$

$$S_{\Sigma} = \frac{2\alpha^2}{\beta^2(2\alpha + \rho + 1)^3} \left(D'_N \left[\Sigma_1^{-1} \otimes \Sigma_1^{-1} \right] D_N \right)^{-1} \quad (22)$$

Luego, al incorporar estas expresiones extendidas al proceso de optimización sobre el peor de los casos, se llega a las siguientes restricciones ORB:

$$\min_{\Sigma \in \Theta_{\mu}} \{ w' \mu \} = w' \mu - \left(\frac{\alpha}{\beta T_1 (2\alpha - \rho)} q_{\mu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{w' \Sigma_1 w} \quad (23)$$

$$\max_{\Sigma \in \Theta_{\Sigma}} \{ w' \Sigma w \} = \left[\frac{\alpha}{\beta(2\alpha + \rho + 1)} + \left(\frac{2\alpha^2 q_{\Sigma}^2}{\beta^2(2\alpha + \rho + 1)^3} \right)^{\frac{1}{2}} \right] (w' \Sigma_1 w) \quad (24)$$

De esta forma el PRBG estaría dado por:

$$w_{rB}^{(i)} = \arg \max_{w \in C; w' \Sigma_1 w \leq \gamma_{\Sigma}^{(i)}} \left\{ w' \mu_1 - \gamma_{\mu} \sqrt{w' \Sigma_1 w} \right\} \quad (25)$$

Donde:

$$\gamma_{\mu} \equiv \sqrt{\frac{\alpha q_{\mu}^2}{\beta T_1 (2\alpha - \rho)}} \quad (26)$$

$$\gamma_{\Sigma}^{(i)} \equiv \frac{v^{(i)}}{\frac{\alpha}{\beta(2\alpha + \rho + 1)} + \sqrt{\frac{2\alpha^2 q_{\Sigma}^2}{\beta^2(2\alpha + \rho + 1)^3}}} \quad (27)$$

Ahora, si en esta nueva versión del modelo ORB se utilizan los parámetros $\beta = 2$ y $\alpha = v/2$ de la distribución gamma, se llega a los mismos resultados de la

distribución Wishart inversa utilizada por Meucci. Por tanto, se confirma que este modelo es una generalización del modelo original.

Con el propósito de llevar a cabo una implementación del modelo de Meucci, así como la generalización propuesta, se plantean dos ejercicios numéricos, el primero es un ejercicio de Monte Carlo y el segundo es un ejercicio aplicado para el mercado estadounidense. A partir de esta aplicación, se realizan las respectivas comparaciones de los resultados, con el modelo MV original. Además, se hace el respectivo ejercicio de evaluación de desempeño dentro de muestra.

3. Implementación del modelo y resultados

3.1 Datos

Se propone una aplicación empírica del modelo MV y PRBG. Para este ejercicio se emplea la información de 10 acciones del índice S&P 500 del mercado estadounidense. La información histórica se toma para el periodo comprendido entre enero de 2010 y julio de 2022, con periodicidad semanal. Las acciones del S&P que se seleccionaron son las que al momento de consulta de la información tenían los mejores porcentajes de variación anual durante 2022, la información fue tomada del portal *Yahoo Finance*.

