

Teoría moderna de portafolio: desarrollos fundamentales, extensiones y enfoques robustos

Modern Portfolio Theory: Fundamental Developments, Extensions, and Robust Approaches

Carlos Andrés Zapata Quimbayo*

* Magíster en Finanzas y candidato a doctor en Ciencias Económicas. Docente-investigador, Observatorio de Economía y Operaciones Numéricas (ODEON), Universidad Externado de Colombia, Bogotá (Colombia). [carlosa.zapata@uexternado.edu.co], [ORCID ID: 0000-0003-3337-0182].

Artículo recibido: 30 de marzo de 2023

Aceptado: 1 de julio de 2023

Para citar este artículo:

Zapata, C. A. (2023). Teoría moderna de portafolio: desarrollos fundamentales, extensiones y enfoques robustos. *Odeon*, 24, 93-118.

DOI: <https://doi.org/10.18601/17941113.n24.06>

Resumen

En este trabajo se presentan los principales desarrollos teóricos de la teoría moderna de portafolios. Inicialmente, se introducen los elementos fundamentales del modelo media-varianza (MV) de Markowitz, su formulación y solución del problema de optimización, así como sus limitaciones. Luego, se presentan diferentes extensiones del MV al introducir medidas alternativas de riesgo, así como los ajustes del modelo de construcción de portafolios. En este ámbito, se expone el enfoque de *downside risk*. Finalmente, se introducen los enfoques robustos de portafolio teniendo en cuenta los enfoques: bayesiano, de optimización robusta y de paridad de riesgo. Desde estos nuevos enfoques se resaltan aquellos ajustes que permiten superar las principales limitaciones del modelo MV. También, se introducen desarrollos recientes que extienden las formulaciones originales del modelo de portafolio para tratar nuevos desafíos y problemáticas actuales.

Palabras clave: teoría de portafolio; medidas de riesgo; portafolios robustos.

Clasificación JEL: C61, D81, G11.

Abstract

This paper presents the main theoretical developments of modern portfolio theory. At first, the fundamental elements of the Markowitz mean-variance model (MV), its formulation and solution of the optimization problem, as well as its limitations, are introduced. Then, different extensions of the MV model are presented by introducing alternative risk measures, as well as the adjustments of the portfolio construction model. In that sense, the downside risk approach is presented. Finally, robust portfolio approaches are introduced considering Bayesian, robust optimization, and risk-parity approaches. From these novel approaches, the adjustments that allow us overcoming some of the limitations of the MV model are highlighted. Also, recent developments that extend the original formulations of the portfolio model to address new challenges and current issues are introduced.

Key words: Portfolio theory; risk measures; robust portfolios.

JEL classification: C61, D81, G11.

Introducción

El modelo de media-varianza (MV) de Harry Markowitz dio origen a la teoría moderna de portafolio (TMP)¹ y representa la formulación más general para la construcción de portafolios óptimos de inversión usando activos financieros cuya naturaleza intrínseca es incierta. El modelo MV proporcionó un enfoque innovador que permite cuantificar la relación riesgo-retorno para la construcción de portafolios de inversión diversificados², formulación que introduce dos de los elementos esenciales de la TMP: el primero, fue el análisis conjunto de la relación riesgo-retorno de los activos que considera como insumos del modelo de portafolio los retornos esperados y sus covarianzas; el segundo, fue la formulación del problema de selección de un portafolio óptimo a partir de un doble objetivo:

- i. Maximizar el retorno esperado del portafolio para un determinado nivel de riesgo.
- ii. Minimizar la varianza del portafolio para un determinado nivel de retorno esperado.

La formulación de Markowitz sustenta gran parte del análisis cuantitativo para la creación de portafolios óptimos que aún está vigente, como afirma Romero (2010). Además, su trabajo inició un amplio campo de desarrollo de la teoría financiera al aportar, junto con Tobin (1958) y Treynor (1961), las bases fundamentales para la construcción del modelo de valoración de activos de capital (CAPM - Capital Asset Pricing Model) desarrollado por Sharpe (1964), Lintner (1965) y Mossin (1966), así como las aplicaciones del CAPM al modelo de portafolio, como se identifica en los trabajos de Treynor (1961), Sharpe (1971) y Elton *et al.* (1976).

