

Modelo multifactorial Heath-Jarrow-Morton: una aplicación práctica bajo la estructura de componentes principales

Heath-Jarrow-Morton multifactorial model: a practical application under the principal component structure

Robinson Alexander García Gaona*

* Magíster en finanzas. Director académico y profesor del programa de Contaduría Pública, Corporación Universitaria Minuto de Dios, Colombia. [ragarciaga7@gmail.com]; [ORCID ID: 0000-0002-6339-7020].

Artículo recibido: 01 de junio de 2022.

Aceptado: 15 de junio de 2022.

Para citar este artículo:

García Gaona, R. A. (2022). Modelo multifactorial Heath-Jarrow-Morton: una aplicación práctica bajo la estructura de componentes principales. *Odeon*, 22, 127-157.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n22.05>

Resumen

Los escenarios globales y altamente dinámicos en los cuales se desarrolla el mundo de las finanzas se caracterizan actualmente por presentar una volatilidad creciente de las tasas de interés. Debido a esto, se hace necesario establecer metodologías y modelos que permitan entender dichas fluctuaciones de las tasas de interés, con la finalidad de que las empresas adopten posiciones privilegiadas frente a la competencia. El artículo realiza una aproximación conceptual y práctica al modelo de tasas de interés de Heath-Jarrow-Morton, para ello, el análisis integrará el enfoque de componentes principales con la finalidad de determinar los factores que ayudan a explicar en mayor medida la dinámica de las tasas de interés. A su vez, se brindará un contexto general de los enfoques de equilibrio y libre de arbitraje, sobre los cuales están definidos todos los modelos de tasas de interés. Para el caso de las simulaciones de la tasa corta se hará uso de la US Treasury Yield.

Palabras clave: modelos de tasa corta; componentes principales; calibración; precios de los bonos; HJM; simulación de riesgo; estructura temporal.

Clasificación JEL: G10, G11, G12, C32, C40.

Abstract

The global and highly dynamic scenarios in which the world of finance develops are currently characterized by increasing volatility in interest rates. Due to this, it is necessary to establish methodologies and models that make it possible to understand such fluctuations in interest rates, in order for companies to adopt privileged positions against the competition. The present work makes a conceptual and practical approach to the Heath-Jarrow-Morton interest rate model, for this, the analysis will integrate the principal components approach in order to be able to determine the factors that help to further explain the dynamics of interest rates. In turn, a general context of the equilibrium and arbitrage-free approaches will be provided, on which all interest rate models are defined. In the case of the short rate simulations, the US Treasury Yield will be used.

Keywords: Short rate models; maximum likelihood; bond prices; Vasicek; HJM; CIR; BDT; risk simulation; term structure.

JEL classification: G10, G11, G12, C32, C40.

Introducción

De acuerdo con Cheyette (2003), un modelo de tasa de interés es una descripción probabilística de la evolución futura de dichas tasas. Según la información de hoy, las tasas de interés futuras son inciertas. Por lo tanto, podríamos decir que un modelo de tasa de interés es una caracterización de esa incertidumbre. Las últimas dos décadas han visto el desarrollo de una tremenda profusión de modelos para la valoración de instrumentos financieros sensibles a las tasas de interés. Para comprender mejor estos modelos, es útil reconocer una característica importante que permite distinguirlos, dado que es de particular relevancia para los profesionales que desean implementar algoritmos de valoración.

En las últimas décadas, la literatura financiera se ha nutrido del desarrollo de varias clases de modelos que se han enfocado en abordar las complejidades en el proceso de descripción del comportamiento de la tasa corta. Estos modelos de tasa corta no se enfocan de manera exclusiva en elaborar pronósticos precisos, sino en explicar en gran medida aspectos estadísticos del comportamiento del mercado. Entre las propiedades del mercado que abordan estos modelos se destacan: tendencia, reversión a la media, sesgo, curtosis, colas pesadas, intervalos de confianza, probabilidades de ocurrencia, precios promedio, entre otras.

Ahora bien, muchos de estos modelos, tanto en el caso discreto como en el continuo, han sido propuestos para modelar el comportamiento de las tasas de interés, algunas veces partiendo de conocimientos *a priori* y algunas otras veces utilizando metodologías que permitan inferir particularidades del proceso. Los modelos de series de tiempo (en desarrollos discretos) y las ecuaciones diferenciales estocásticas (en los casos continuos) han sido dos de las metodologías más usadas tanto en la modelación como en el análisis de los procesos de tasas de interés de acuerdo con Palacio Montoya (2009).

Estos modelos –que en su gran mayoría son impulsados por una sola fuente de incertidumbre– pueden, en determinadas circunstancias, ser considerados como insuficientes o limitados para describir la evolución completa de la dinámica para la estructura temporal. Frente a esta limitante, surgen otras alternativas como los modelos multifactoriales, los cuales pueden proporcionar una descripción más realista del comportamiento de transición de la estructura temporal de las tasas de interés. En tal sentido, los estudios de este tipo se consideran para el caso de dos o tres factores. Particularmente, el presente estudio abordará la alternativa desde el escenario de tres factores.

Debido al bajo desempeño de los modelos de un factor en la captura de datos empíricos que contribuyeran en la explicación de la dinámica de la tasa corta, surge el trabajo pionero de Heath, Jarrow y Morton (1992) dado que, para este caso, los autores lograron ampliar y generalizar este modelo con el fin de permitir que más de un factor influyera en los tipos a plazo. En este modelo se permite que la volatilidad cambie a lo largo del tiempo y, por lo tanto, requiere unas especificaciones más complejas respecto a las formas funcionales.

La ventaja de la metodología de tipo Heath, Jarrow y Morton sobre el enfoque de tasa corta es que logra un ajuste automático a la curva de rendimiento, mientras que los modelos de tasa corta requieren cálculos adicionales.

El modelo HJM es quizás uno de los más complejos de desarrollar teniendo en cuenta que el requisito previo para construirlo es determinar primero los factores o componentes que se utilizarán en dicho modelo. Estos factores se deciden mediante la realización de un análisis de componentes principales (PCA) sobre la estructura temporal subyacente de las tasas de interés.

Los datos que fueron utilizados para la construcción del modelo correspondieron con las tasas diarias de la curva de rendimiento de los bonos del Tesoro de Estados Unidos durante el periodo comprendido entre el 9 de junio de 2017 y el 31 de diciembre de 2019. En términos más específicos, las referencias del mercado usadas fueron de 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, 2 años, 3 años, 5 años, 7 años, 10 años, 20 años y 30 años.

El artículo tiene tres secciones. En la primera se hace una aproximación a las razones por las cuales son importantes los modelos de tasas de interés. En la segunda sección se abordará el modelo HJM desde una perspectiva teórica y referencial, y, por último, se hará la presentación formal del proceso de implementación práctica del modelo con sus respectivos ajustes y calibración de parámetros.

1. Antecedentes teóricos de los modelos de tasa de interés

Las finanzas cuantitativas y sus aplicaciones a la modelación de tipos de interés, tal como las conocemos hoy en día, surgieron en los años setenta en Estados Unidos, y estas se empezaron a formalizar cuando inversores comenzaron a utilizar herramientas técnicas soportadas en fórmulas matemáticas que facilitarían el entendimiento y la valoración de precios de acciones y bonos. Bajo este nuevo enfoque de entendimiento de las finanzas, los primeros modelos continuos de

tipos de interés se formularon en el marco de la teoría de las ecuaciones diferenciales determinísticas. En este escenario, estos modelos centran su atención en definir como estable el comportamiento de los tipos de interés, y con ello se empezarán a denominar modelos de tipos de interés con reversión a la media.