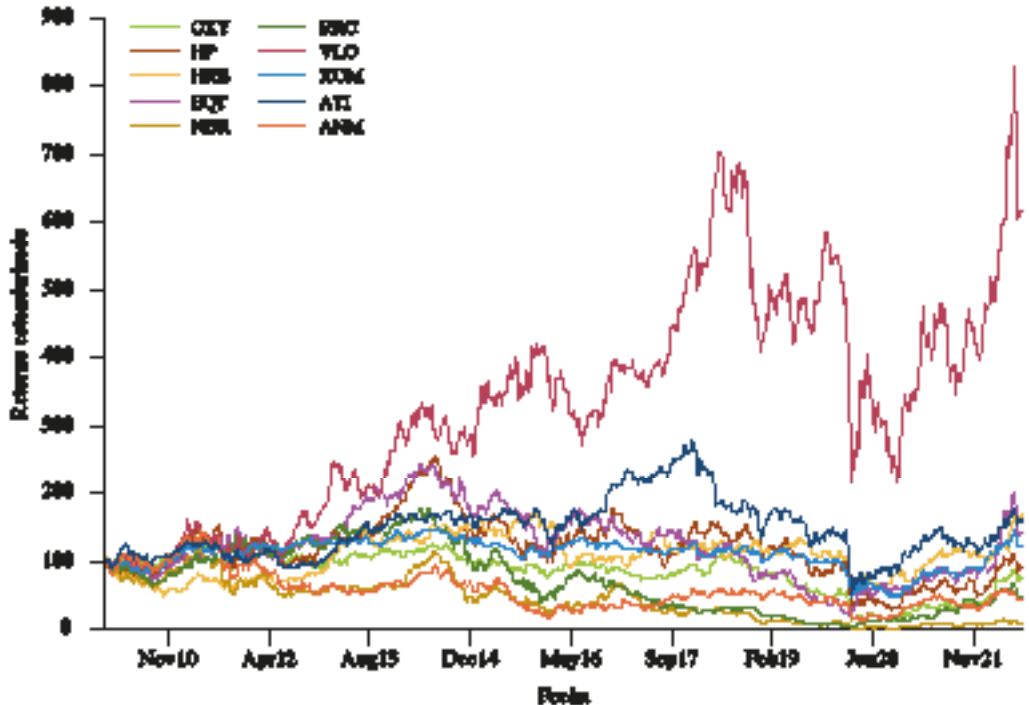
Tabla 1: Acciones seleccionadas

Acciones	Etiqueta	Rendimiento Promedio (%)	Máximo (%)	Mínimo (%)	Desviación Estándar
Occidental Petroleum Corp.	OXY	0,151	30,02	-62,23	0,0585
Helmerich & Payne, Inc.	HP	0,221	48,05	-49,78	0,0673
H&R Block, Inc.	HRB	0,184	19,69	-24,57	0,0448
EQT Corporation	EQT	0,224	37,14	-24,29	0,0589
Nabors Industries Ltd.	NBR	0,190	78,84	-76,12	0,1026
Range Resources Corp.	RRC	0,173	56,25	-23,76	0,0770
Valero Energy Corp.	VLO	0,425	21,89	-28,75	0,0537
Exxon Mobil Corp.	XOM	0,088	12,75	-25,80	0,0331
Allegheny Technologies Incorporated	ATI	0,141	29,80	-38,54	0,0727
Unum Group	UNM	0,196	46,77	-36,97	0,0495

Fuente: elaboración propia.

La figura 3 muestra el comportamiento histórico del precio de las 10 acciones para todo el periodo de análisis. Para hacer el ejercicio comparativo, se normalizan los precios tomando como base 100 al inicio del periodo.

Figura 3: Comportamiento histórico del precio de las acciones seleccionadas



Fuente: elaboración propia.

3.2 Resultados

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al correr un experimento de Monte Carlo para el modelo empleado en la derivación del portafolio robusto bayesiano, el modelo MV y el modelo robusto bayesiano general, para el cual se evalúa la incidencia del parámetro beta, que se incluyó en las ecuaciones correspondientes.