1 Cabe resaltar que el trabajo de Markowitz (1952) ha sido ampliamente considerado como el precursor de la TMP. Sin embargo, De Finetti (1940) ya había publicado un texto precursor de la teoría de portafolio, como afirman Rubinstein (2006) y Romero (2010). Según los autores, de forma anticipada al modelo MV, De Finetti (1940) modeló la varianza del portafolio, desarrolló el concepto de eficiencia MV e incluso anticipó las implicaciones de presencia de colas gruesas o colas pesadas en la distribución de los retornos de los activos.

2 Como afirman Constantinides y Malliaris (1995), el trabajo de Markowitz (1952) y su revisión posterior de 1959, reúne en una formulación general simple los desarrollos previos de Fisher (1907), Marschak (1938), von Neumann y Morgenstern (1944) y Bellman (1957).

Además, el modelo MV se ajustó para introducir nuevas medidas de riesgo, principalmente medidas de riesgo a la baja o *downside risk* que trataron posteriormente Sortino y Price (1994) en el enfoque de semivarianza, como extensión directa de la formulación de Markowitz (1959); así como las medidas de valor en riesgo (VaR - Value at Risk) y el valor en riesgo condicional (CVaR - Condicional Value at Risk) como se identifica en los trabajos de Uryasev y Rockafellar (2001) y Rockafellar y Uryasev (2002). Sin embargo, estos desarrollos de la TMP tienen limitaciones importantes como fue señalado por Michaud (1989), Chopra y Ziemba (1993), Best y Grauer (1991), entre otros. A partir de estos trabajos, el modelo MV y sus formulaciones alternativas han recibido críticas debido a los problemas que se presentan por la poca diversificación y el bajo desempeño de los portafolios, así como una alta sensibilidad de estos modelos respecto a los parámetros estimados, como señalaron León y Zapata (2023).

Estas limitaciones han podido superarse parcialmente desde los enfoques robustos de portafolio. Estos enfoques integran desarrollos que se han dado desde diferentes campos, entre los cuales se encuentran:

- i. El enfoque bayesiano de Black y Litterman (1992).
- ii. El enfoque de optimización robusta (OR) iniciado por El Ghaoui *et al.* (1998), Ben-Tal y Nemirovski (1998), Goldfarb e Iyengar (2003) y Tütüncü y Koenig (2004).
- iii. El enfoque de paridad de riesgo de Quian (2005, 2006, 2011), Choueifaty y Coignard (2008) y Roncalli (2014).

Estos desarrollos teóricos se han dado en las últimas tres décadas y han permitido reorientar la TMP para la construcción de “mejores” portafolios de inversión, los cuales han sido ampliamente adoptados por los fondos de inversión e inversionistas institucionales. Además, como afirman Fabozzi *et al.* (2007) y Kim *et al.* (2018), estos enfoques robustos representan un avance importante de la TMP para adoptar mejor las dinámicas del mercado financiero.

Este trabajo parte de la revisión de los desarrollos fundamentales del modelo MV, así como de las diferentes formulaciones alternativas para la construcción de portafolios de inversión y de los modelos robustos. Para cada uno de ellos se presentan sus formulaciones, solución y limitaciones. Además, como parte del trabajo conmemorativo de este número especial de la revista *Odeon*, se referencian los diferentes artículos que se han desarrollado como parte del trabajo investigación del grupo *Odeon* en los últimos años, y que han sido publicados en la revista.