La volatilidad en los tipos de interés en la actualidad puede obedecer a una multiplicidad de factores que determinan finalmente el valor de los tipos de interés. Estos factores pueden considerarse de naturaleza aleatoria, lo que a su vez ha promovido el interés por diseñar herramientas de análisis que reformulen el entendimiento de los modelos clásicos deterministas por nuevos modelos matemáticos donde se considere esta aleatoriedad. La introducción de estos componentes aleatorios se realizó formalmente mediante la utilización y aplicación del proceso estocástico de Wiener o también conocido como movimiento browniano, razón por la cual al inicio de este desarrollo teórico se hizo su presentación formal. La nueva forma de entender el comportamiento de los activos financieros y su respectiva volatilidad requirió un cálculo estocástico especial que permitiera entender la complejidad de tales modelos y llevarlos a un escenario práctico, siendo el trabajo desarrollado por Kiyoshi Itô en 1951 la línea base de esta propuesta matemática. Posteriormente, fue Merton (1977) quien introdujo el cálculo estocástico en su aplicación en las finanzas, a través de su artículo “Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case”.

La primera generación de modelos de tasa de interés estocástica utiliza la tasa corta instantánea como la variable de estado. Las dos ventajas clave de los modelos de tasa corta son su simplicidad general y el hecho de que a menudo conducen a fórmulas analíticas para la valoración de bonos y opciones. Esta manejabilidad de los modelos a corto plazo significa que el precio de un derivado dado a menudo se puede calcular rápidamente, lo cual es muy importante en situaciones en las cuales es necesario realizar muchas valoraciones de manera simultánea.

Las tasas de interés se modelan comúnmente utilizando ecuaciones diferenciales estocásticas (SDE). Los modelos de un factor usan una SDE para representar la tasa corta. Las SDE utilizadas para modelar las tasas de interés deben capturar algunas de las propiedades de mercado de dichas tasas, como la reversión a la media o una volatilidad que depende del nivel de las tasas de interés.

Los modelos de tasa corta tienen dos partes: en primera instancia, aquella que especifica la tasa promedio de cambio (“deriva”) de la tasa corta en cada

instante, y el otro componente especifica la volatilidad instantánea de la tasa corta. La notación convencional para esto es:

$$dr(t) = \mu(t, r(t))dt + \sigma(r, t)dW(t) \quad (1)$$

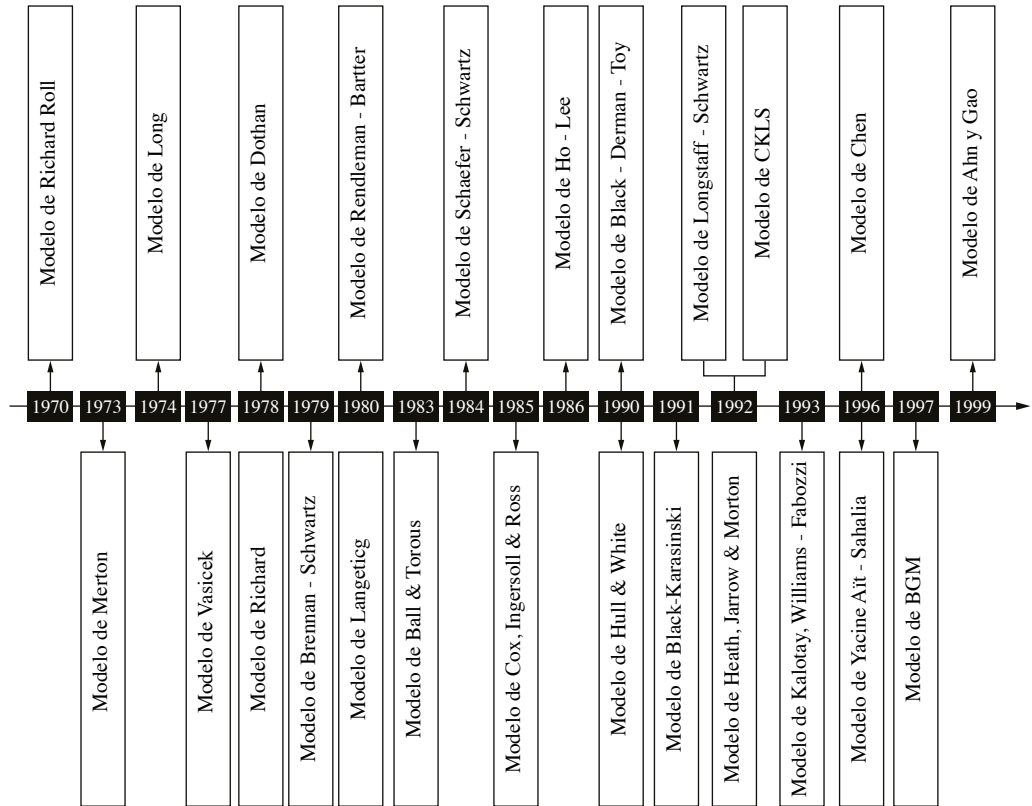
donde W_t es un movimiento browniano bajo la medida neutral al riesgo Q . Además, supone que, para cualquier $T \geq 0$, el precio del bono depende de la tasa corta instantánea. El lado izquierdo de esta ecuación es el cambio en la tasa corta sobre el siguiente instante, a su vez el primer término a la derecha es la deriva multiplicada por la longitud del intervalo de tiempo. El segundo es la volatilidad multiplicada por un incremento aleatorio normalmente distribuido, el cual se asocia con el término desconocido o de riesgo, ya que contiene el término aleatorio, el cual dicta las características de distribución de las tasas de interés. Dependiendo del modelo, las tasas de interés se distribuyen normal o lognormalmente. Para la mayoría de los modelos, el componente de deriva se determinará mediante una técnica numérica para que coincida con el punto inicial de la estructura a término, por lo que el precio del bono se puede expresar como:

$$B(t, T) = B(t) \mathbb{E}_Q \left(\frac{B(T, T)}{B(T)} \middle| \mathfrak{F}_t \right) = \mathbb{E}_Q \left(\exp \left(- \int_t^T r(s) ds \right) \middle| \mathfrak{F}_t \right) \quad (2)$$

Esta ecuación, denominada ecuación fundamental de determinación de precios de bonos (ecuación de Vasicek), describe la estructura de plazos y su comportamiento. Observe que la ecuación del precio de un bono se obtuvo inicialmente como la solución de una ecuación diferencial parcial de segundo orden bajo ciertos supuestos, pero es válida en general para cualquier modelo de estructura de plazos libre de arbitraje. La ecuación es válida incluso en el caso de múltiples factores o múltiples fuentes de riesgo si los productos de la ecuación se interpretan como productos escalares de vectores.

En la figura 1 se presentan los principales exponentes que han dado forma a la teoría de la modelación de las tasas de interés.

Figura 1: Principales exponentes de la teoría de la modelación de las tasas de interés



En la figura 1 se observa la evolución del proceso de formalización de las propuestas teóricas de los modelos de tipos de interés, evidenciándose que los primeros modelos estocásticos se deben a Roll (1970) y Merton (1977). Sin embargo, fue Vasicek (1977) quien en su trabajo “An equilibrium characterization of the term structure”, presentó de manera detallada un modelo estocástico de reversión a la media para los tipos de interés. Esta propuesta se convirtió en la base conceptual en la modelización de los tipos de interés. Posteriormente se han desarrollado otros modelos más elaborados como el de Cox-Ingersoll-Ross (1985) o su generalización debida a Maghsoodi (1996) en su artículo denominado “Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation”, pero todos ellos basados en las ideas que formuló Vasicek en su trabajo, y que han tenido una gran repercusión en el ámbito financiero.

De acuerdo con Botero y Restrepo (2008), estos modelos de tasas de interés se pueden clasificar en modelos de equilibrio y modelos de no arbitraje. Los primeros, se basan en una serie de supuestos referentes a la economía en la cual operan y derivan un proceso para la tasa de interés de corto plazo. En dichos modelos las estructuras a plazos de tipos de interés y de volatilidades se determinan de forma endógena. Aquí se pueden referenciar trabajos como los de Vasicek (1977) y Cox-Ingersoll-Ross (1985), por mencionar solo los más representativos. Por otro lado, los modelos de no arbitraje tratan las estructuras antes mencionadas como exógenas, para procurar que los precios de los títulos dados por el modelo coincidan con los observados en el mercado. En este plano se pueden resaltar los trabajos de Ho y Lee (1986), Hull y White (1990), Black, Derman y Toy (1990); Heath, Jarrow y Morton (1990/92) y Black y Karasinski (1991).