Figura 4: Comparación de los modelos MV, PRB y PRBG con $\beta = 10.000$

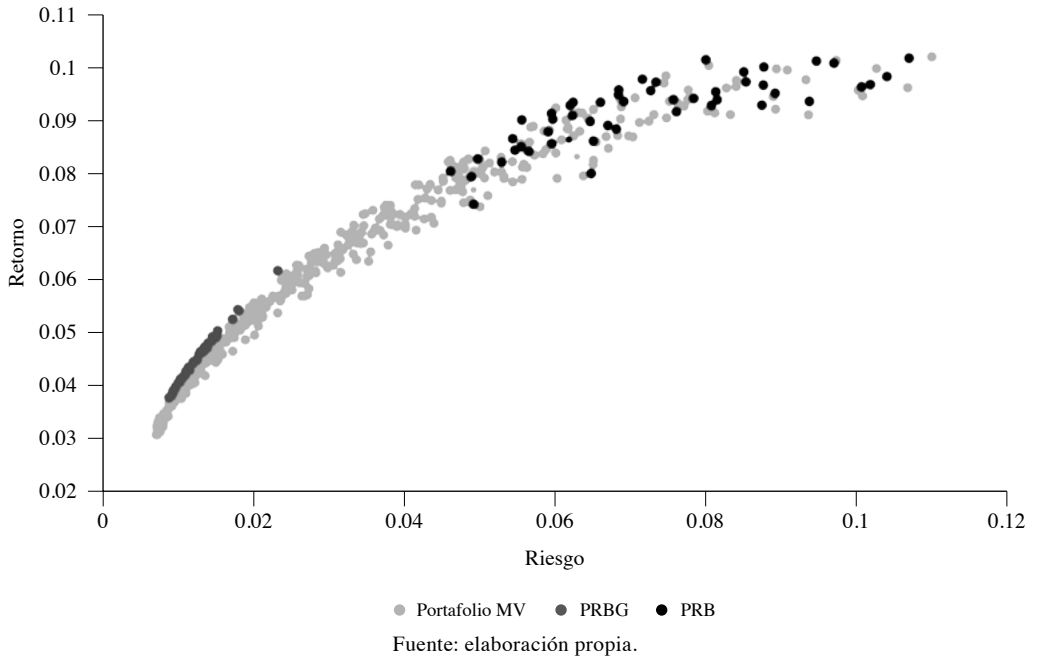
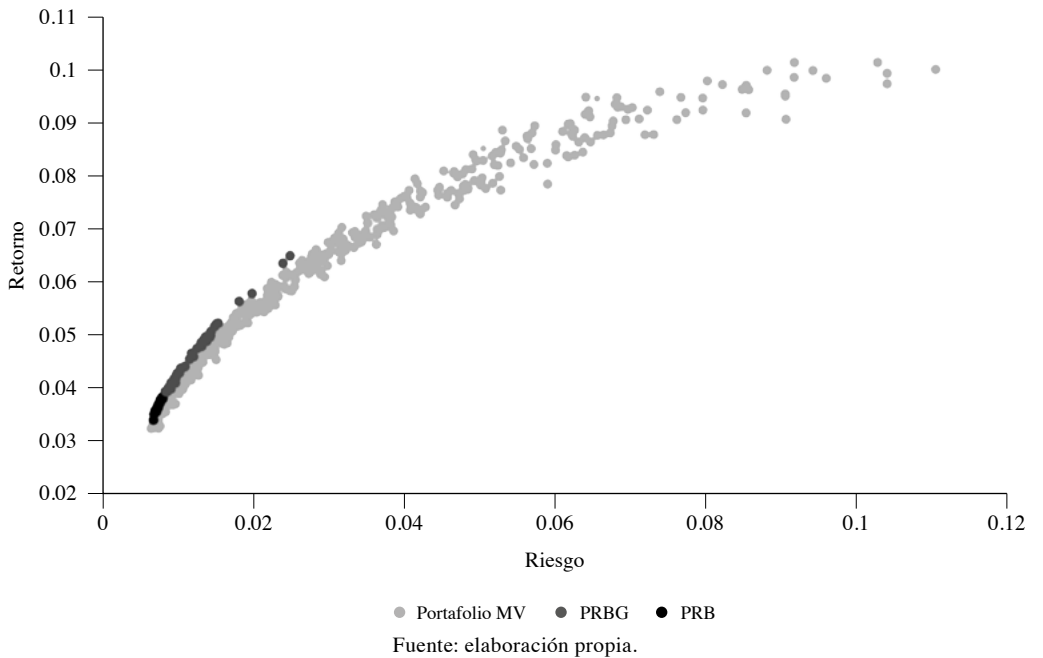


Figura 5: Comparación de los modelos MV, PRB y PRBG con $\beta = 0,0001$



El ejercicio de sensibilidad frente al parámetro beta indica que para valores altos de este (para valores mayores a 10 ya se exhibe este comportamiento) las asignaciones de portafolio tienden a ubicarse en zonas ineficientes, al igual que lo hacen las asignaciones obtenidas por el método MV. En contraparte, valores bajos del parámetro beta tienden a ubicar las asignaciones muy cerca al portafolio de mínima varianza global y a disminuir su dispersión. Es muy importante destacar que estos resultados están en línea con los obtenidos por Meucci, en los que se observa que los portafolios robustos bayesianos son un subconjunto de la frontera bayesiana.

Posteriormente, al implementar un ejercicio práctico sobre el mercado estadounidense, se observa que durante el proceso de maximización del modelo robusto bayesiano general, para un nivel de beta bajo (0,0001) se llega a los mismos resultados de asignaciones que se obtienen por el modelo de Meucci. Estos resultados permiten ver que el modelo original de Meucci es consistente y es coherente con lo enunciado anteriormente, en cuanto a que el conjunto o la frontera eficiente robusta bayesiana general es un subconjunto de la frontera eficiente robusta bayesiana de Meucci, que a su vez es un subconjunto de la frontera bayesiana.

Al evaluar las asignaciones en el tiempo de muestra de los portafolios por el método MV y el modelo robusto bayesiano general, se observa cómo este último genera asignaciones que son más consistentes en el tiempo y no son tan susceptibles a las variaciones como sí lo son las asignaciones por el modelo MV, como se observa en las figuras 6 y 7. Allí se muestra que las asignaciones del modelo MV tienden a concentrarse en algunas de las acciones, las que en cada momento presenten un mejor rendimiento; por el contrario, las asignaciones del portafolio robusto bayesiano general tienden a ser más diversificadas y este atributo se mantiene en el tiempo.

La figura 8 muestra el desempeño dentro de la muestra de los portafolios óptimos. En esta figura se observa cómo en el periodo inicial, entre agosto de 2013 y diciembre de 2019, momento en que el portafolio tiene un notable auge, la estrategia clásica de Markowitz posee un mejor rendimiento; en línea con los resultados que evidencia Meucci (2011), se podría concluir que si el mercado se hubiera seguido comportando bajo la tendencia que tenía en ese periodo, el portafolio robusto bayesiano no sería una estrategia óptima de inversión, esto se encuentra muy alineado con la propiedad del método de optimización empleado del peor de los casos, en el que se sacrifica rendimiento en momentos de auge, para ganar mejor rendimiento en los momentos de crisis.