Otra manera de clasificar los trabajos de tasa de interés es de acuerdo con el número de factores aleatorios objeto de análisis. Mientras los modelos unifactoriales consideran la tasa corta de interés como único factor de relevancia, aspecto que los hace menos robustos en algunos casos, dado que esto a su vez depende de las características de los datos, los modelos multifactoriales incluyen por lo menos dos factores relevantes en su estructura a plazos de tipo de interés, por ejemplo, la tasa corta y su tendencia. Con respecto a esta última caracterización se pueden mencionar los trabajos de Brennan y Schwartz (1979) y Heath *et al.* (1992).

A esta familia de modelos unifactoriales citados previamente también se suman los modelos multifactoriales, entre los cuales se encuentran: Longstaff y Schwartz (1992), Langetieg (1980), Jegadeesh y Titman (1993) y Gong y Remolona (1997), de acuerdo con Svodova(2004). Sin embargo, de acuerdo con Rebonato (1996), la teoría más completa sobre los modelos de tipos de interés es la propuesta por Heath *et al.* (1992) (en adelante HJM). En su trabajo, HJM proponen toda una estructura para la formulación de modelos de tipos de interés, la cual contempla como casos especiales la mayoría de los modelos existentes en la literatura, incluidos modelos más modernos como el de Brace *et al.* (1997), Miltersen *et al.* (1997) y Jamshidian (1997), estos últimos son conocidos como modelos de mercado, siendo los más populares y promisorios en la actualidad Brigo y Mercurio (2006, p. 195).

1.2 Modelos de tasa de interés de equilibrio o endógenos

En el artículo de opciones, futuros y otros derivados de John Hull, se indica que los modelos de equilibrio se basan en algunos supuestos sobre variables económicas y definen un proceso para la tasa corta r . El nombre equilibrio proviene del hecho de que estos modelos tienen como objetivo lograr un equilibrio entre la oferta de bonos y otros derivados de tasas de interés y la demanda de inversionistas.

Los modelos de equilibrio toman solo la tasa corta inicial como entrada y producen la estructura actual de las tasas de interés como producto. Por lo tanto, según Brigo y Mercurio, también se les llama modelos endógenos de estructura a término. Dado que su entrada no toma suficiente información, los precios de los bonos de los modelos de equilibrio difieren de los precios de los bonos de mercado. Esto significa que estos modelos no están libres de arbitraje y permiten el arbitraje entre precios de bonos. En otras palabras, los modelos de equilibrio no pueden calibrarse perfectamente para la curva de rendimiento.

La mayoría de estos modelos supone que la única variable de estado relevante es el tipo de interés instantáneo, r , el cual es modelizado según la ecuación diferencial estocástica.

$$dr = \mu(r, \theta)dt + \sigma(r, \theta)dw \quad (3)$$

Donde:

dr : indica el cambio en el tipo de interés instantáneo.

$\mu(\cdot)$ y $\sigma(\cdot)$ son respectivamente la deriva y difusión del proceso estocástico

dw : es un movimiento browniano.

Esta expresión refleja que tanto la media como la varianza condicional de los cambios en el tipo de interés dependen del nivel de los tipos de interés (Moreno, 2000).

La tabla 1 presenta algunos de los exponentes más reconocidos en la modelación de tasas de interés que abordan su propuesta desde un enfoque de equilibrio o endógeno.

Tabla 1: Modelos más populares de tasa de interés de equilibrio o endógenos

Autor	Modelo	Investigación	Año	Expresión matemática
Richard Roll	Roll	The behavior of interest rates: The application of the efficient market model to U.S. treasury bills	1970	$dr = \alpha_r dt + \sigma_r dW$
Robert C. Merton	Merton	Theory of rational option pricing	1973	$dr = \alpha_r dt + \sigma_r dW_t^*$
Oldrich Vasicek	Vasicek	An equilibrium characterization of the term structure	1977	$dr(t) = \beta[\theta - r(t)]dt + \sigma dW(t)$
L. Uri Dothan	Dothan	On the Term structure of interest rates	1978	$dr_t = ar_t dt + \sigma r_t dW_t$
Scott F. Richard	Richard	An arbitrage model of the term structure of interest rates		$dR = \alpha_r(R)dt$ $d\pi = \alpha\pi(\pi)dt$
Terence C. Langetieg	Marco de equilibrio multifactorial de Langetieg	A multivariate model of the term structure	1980	$dr(t) = (a(t) + b(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t)$
Stephen M. Schaefer–Eduardo S. Schwartz	Schaefer y Schwartz	A two-factor model of the term structure: An approximate analytical solution	1984	$ds = m(\mu - s)dt + \gamma dz_1$ $dl = \beta(s, l, t)dt + \sigma\sqrt{l}dz_2$
Richard J. Rendleman, Jr. y Brit J. Barter	Rendleman y Barter	The pricing of options on debt securities	1980	$dr(t) = \theta r(t)dt + \sigma r(t)dW(t)$
Jonathan E. Ingersoll, John C. Cox, Stephen A. Ross	Cox, Ingersoll y Ross	An intertemporal general equilibrium model of asset prices	1985	$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t$
Michael J. Brennan y Eduardo S. Schwartz	Brennan y Schwartz	A continuous time approach to the pricing of bonds	1986	$dr(t) = K(\theta - r(t))dt + \sigma r(t)dW(t)$
George Andrew Karolyi, Francis A. Longstaff, Anthony B. Sanders, K. C. Chan	CKLS	An empirical comparison of alternative models of the term structure of interest rates	1992	$dr_t = (\alpha - \beta r_t)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$

Autor	Modelo	Investigación	Año	Expresión matemática
Francis A. Longstaff y Eduardo S. Schwartz	Longstaffy Schwartz	Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium Model	1992	$dX = (a - bX)dt + c\sqrt{X}dZ_2$ $dY = (d - eY)dt + f\sqrt{X}dZ_3$
Clifford A. Ball y Walter N. Torous	Ball y Torous	Bond price dynamics and options	1993	$dX = \mu X(x, t)dt + \sigma X(x, t)dZ$
Yacine Aït-Sahalia	Yacine Aït-Sahalia	Nonparametric pricing of interest rate derivative securities	1996	$dr_t = (\alpha_{-1} r_t^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 r_t + \alpha_2 r_t^2)dt + \sigma r_t^\gamma dW_t$
Lin Chen	Chen	Stochastic mean and stochastic volatility — A three-factor model of the term structure of interest rates and its application to the pricing of interest rate derivatives	1996	$dr(t) = k(\theta_t - r_t)dt + \sqrt{v}dW_1(t)$ $d\theta(t) = v(\bar{\theta} - \theta(t))dt + \zeta\sqrt{\theta(t)}dW_2(t)$ $dv(t) = \mu(\bar{v} - v(t))dt + \eta\sqrt{v(t)}dW_3(t)$
Dong-Hyun Ahn y Bin Gao	Ahn y Gao	A parametric nonlinear model of term structure dynamics	1999	$dr_t = k(\theta - r(t))r(t)dt + \sigma r(t)^{1.5}dW_t$

1.3 Modelos de tasas de interés de no arbitraje

Los modelos sin arbitraje utilizan la información completa de la estructura a término, para ello toman como base la estructura actual (es decir, la curva de rendimiento) como entrada. En ese sentido, los modelos libres de arbitraje son modelos de estructura a término exógenos.

Para los modelos sin arbitraje, los precios de los bonos del modelo son equivalentes al mercado. Es decir, la curva de rendimiento del modelo se ajusta perfectamente a la del mercado. Esta representación se puede evidenciar en Ho-Lee, Hull-White, Extended CIR y Black-Derman-Toy.

Todos los modelos de tipos de interés bajo el esquema de no arbitraje son casos especiales derivados de la siguiente forma general:

$$df(r(t)) = (\theta(t) + \rho(t)g(r(t)))dt + \sigma(r(t), t)dW_t \quad (4)$$

donde f y g son funciones adecuadamente elegidas de la tasa de interés de corto plazo y son los mismos para la mayoría de los modelos presentados aquí. La variable θ se conoce como la deriva de la tasa, y ρ es el término medio de reversión a una tasa de equilibrio a corto plazo, σ es la volatilidad local de dichas tasas y W_t es un proceso de Wiener distribuido normalmente que captura la aleatoriedad de cambios futuros en la tasa de corto plazo.

La ecuación anterior es un modelo de un factor que solo refleja la relación con la tasa a corto plazo. Su primer componente (el término dt) es el cambio esperado o promedio en la tasa a corto plazo durante un periodo corto de tiempo. El segundo componente es el término de riesgo, ya que incluye el componente dW_t .

Los modelos sin arbitraje constituyen un marco de valoración de derivados de tipos de interés que goza de gran aceptación. Esto se debe a que garantizan mínimamente que los precios de mercado de los bonos son exactos. Los modelos de equilibrio no fijan el precio de los bonos exactamente, lo que puede tener efectos significativos sobre los correspondientes activos contingentes.

Algunos de los modelos más populares identificados en el marco del presente proyecto se relacionan en la tabla 2.

Tabla 2: Modelos más populares de tasa de interés de no arbitraje

Autor	Modelo	Investigación	Año	Expresión matemática
Thomas Ho Sang, Bin Lee.	Ho y Lee	Term structure movements and pricing interest rate contingent claims	1986	$dr_t = h_t dt + \sigma dW_t$
John C. Hull, Alan White	Hull y White	Pricing interest rate derivative securities	1990	$dr(t) = (\theta(t) - \beta(t)r(t))dt + \sigma(t)dW(t)$
Fischer Black, Emanuel Derman, William Toy	Black, Derman y Toy	A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options	1990	$d\ln(r) = \left[\frac{\sigma'}{\sigma} \ln(r) \right] dt + \sigma_t dW_t$
Fischer Black, Piotr Karasinski	Black y Karasinski	Bond and option pricing when short rates are log-normal	1991	$d(\ln r) = (\theta(t) - \phi(t)\ln r)dt + \sigma(t)dW_t$
David Heath, Robert Jarrow, Andrew Morton	Heath, Jarrow y Morton	Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claim valuation	1992	$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW(t)$

Autor	Modelo	Investigación	Año	Expresión matemática
Andrew J. Kalotay, George O. Williams, Frank J. Fabozzi	Kalotay-Williams-Fabozzi	A Model for Valuing Bonds and Embedded Options	1993	$d\ln(r(t)) = \theta(t)dt + \sigma dZ$
Alan Brace, Dariusz Gatarek, Marek Musiela	Brace, Gatarek y Musiela	The market model of interest rate dynamics	1997	$dr(t,x) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(r(t,x) + \frac{1}{2} \sigma(t,x)^2 \right) dt + \sigma(t,x) dW_t \right)$

2. Heath-Jarrow-Morton

El modelo HJM se basa en el trabajo de los economistas David Heath, Robert Jarrow y Andrew Morton. El trío escribió dos documentos notables a finales de la década de los ochenta que sentaron las bases para el marco de referencia del modelo HJM que recoge las siglas de sus creadores y que fue desarrollado en la Universidad de Cornell. Este modelo nace fundamentalmente del artículo “Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology”, en el cual plasman las generalidades e implicaciones del modelo.

En este capítulo se presenta la metodología desarrollada en su artículo “Bond Pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation”, publicado en 1992 en *Econometrica*, en el cual se generan curvas de rendimiento con base en la tasa *forward* actual (a todos los vencimientos) y una curva de rendimiento inicial. Para estimar los precios de un bono cupón cero a diferentes vencimientos, el modelo de Heath-Jarrow-Morton comienza con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa *forward* y, posteriormente, determina endógenamente, en un mundo neutral al riesgo, la dinámica estocástica de un bono cupón cero.

Adicionalmente, es importante precisar que el marco de referencia sobre el cual se realiza la aproximación al entendimiento teórico de este modelo se encuentra en el trabajo de Venegas y Vasicek (2021), tal y como se detallará a continuación.

El Heath-Jarrow-Morton es un marco general para modelar la evolución de las tasas de interés (tasas a plazo en particular). Describe el comportamiento del precio futuro en t de un bono de cupón cero $B(t, T)$ pagando 1 unidad en el

momento T . El modelo está directamente calibrado a la curva de rendimiento observada.

La metodología HJM es similar a la de Ho-Lee (1986) y Hull-White (1990) en varios sentidos. En primer lugar, se requiere una curva de rendimiento inicial, la cual es proporcionada por el mercado en una fecha anterior. Asimismo, la tendencia de la tasa *forward* instantánea se calibra de tal forma que el premio al riesgo estandarizado por volatilidad es cero. Las diferencias con Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) son, básicamente:

1. El proceso de valuación en HJM se inicia con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa *forward*.
2. La hipótesis de expectativas en HJM para valorar un bono es que el nominal se descuenta con el promedio de la tasa *forward* durante la vigencia del instrumento, razón por lo que el precio del bono es una variable aleatoria.
3. La calibración en HJM es un procedimiento implícito en la metodología y no requiere argumentos de ajuste como en el caso de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990). En virtud de que, bajo la metodología HJM, el precio de un bono es una variable aleatoria, el método Monte Carlo (MC) es una herramienta muy útil en la práctica. Una ventaja de la metodología HJM que debe destacarse es que puede ser extendida a varios factores de riesgo; por ejemplo, factores de corto y largo plazo. No obstante, una limitación de la metodología HJM es que se pueden producir tasas *forward* negativas con probabilidad positiva.

Vale la pena mencionar que cuando se parte de una especificación exógena para la dinámica estocástica de la tasa corta, la hipótesis de expectativas para valorar un bono es que, primero, el nominal se descuenta con el promedio de la tasa corta durante la vigencia del título y, posteriormente, se toma el valor esperado condicional en la información disponible en la fecha de colocación. A partir del teorema de Feynman-Kac, como se vio en su momento, se tiene que esta es la única hipótesis de expectativas que es congruente con el enfoque de ecuaciones diferenciales parciales (EDP), visto en varios de los capítulos anteriores. De esta manera, la metodología HJM no es compatible con EDP.

El modelo se ajusta a los precios actuales de los bonos y genera una dinámica de las tasas *forward* mediante:

$$f(t, T) - f(0, T) = \int_0^t \varphi(\tau, T) \sigma(\tau, T) d\tau + \int_0^t \varphi(\tau, T) dW^*(\tau) \quad (5)$$

donde $\varphi(t, T)$ es la volatilidad de la tasa forward $f(t, T)$ y

$$\sigma(\tau, T) = \int_{\tau}^T \varphi(\tau, s) ds \quad (6)$$

es la volatilidad del bono. Si W^* , φ y σ son vectores, sus productos se interpretan como productos internos.

Para estimar los precios de un bono cupón cero a diferentes vencimientos, el modelo HJM comienza con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa *forward* y, posteriormente, determina endógenamente, en un mundo neutral al riesgo, la dinámica estocástica de un bono cupón cero.