Figura 6: Asignaciones del portafolio MV

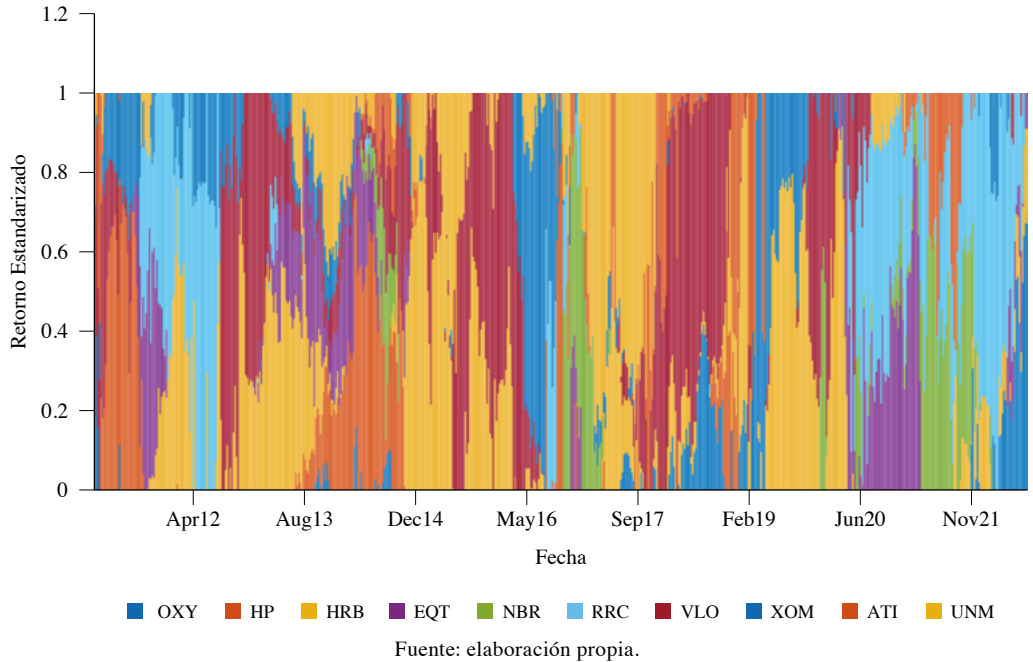


Figura 7: Asignaciones de