De acuerdo con Venegas y Vasicek (2021), la metodología HJM es similar a la de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) en varios sentidos. En primer lugar, se requiere una curva de rendimiento inicial, la cual es proporcionada por el mercado en una fecha anterior. Asimismo, la tendencia de la tasa *forward* instantánea se calibra de tal forma que el premio al riesgo estandarizado por volatilidad es cero. Las diferencias con Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990) son, básicamente:

1. El proceso de valuación en HJM se inicia con una especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa *forward*.
2. La hipótesis de expectativas en HJM para valorar un bono es que el nominal se descuenta con el promedio de la tasa *forward* durante la vigencia del instrumento, razón por lo que el precio del bono es una variable aleatoria.
3. La calibración en HJM es un procedimiento implícito en la metodología y no requiere argumentos de ajuste como en el caso de Ho y Lee (1986) y Hull y White (1990). En virtud de que, bajo la metodología HJM, el precio de un bono es una variable aleatoria, el método Monte Carlo es una herramienta muy útil en la práctica.

Una ventaja de la metodología HJM que debe destacarse es que puede ser extendida a varios factores de riesgo; por ejemplo, factores de corto y largo plazo. No obstante, una limitación de la metodología HJM es que se pueden producir tasas *forward* negativas con probabilidad positiva.

2.1 Especificación exógena de la tasa *forward* instantánea

Considere un movimiento Browniano estándar $(W(t))_{t \in [0, T]}$ definido sobre un espacio fijo de probabilidad con su filtración aumentada $(\Omega, F, F_t)_{t \in [0, T]}$, P . Por simplicidad, en lo que sigue se escribirá $W(t) = W_t$. En la metodología HJM se supone que la dinámica de la tasa *forward*, $f(t, T)$ se especifica exógenamente por la siguiente ecuación diferencial estocástica

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \phi(t, T)dW_t \quad (7)$$

A su vez, se supone que el precio de un bono cupón cero está dado por

$$B(t, T) = \exp \left\{ - \int_t^T f(t, s) ds \right\} \quad (8)$$

2.2 Dinámica estocástica de la tasa corta

En esta sección se determina la ecuación diferencial estocástica que conduce a la tasa corta. Observe primero que a partir de (7) se obtiene

$$f(t, T) = f(0, T) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \phi(s, T) dW_s \quad (9)$$

Por lo tanto, la tasa instantánea satisface

$$r_t = f(t, t) = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, T) ds + \int_0^t \phi(s, t) dW_s$$

De esta manera,

$$E[r_t | F_t] = f(0, t) + \int_0^t \alpha(s, t) ds$$

$$Var[r_t | F_t] = \int_0^t \phi^2(s, t) ds$$

Asimismo, observe que la diferencial estocástica de la tasa corta está dada por:

$$dr_t = \frac{\partial f(0,t)}{\partial t} dt + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \alpha(st) ds \right) dt + \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi(s,t) ds W_s \right) dt \quad (10)$$

Las derivadas parciales de las integrales del lado derecho de la ecuación anterior se calculan mediante la regla de Leibniz, de tal forma que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \alpha(s,t) ds \right) dt = \left(\alpha(t,t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t} ds \right) dt$$

Y

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^t \varphi(s,t) dW_s \right) dt = \varphi(t,t) dW_t + \left(\int_0^t \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial t} dW_s \right) dt$$

En consecuencia, la ecuación (10) puede expresarse como:

$$dr_t \left(\frac{\partial f(0,t)}{\partial t} + \alpha(t,t) + \int_0^t \frac{\partial \alpha(s,t)}{\partial t} ds + \int_0^t \frac{\partial \varphi(s,t)}{\partial t} ds \right) dt + \varphi(t) dW_t \quad (11)$$

donde $\varphi(t) = \varphi(t, t)$ es la volatilidad de la tasa corta. Esta ecuación determina el comportamiento de la tasa corta. Observe que la tendencia de r_t es la pendiente de la tasa *forward* inicial. Evidentemente, debido a la presencia de las integrales de la tendencia en (11), la evolución de la tasa corta no presenta la propiedad markoviana. Una vez que se ha determinado la dinámica que gobierna el comportamiento de r_t , dada en la ecuación (11), se describirá, en las secciones subsiguientes, la dinámica del precio del bono cupón cero asociado a r_t .

2.3 Dinámica estocástica del precio del bono

Dada la especificación exógena de la dinámica estocástica de la tasa *forward* instantánea, el objetivo de esta sección consiste en determinar endógenamente el precio del bono, $B(t, T)$, que sea consistente con los supuestos (7) y (8). Sea

$$I_t = - \int_t^T f(t,s) ds \quad (12)$$

2.4 Generalización multifactorial del Heath-Jarrow-Morton

Las generalizaciones multifactoriales del modelo de HJM (1992) se han desarrollado en la literatura como

$$df(t,T) = \mu_f(t,T)dt + \sum_{i=1}^K \sigma_{f,i}(t,T)dW_i(t) \quad (13)$$

Donde:

$M_f(t, T)$: es la deriva de la tasa forward con vencimiento T .

$\Sigma_{i,f}(t, T)$: son sus coeficientes de volatilidad.

(t) : son movimientos brownianos estándar independientes.

Esto se puede reescribir en forma integral como

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \mu_f(s,T)ds + \sum_{i=1}^K \int_0^t \sigma_{f,i}(s,T)dW_i(s) \quad (14)$$

Como en las versiones de factor único, dado que los precios de los bonos dependen de las tasas de interés a plazo, tenemos:

$$B(t,T) = B(0,T) + \int_0^t \mu_B(s,T)B(s,T)ds + \sum_{i=1}^K \int_0^t \sigma_{B,i}(s,T)B(s,T)dW_i(s) \quad (15)$$

con $(i = 1, 2, \dots, K)$

$$\begin{aligned} \sigma_{B,i}(t,T) &= - \int_t^T \sigma_{f,i}(t,s)ds \\ \mu_B(t,T) &= r(t) - \int_t^T \mu_f(t,s)ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K \sigma_{B,i}^2(t,T) \end{aligned} \quad (16)$$

2.5 Análisis de componentes principales

De acuerdo con Tamagushiku (2006), el análisis de componentes principales (PCA) es un procedimiento multivariante que combina dos o más variables correlacionadas en un número menor de factores o componentes principales. Esencialmente, un conjunto de variables correlacionadas se transforma en un conjunto de factores no correlacionados que se ordenan reduciendo la variabilidad. El uso principal de PCA es reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos conservando tanta información como sea posible. Esto se logra ya que los factores son combinaciones lineales de las variables originales.

Además, el uso de factores permite entender las fuentes de riesgo, lo que es mejor para controlar la variabilidad, ya que enfrenta menos parámetros en su estimación. En el análisis de factores, el foco de interés es la explicación de la estructura de la covarianza o correlación entre las variables. Por ello, los modelos de factores buscan analizar los principales riesgos que determinan el comportamiento de los rendimientos de los instrumentos de deuda a partir de la información histórica.

Ahora bien, es importante entender que un factor es el elemento común sobre el cual muchas variables están correlacionadas. No todos los factores son útiles para explicar los rendimientos de los instrumentos de deuda, solo se buscan los factores sistemáticos, los cuales afectan el rendimiento promedio de los diferentes activos.

La técnica de componentes principales consiste en extraer el primer factor que explica la máxima varianza de la variable original, una vez extraído el primer factor se requiere encontrar el siguiente factor que explica la máxima varianza del resto y así sucesivamente. Cada siguiente factor que se obtiene explica la máxima variabilidad que no fue capturada por el factor anterior. Los factores son independientes entre ellos, es decir, no están correlacionados o son ortogonales.

El número de factores que es necesario extraer depende de la mínima variabilidad aleatoria que ya no pueda ser explicada por ningún factor. Un reducido conjunto de factores es mucho más fácil de analizar e interpretar. Este análisis explica la estructura de la varianza-covarianza de las variables originales a través de una rotación ortogonal, de tal manera que el primer componente da la dirección de la máxima variación, el segundo componente da la siguiente máxima variabilidad ortogonal al primer componente principal y así sucesivamente. Como resultado de este procedimiento, pocos componentes principales pueden explicar una proporción bastante razonable del total de la variabilidad con solo una pequeña parte de pérdida de información. Las varianzas extraídas

por los factores se conocen como valores propios, los cuales se obtuvieron de la matriz de varianzas-covarianzas de las variables originales (Benítez, 2008).

Algebraicamente, los componentes principales son combinaciones lineales de n variables aleatorias denominadas $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$. Estas combinaciones lineales representan la selección de un nuevo sistema de coordenadas obtenidas de la rotación del sistema de variables originales. Los nuevos ejes representan la dirección máxima de variabilidad y proporcionan una descripción simple y parsimoniosa de la estructura de la covarianza.

La técnica de componentes principales depende únicamente de la matriz de covarianza Σ de las variables originales $[X_1, X_2, X_3, \dots, X_n]$. Sea el vector aleatorio de $X = [X_1, X_2, X_3, \dots, X_n]$ cuya matriz de covarianza es Σ con los valores propios $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \dots > \lambda_n > 0$. Considere las siguientes combinaciones lineales:

$$\begin{aligned} Y_1 &= l_1 X' = l_{11} X_1 + l_{21} X_2 + l_{31} X_3 + \dots + l_{n1} X_n \\ Y_2 &= l_2 X' = l_{12} X_1 + l_{22} X_2 + l_{32} X_3 + \dots + l_{n2} X_n \\ Y_n &= l_n X' = l_{1n} X_1 + l_{2n} X_2 + l_{3n} X_3 + \dots + l_{nn} X_n \end{aligned} \quad (17)$$

Los componentes principales son aquellas combinaciones lineales $[Y_1, Y_2, Y_3, \dots, Y_n]$ no correlacionadas cuyas varianzas son las más grandes.

Aplicando la metodología anteriormente explicada, se requiere encontrar los valores propios para que se puedan construir los componentes principales, los cuales deben cumplir con tres condiciones fundamentales:

1. Los componentes principales no deben estar correlacionados.
2. El primer componente debe absorber la mayor parte de la varianza de las variables originales.
3. El segundo componente debe absorber la máxima varianza del resto de la varianza que no fue explicada por el primer factor y así sucesivamente.

2.6 Resultados de la implementación práctica

Teniendo en cuenta el enfoque multifactorial de la metodología HJM para la modelación de las tasas de interés, esta sección tiene como propósito presentar una representación práctica del modelo. Para esta representación se ha definido desarrollar su implementación para el caso de tres factores (tabla 3).

Los resultados producidos por la metodología de componentes principales permiten identificar los factores que serán usados en el modelo HJM. Esto teniendo en cuenta que se hace necesario definir un grado de explicación que represente

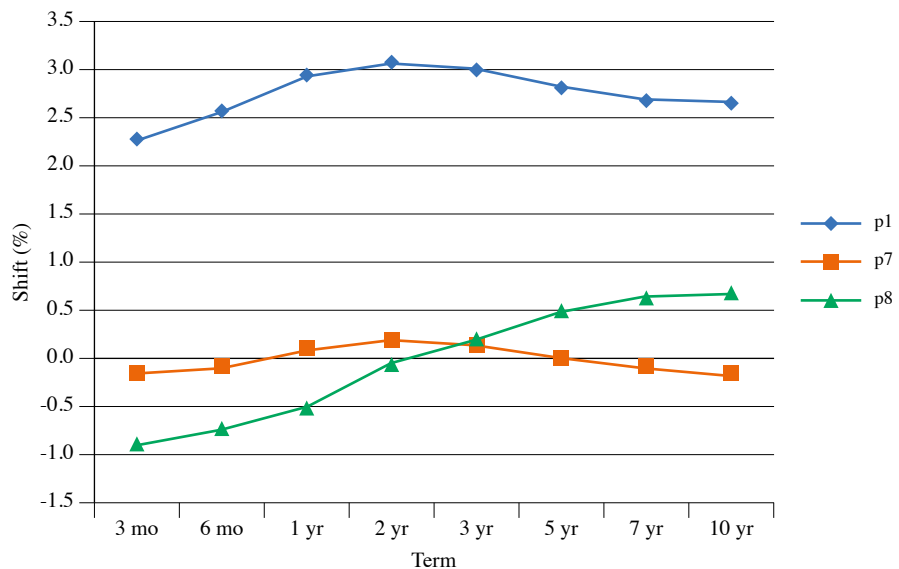
Tabla 3: Matriz de pesos acumulados de los factores del modelo

Restricción	p1	p2	p3	p4	p5	p6	p7	p8
Autovalores (λ)	0,2241	0,0004	0,0001	0,0000	0,0002	0,0001	0,0020	0,0177
Porcentaje	91,61	0,17	0,03	0,01	0,08	0,05	0,81	7,24
Acumulativa	91,61	91,78	91,81	91,82	91,90	91,95	92,76	100,00

Fuente: calculos propios.

un nivel significativo de la varianza de la estructura a plazos. En este caso, se ha tomado como referencia de comparación el 95%. La cantidad de PC que satisfacen esta condición acumulativamente es la cantidad de funciones de volatilidad que usaremos en nuestro modelo de tasa de interés, como se ha mencionado. Teniendo en cuenta que el modelo propuesto contempla tres factores, el desarrollo de la metodología PCA permitió identificar que estos explican el 99,66% de la volatilidad total y, por lo tanto, estos tres PC se seleccionan porque proporcionan una explicación significativa de la varianza en nuestra estructura a plazos, tal y como se observa en la figura 2.

Figura 2: 1 Factores seleccionados por PCA



Ahora bien, una vez identificados los factores se hace necesario estructurar las formas funcionales de los mismos, dado que a partir de esto se alcanzarán las escalas de los factores que se usarán en la construcción del árbol para el modelo HJM y la respectiva deducción de las tasas *spot*.

El objetivo principal en este punto es calibrar los parámetros de las formas funcionales, a través de un proceso de minimización de las diferencias cuadráticas entre los valores rebalanceados de la matriz de valores ficticios para el factor y los valores estimados de dicho factor (tabla 4).

Tabla 4: Forma funcional del factor 2

Parámetros		Original		Calibrado	
a		0,406810		0,470294	
b		0,714261		-0,986706	
c		0,980051		0,064968	
d		0,466096		0,101368	
t	P3	P3 estimado (Original)	P3 estimado (Calibrado)	Dif ² (Original)	Dif ² (Calibrado)
0.25	-0,8899	0,8160	-0,8691	2,9100	0,0004
0.5	-0,7328	0,9177	-0,7516	2,7239	0,0004
1	-0,5082	1,1211	-0,5164	2,6546	0,0001
2	-0,0523	1,5279	-0,0461	2,4970	0,0000
3	0,2084	3,4062	0,2963	10,2263	0,0077
5	0,4978	5,3664	0,4262	23,7031	0,0051
7	0,6419	7,3265	0,5561	44,6826	0,0074
10	0,6816	10,2666	0,7511	91,8725	0,0048
SUM				181,2702	0,0259

Este mismo proceso, aplicado para el factor 2, se replica para el caso de la forma funcional del factor 3 presentado en la tabla 5.

Tabla 5: Forma funcional del factor 3

Parámetros		Original		Calibrado	
c		0,442547		0,123729	
k		0,718329		0,090974	
t	P2	P2 estimado (Original)	P2 estimado (Calibrado)	Dif ² (Original)	Dif ² (Calibrado)
0.25	-0,1582	0,2698	0,0209	0,1832	0,0321
0.5	-0,0851	0,2090	0,0182	0,0865	0,0107
1	0,0945	0,1158	0,0130	0,0005	0,0066
2	0,1921	0,0052	0,0031	0,0349	0,0357
3	0,1345	-0,0487	-0,0058	0,0336	0,0197
5	-0,0025	-0,0878	-0,0215	0,0073	0,0004
7	-0,0927	-0,0971	-0,0346	0,0000	0,0034
10	-0,1648	-0,0997	-0,0502	0,0042	0,0131
SUM				0,3502	0,1217

Después de haber determinado la estructura final de las formas funcionales y su respectiva calibración, la construcción del árbol de tasas *forward* en el modelo HJM requiere para su desarrollo el escenario base de la curva de rendimiento anual. Ahora bien, como en el modelo la ventana de tiempo t es anual como se ha dicho, se deberán tomar las tasas correspondientes a dicho instante. Sin embargo, encontramos casos en los cuales no se tiene una tasa para ese momento t como son el año 4,6, 8,9 y 11. En este caso, se resolvió dicha novedad a través del uso del algoritmo de suavizado exponencial triple, con el cual se realizó la interpolación de los años que no tenían una tasa asociada y se estableció una tasa para el año 11.