portafolio robusto bayesiano general

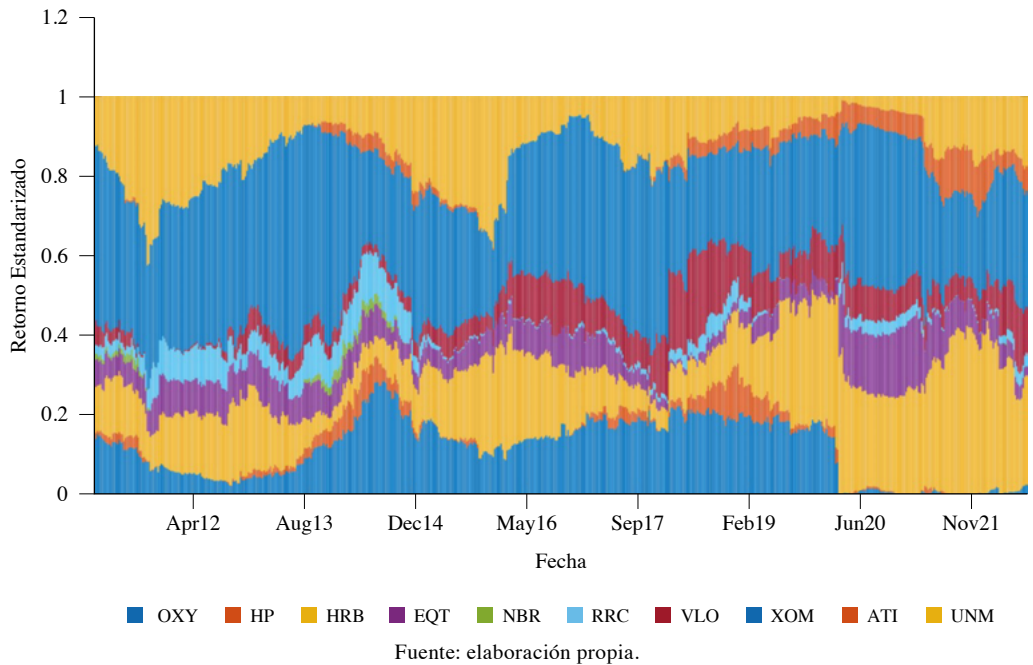
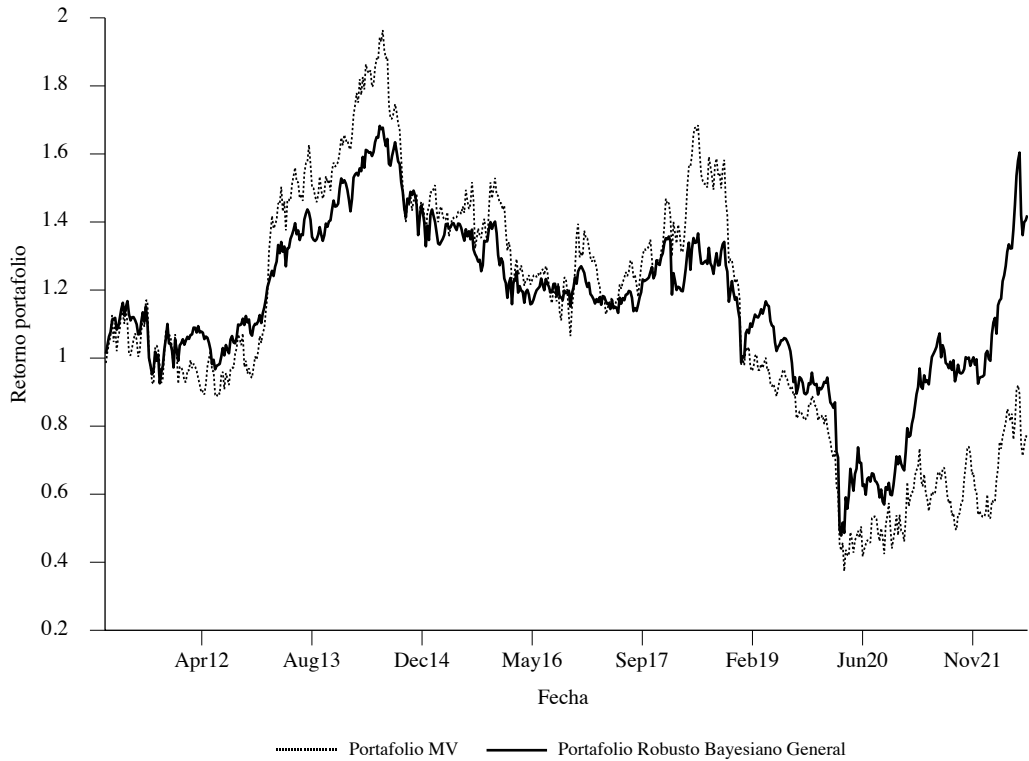