En color verde se han presentado las tasas asociadas a los años en los cuales no existía información para dicha referencia de mercado, haciendo uso del método anteriormente citado.

A partir de la consolidación de la curva de rendimiento anual, con las tasas presentadas en la anterior gráfica (figura 3) se puede obtener la estructura *lattice* del modelo para las tasas *forward* y *spot* como se evidencia en esta sección (figura 4, tabla 6).

Figura 3: Curva de rendimiento de las tasas del tesoro de Estados Unidos con proyección

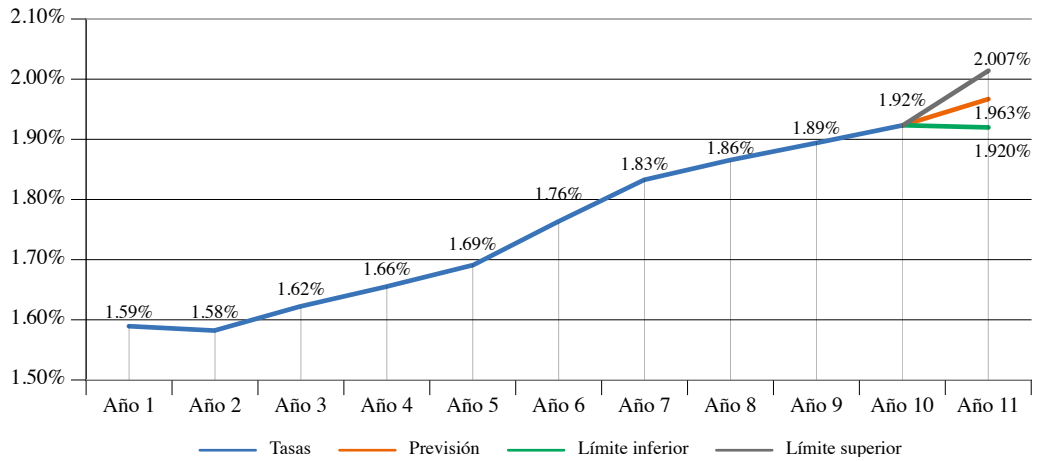


Figura 4: Matriz de tasas forward

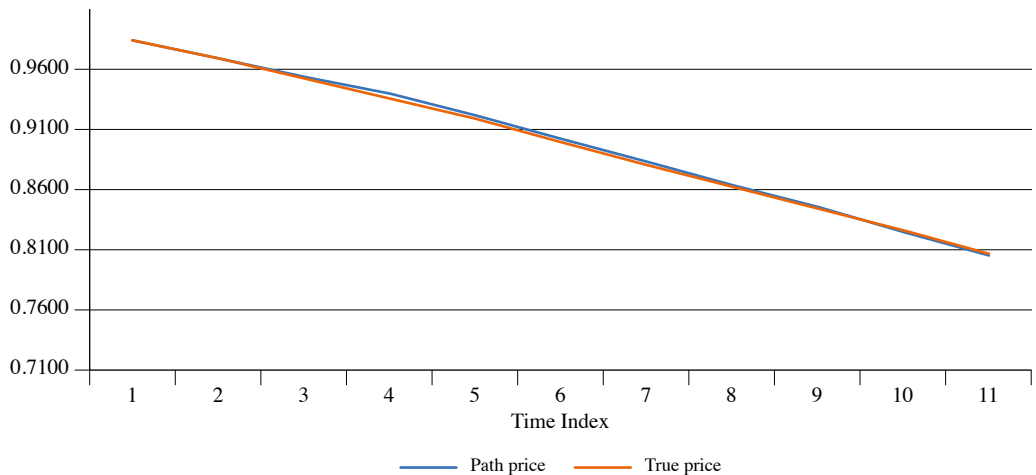
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,57%	1,70 %	1,76 %	1,83 %	2,11 %	2,25 %	2,07 %	2,13 %	2,19 %	2,40 %
1,63 %	1,69 %	1,76 %	2,04 %	2,18 %	2,00 %	2,06 %	2,12 %	2,33 %	
1,65 %	1,72 %	2,00 %	2,14 %	1,96 %	2,02 %	2,08 %	2,29 %		
1,65 %	1,93 %	2,07 %	1,89 %	1,95 %	2,02 %	2,22 %			
2,12 %	2,26 %	2,08 %	2,14 %	2,20 %	2,41 %				
2,32 %	2,14 %	2,20 %	2,27 %	2,47 %					
2,06 %	2,12 %	2,19 %	2,40 %						
2,26 %	2,32 %	2,53 %							
2,14 %	2,35 %								
2,66 %									

Tabla 6: Tasas Spot

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1,59 %	1,50 %	1,59 %	1,58 %	1,84 %	2,18 %	2,24 %	2,20 %	2,08 %	2,45 %	2,50 %

En el origen, los precios del bono con descuento para la ruta futura simulada se obtienen mediante la multiplicación de los precios sucesivos a partir del instante $t(0)$, es decir, el precio de ruta en origen para un bono cupón cero con 2 años de vencimiento es $= 0,9842 * 0,9696 = 0,9543$. En este sentido, los precios reales son aquellos que se derivan utilizando las tasas a plazo implícitas en la curva de tasas iniciales, dada por la primera fila de tipos al contado (*spot*) y tipos a plazo derivados anteriormente. Por ejemplo, el precio real en origen de un bono cupón cero con 2 años de vencimiento es: $\text{Exp}(- (1,59\% + 1\%) * 1) = 0,9689$. La comparación de las dos series de precios se muestra en la siguiente gráfica (figura 5):

Figura 5: Precio del bono con descuento



Conclusiones

Los componentes principales tienen varias características atractivas, como su intuitiva interpretación. Se puede considerar que los componentes principales explican diferentes tipos de cambios en la forma de la estructura temporal de tasa de interés. El primer componente principal afecta tipos de interés en todos los vencimientos por una cantidad similar y en la misma dirección, de ahí su interpretación como un cambio paralelo. Este cambio paralelo aporta la mayor parte de la variación en la estructura temporal en aproximadamente el 80 %.

Los resultados de esta implementación son consistentes con la lógica de otros trabajos como los de Avellaneda y Laurence (2000), Rebonato (1998), James y

Weber (2000) en los cuales se evidenció que el uso de dos factores explica alrededor del 95 % de la variación en los movimientos de la estructura temporal, mientras que tres factores explican aproximadamente el 99 %. El resto de la variación generalmente se considera ruido.

El modelo es bastante difícil de calibrar, por tanto, el problema para su difusión estuvo enmarcado precisamente en esta condición. El modelo HJM fue originalmente formulado en términos de tipos *forward* instantáneos, que no presentaban una equivalencia evidente con ningún instrumento negociado en el mercado. Además, el artículo de HJM menciona el hecho de que, en el límite del tiempo continuo y para verdaderos tipos *forward* lognormales, su proceso explota con probabilidad positiva.

Referencias

- Ahn, D. H. y Gao, B. (1999). A parametric nonlinear model of term structure dynamics. *Review of Financial Studies*, 12(4), 721-762.
- Ait-Sahalia, Y. (1995). *Nonparametric pricing of interest rate derivative securities*.
- Alarcón, N., Vásquez, V., Reyes, H. y Tajonar, F. (2018). Modelo estocástico Vasicek aplicado a tasas de interés de corto plazo. *Revista de Investigación Académica*, 50, 1-12.
- Black, F., Derman, E. y Toy, W. (1990). A one-factor model of interest rates and its application to treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, 46(1), 33-39.
- Black, F. y Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3), 637-659.
- Black, F. y Karasinski, P. (1991). Bond and option pricing when short rates are lognormal. *Financial Analysts Journal*, 47(4), 52-59.
- Benítez, S. J. (2008). *Estimación de la curva de rendimiento mexicana utilizando el modelo de componentes principales y el modelo de Diebold-Li* (Tesis de Grado, vol. 1).
- Botero, G. y Restrepo, J. A. (2008). Sobre la relación entre los precios de las acciones y los indicadores económicos en Colombia. *Revista de Economía del Rosario*, 11(2), 129-168.

- Bernal, D. (2015). *Optimización de portafolios de Bonos. Aplicación en el mercado colombiano*. Universidad de los Andes.
- Brace, A., Gatarek, D. y Musiela, M. (1997). The market model of interest rate dynamics. *Mathematical Finance*, 7(2), 127-155.
- Brennan, M. J. y Schwartz, E. S. (1979). A continuous time approach to the pricing of bonds. *Journal of Banking Finance*, 3(2), 133-155.
- Brigo, D. y Mercurio, F. (2001). A deterministic shift extension of analytically tractable and time homogeneous short rate models. *Finance and Stochastics*, 5, 369-388.
- Brigo, D. y Mercurio, F. (2006). *Interest Rate Models Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit* (2.^a ed.). Springer.
- Chan, K., Karolyi, G., Longstaff, F., Sanders, A. (1992). The volatility of short term interest rates: An empirical comparison of alternative models of the term structure of interest rates. *The Journal of Finance*, 47(3), 1209-1227.
- Chance, D. (2008). The Vasicek Term Structure Model. Teaching Note 97-03.
- Chen, L. (1996). *Stochastic mean and stochastic volatility: A three-factor model of the term structure of interest rates and its applications in derivatives pricing and risk management*. Blackwell Publishers.
- Cheyette, O. (2002). *Interest Rate Models. Fixed Income Research*. BARR.
- Cox, J. C., Ingersoll, J. E. y Ross S. A. (1985). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53, 385-407.
- Cruz, F. (2007). Valor en riesgo de bonos cupón cero en el mercado mexicano con los modelos Vasicek y CIR: simulación Monte Carlo con saltos de Poisson y valores extremos. *TEC*, 1, 22-30.
- Dothan, M. U. (1978). On the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6 (1), 59-69.
- Fabozzi, F. (2002). *Interest Rate, Term Structure and valuation modeling* (2.^a ed.). John Wiley Sons.

- Gong, F. y Remolona, E. M. (1997). Nonlinearities in exchange rates: Evidence from alternative currency regimes. *Journal of International Money and Finance*, 16(2), 215-231.
- González, M. y Pérez, M. (2015). Simulación de la estructura temporal de tasas de interés: una aplicación al cálculo de riesgo de tasas de interés. Documento de trabajo, Econstor.
- Heath, D., Jarrow, R. y Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60(1), 77-105.
- Heston, S. (1993). A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies*, 6(2), 327-343.
- Ho, T. S. y Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims. *The Journal of Finance*, 41(5), 1011-1029.
- Hull, J. y White, A. (1994). Numerical procedures for implementing term structure models I: Single-Factor models. *The Journal of Derivatives*, 2, 7-16.
- Hull, J. y White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4), 573-592.
- Iacus, S. (2012). *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations, With R Examples*. Springer.
- James, J. y Webber, N. (2000). *Interest Rate Modelling*. Jhon Wiley & Sons.
- Jamshidian, F. (1997). LIBOR and swap market models and measures. *Finance and Stochastics*, 1(4), 293-330.
- Jegadeesh, N. y Titman, S. (1993). Returns to buying winners and selling losers: Implications for stock market efficiency. *The Journal of Finance*, 48(1), 65-91.
- Kalotay, A. J., Williams, G. O. y Fabozzi, F. J. (1993). A model for valuing bonds and embedded options. *Financial Analysts Journal*, 49(3), 35-46.

- Langetieg, T. C. (1980). A multivariate model of the term structure. *The Journal of Finance*, 35(1), 71-97.
- León, D. (2003). El proceso estocástico de Feller y el modelo Cox-Ingersoll-Ross: modelación de tasas de interés y valoración de bonos. *Odeon*, 13, 31-44.
- Longstaff, F. A. y Schwartz, E. S. (1992). Interest rate volatility and the term structure: A two-factor general equilibrium model. *The Journal of Finance*, 47(4), 1259-1282.
- Maghsoodi, Y. (1996). Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation. *The Journal of Derivatives*, 4(4), 7-16. <https://doi.org/10.3905/jod.1996.407387>
- Merton, R. C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. *Review of Economics and Statistics*, 51(3), 247-257.
- Merton, R. C. (1977). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141-183.
- Marek, M. y Rutkowski, M. (1977). *Martingale methods in financial modelling*. Springer.
- Miltersen, K., Sandmann, K. y Sondermann, D. (1997). Closed-form solutions for term structure derivatives with log-normal interest rates. *The Review of Financial Studies*, 10(3), 627-648.
- Moreno, M. (2000). Modelización de la estructura temporal de los tipos de interés: valoración de activos derivados y comportamiento empírico. *Revista Española de Financiación y Contabilidad*, 29(104), 346-360.
- Navas, J. F. (1997). *Modelos clásicos de la estructura temporal de tipos de interés*. Universidad Autónoma de Madrid.
- Palacio, J. (2009). *Análisis, descripción y simulación de modelos estocásticos de tasas de interés* (Tesis de Grado), Universidad EAFIT.
- Pérez, D. (2017). *Cálculo estocástico en finanzas: aplicación del modelo browniano geométrico para la predicción del activo subyacente FCC:MC en el IBEX-35*. Universidad Politécnica de Valencia.

- Pumacajia, B. (2017). Comparación de modelos de cálculo estocástico y su aplicación en el modelamiento del índice general de la Bolsa de Valores de Lima y la tasa de rendimiento del bono del Gobierno Peruano (Tesis de grado), Universidad Nacional de San Agustín de Arequipa.
- Rebonato, R. (1996). *Theory of rational option pricing interest-rate option models: Understanding, analysing and using models for exotic interest-rate options*. John Wiley and Sons.
- Rendleman, R. J. y Bartter, B. J. (1980). The pricing of options on debt securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 15(1), 11-24.
- Richard, S. F. (1978). An arbitrage model of the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, 6(1), 33-57.
- Roll, R. (1970). The behavior of interest rates: The application of the efficient market model to U.S. treasury bills. *The Journal of Economic History*, 33(2), 594-605
- Schaefer, S. M. y Schwartz, E. S. (1984). A two-factor model of the term structure: An approximate analytical solution. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 19(4), 413-424.
- Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer.
- Svodova, S. (2002). *An investigation of various interest rate models and their calibration in the south african market* (Master's Thesis) Witwatersrand University.
- Svodova, L. (2004). Continuous-time mean-variance portfolio selection under stochastic interest rates. *Czech Journal of Economics and Finance*, 54(7-8), 324-342.
- Tamagushiku, H. (2006). Asset pricing with a stochastic discount factor generated by a multifactor HJM model. *Journal of Futures Markets*, 26(6), 569-591.
- Tamarit, S. (2013). *El modelo estocástico de Vasicek para la predicción de tipos de interés: aplicación al tipo de interés interbancario EONIA* (Tesis de grado), Universidad Politécnica de Valencia.
- Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5, 177-188.

- Venegas, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos, productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre* (2.ª ed.). Cengage Learning.
- Venegas, F. y Vasicek, O. (2021). Modelos de la estructura de plazos de las tasas de interés: revisión, tendencias y perspectivas. *Remef*, 16(2), 1-28.
- Zeytun, S. y Gupta, A. (2007). A comparative study of the Vasicek and the CIR model of the short rate. *Technical Report* 124, Fraunhofer (ITWM).