Figura 8: Desempeño de los portafolios óptimos



Fuente: elaboración propia.

Por otra parte, las ventajas de la estrategia robusta bayesiana se observan frente al comportamiento del mercado en los años posteriores a 2019, en donde si bien el comportamiento del mercado es muy pobre¹, el comportamiento de esta estrategia es dominante frente al de la estrategia generada por el modelo MV. Además, al observar algunas medidas de estos, se evidencia que el modelo robusto bayesiano presenta un mejor desempeño: la medida de Sharpe de ambos portafolios muestra que el modelo PRBG permite obtener un mayor retorno por el riesgo asumido (28,4%), mientras que para el caso de MV, dadas las condiciones de los activos ponderados bajo este criterio, presenta una rentabilidad menor al activo libre de riesgo, que en este caso son los bonos del tesoro de Estados Unidos para 10 años (tabla 2).

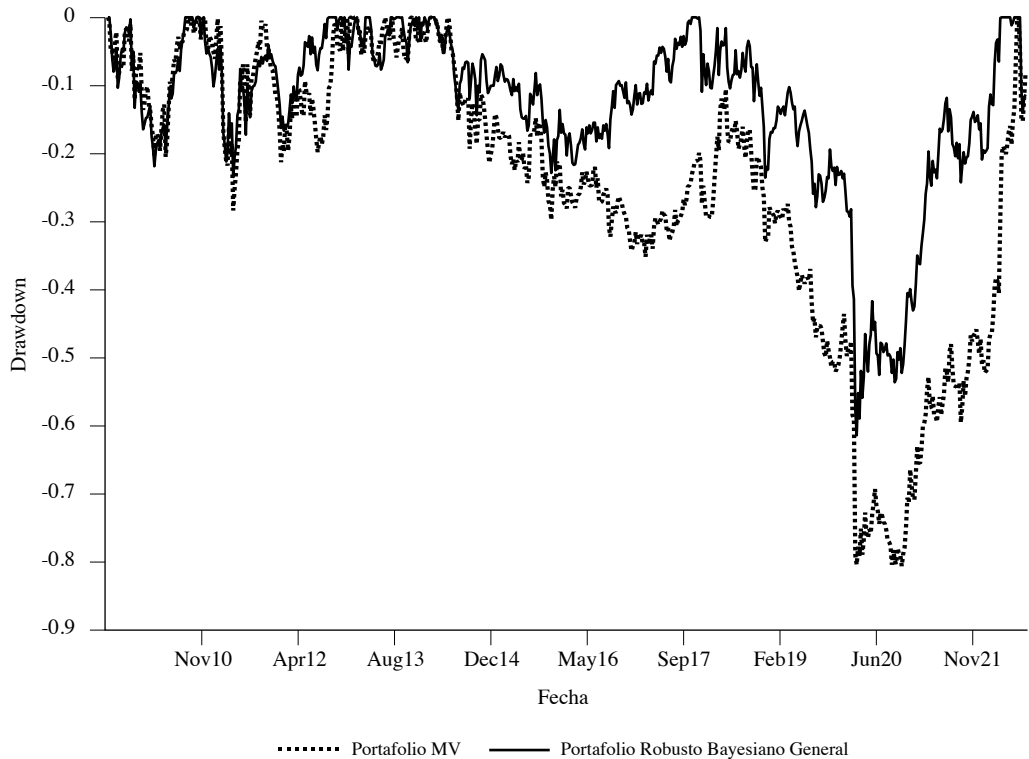
¹ Contexto que se nota claramente al llegar al periodo de crisis de la pandemia del covid-19.

Tabla 2. Indicadores de desempeño de los portafolios MV y PRBG

Medida	Modelo MV (%)	Modelo PRBG (%)
Sharpe	-7,6	28,4
Drawdown	85,8	65,1

Fuente: elaboración propia.

Por otro lado, al analizar el máximo valor de *drawdown*, se evidencia que la caída de la rentabilidad más pronunciada respecto al punto de máximo rendimiento fue para el modelo MV. Las caídas son más pronunciadas al usar las ponderaciones del modelo clásico.

Figura 9: *Drawdown* de los portafolios

Fuente: elaboración propia.

4. Conclusiones

El modelo de PRBG tiene en cuenta la aversión al riesgo de mercado y la aversión al riesgo de estimación, por tanto, permite obtener portafolios más conservadores. Aunque esto puede representar una desventaja en los periodos alcistas del mercado, ocurre lo contrario en los periodos bajistas, como ha ocurrido recientemente debido a la presencia de recurrentes periodos de recesión y crisis. Esta es una característica que el PRBG conserva del modelo de portafolio robusto, ya que la optimización se realiza sobre el peor de los escenarios.

Por lo anterior, el enfoque propuesto ofrece ventajas importantes sobre el modelo MV de Markowitz, ya que no solo permite superar algunas de sus limitaciones, sino que permite crear estrategias de inversión que alcanzan mejores desempeños en periodos de alta incertidumbre. Se propone para futuros trabajos llevar a cabo el ejercicio de evaluación fuera de muestra, así como la verificación de los resultados utilizando otras medidas de riesgo, por ejemplo, usando medidas de riesgo a la baja, o incluso con enfoques alternativos al modelo MV.

Referencias

- Avramov, D. y Zhou, G. (2010). Bayesian portfolio analysis. *Annual Review of Financial Economics*, 2(1), 25-47. <https://faculty.runi.ac.il/davramov/paper10.pdf>
- Bade, A., Frahm, G. y Jaekel, U. (2009). A general approach to Bayesian portfolio optimization. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70(2), 337-356. <https://doi.org/10.1007/s00186-008-0271-4>
- Best, M. y Grauer, R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Science*, 37(8), 980-989. <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.8.980>
- Black, F. y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43. <https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- Fabozzi, F., Focardi, S., Kolm, P. y Pachamanova, D. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons.
- Fama, E. y French, K. (1993). Common risk factors in the returns on stocks and bonds. *Journal of financial economics*, 33(1), 3-56. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(93\)90023-5](https://doi.org/10.1016/0304-405X(93)90023-5)

- Garlappi, L., Uppal, R. y Wang, T. (2007). Portfolio selection with parameter and model uncertainty: A multi-prior approach. *The Review of Financial Studies*, 20(1), 41-81. <https://doi.org/10.1093/rfs/hhl003>
- Georgantas, A. (2020). *Robust Optimization Approaches for Portfolio Selection: A Computational and Comparative Analysis*. Working paper. <https://arxiv.org/abs/2010.13397>
- Goldfarb, D. e Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28(1), 1-38. <https://doi.org/10.1287/moor.28.1.1.14260>
- Halldórsson, B. y Tütüncü, R. H. (2003). An interior-point method for a class of saddle-point problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 116(3), 559-590. <https://doi.org/10.1023/A:1023065319772>
- Hoffman, M., Brochu, E. y De Freitas, N. (2011). Portfolio allocation for ayesian optimization. En *Proceedings of the Twenty-Seventh Conference on Uncertainty in Artificial Intelligence*, 327-336. <https://dl.acm.org/doi/abs/10.5555/3020548.3020587>
- Kim, W. C., Kim, J. H., Ahn, S. H. y Fabozzi, F. J. (2013). What do robust equity portfolio models really do? *Annals of Operations Research*, 205(1), 141-168. <https://doi.org/10.1007/s10479-012-1247-6>
- Kim, W. C., Kim, J. H. y Fabozzi, F. J. (2015). *Robust Equity Portfolio Management: Formulations, Implementations, and Properties Using MATLAB*. John Wiley & Sons.
- Kim, J. H., Kim, W. C., Kwon, D. G. y Fabozzi, F. J. (2018). Robust equity portfolio performance. *Annals of Operations Research*, 266(1), 293-312. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2739-1>
- Lobo, M. S., Vandenberghe, L., Boyd, S. y Lebret, H. (1998). Applications of second-order cone programming. *Linear Algebra and its Applications*, 284(1-3), 193-228. [https://doi.org/10.1016/S0024-3795\(98\)10032-0](https://doi.org/10.1016/S0024-3795(98)10032-0)
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.
- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. New Heaven: Yale university Press.

- Meucci, A. (2005). *Risk and asset allocation* (vol. 1). Springer.
- Meucci, A. (2011). *Robust Bayesian Allocation*. SSRN Working paper 681553. https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=681553
- Michaud, R. (1998). *Efficient asset management: A practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Michaud, R. y Michaud, R. (2008). Estimation error and portfolio optimization: A resampling solution. *Journal of Investment Management*, 6(1), 8-28.
- Nesterov, Y. y Nemirovsky, A. (1993). *Interior Point Polynomial Methods in Convex Programming: Theory and Algorithms*. SIAM.
- Pachamanova, D. y Fabozzi, F. (2012). Equity portfolio selection models in practice. *Encyclopedia of Financial Models*, 1(1), 61-87. <https://doi.org/10.1002/9781118182635.efm0046>
- Tütüncü, R. y Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1), 157-187. <https://doi.org/10.1023/B:ANOR.0000045281.41041.ed>
- Williams, J. (1938). *The Theory of Investment Value*. Harvard University Press.
- Zapata, C. (2021). Optimización robusta de portafolios: conjuntos de incertidumbre y contrapartes robustas. *ODEON*, 20, 93-121. <https://doi.org/10.18601/17941113.n20.04>