El documento está organizado en cuatro partes. En la primera parte se presentan los desarrollos del modelo MV para la construcción de portafolios

óptimos. Luego, en la segunda parte se introduce el enfoque de *downside risk* teniendo en cuenta todos los fundamentos y ajustes en las medidas de riesgo. En la tercera parte se introducen los enfoques robustos de portafolio, señalando las mejoras de estos modelos y su tratamiento. En la cuarta, se presenta una discusión sobre los desarrollos más recientes de la TMP y las reformulaciones para tratar nuevos desafíos y aplicaciones. Finalmente, se presentan algunas conclusiones del trabajo.

1. Selección de portafolio y modelo MV

Markowitz (1952) desarrolló una solución óptima para la selección de un portafolio de inversión conformado por activos riesgosos, teniendo en cuenta la naturaleza estocástica de sus rendimientos o retornos. La formulación de Markowitz consideró como insumos del modelo de portafolio el retorno esperado del i -ésimo activo (μ_i) y sus covarianzas (σ_{ij}), bajo la presunción de que los retornos siguen una distribución normal. Así, un portafolio conformado por n activos riesgosos cuyo retorno esperado viene determinado por $E(R_p) = \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \mu_p$ y tiene una varianza igual a $\sigma_p^2 = \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}$, donde $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de retornos esperados de los n activos, $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es la matriz de covarianzas y $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es el vector de pesos o participaciones porcentuales.

El problema de optimización de Markowitz representa un problema de programación cuadrática (QP - quadratic programming) y se resuelve al minimizar σ_p^2 para un nivel dado de retorno esperado (μ_{p0}), como indica la ecuación (1).

$$\min_{\{\mathbf{w}\}} \{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\} \text{ s. a. } \boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} = \mu_{p0} \text{ y } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (1)$$

Donde: $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ es un vector de unos. La solución general del problema descrito viene dada por³:

$$\mathbf{w}_{MV} = \mathbf{g} + \mathbf{h} \mu_{p0} \quad (2)$$

Donde:

$$\mathbf{g} = [\mathbf{x}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \mathbf{y}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}]/d \text{ y } \mathbf{h} = [\mathbf{z}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} - \mathbf{y}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}]/d$$

3 Si bien Markowitz (1959) alcanzó un desarrollo importante para llegar a la solución del problema de optimización con los fundamentos matemáticos disponibles hasta la fecha, la solución presentada en este documento consolida los resultados obtenidos en los trabajos de Sharpe (1971) y Elton *et al.* (1976).

Con $\mathbf{x} = \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{y} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, $\mathbf{z} = \mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}$ y $d = \mathbf{xz} - \mathbf{y}^2$. Además, el problema de optimización puede simplificarse para obtener solo el portafolio de mínima varianza global (PMVG), el cual no requiere la restricción en el retorno esperado del portafolio. La solución para el PMVG viene dada por:

$$\mathbf{w}_{PMVG} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}} \quad (3)$$

El problema de optimización del modelo MV también puede incorporar la restricción en los pesos negativos o en los cortos, es decir, se resuelve para $w \geq 0$; sin embargo, la solución deja de ser analítica y requiere el uso de optimizadores (Elton *et al.*, 1976; Fabozzi *et al.*, 2007).

Por otra parte, la solución el modelo MV también está relacionada con el portafolio tangente (PT) de Sharpe (1963), el cual representa la mejor asignación de activos riesgosos en presencia del activo libre de riesgo cuya tasa viene dada por r_f . El problema de optimización formulado por Sharpe (1963) para obtener el PT viene dado por:

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \vartheta: \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})'\mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}}} \quad \text{s. a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (4)$$

Donde la función objetivo se conoce como el coeficiente de Sharpe o prima compensatoria por riesgo. La solución analítica de este problema viene dada por:

$$\mathbf{w}_{SR} = \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})}{\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1})} \quad (5)$$

De igual forma, en el problema descrito en (4) se puede agregar la restricción de pesos no negativos (Fabozzi *et al.*, 2007). Así mismo, el problema de optimización indicado en (4) puede reformularse para representar un problema de minimización de la varianza del portafolio, de forma similar a la ecuación (1). Esta formulación representa la forma convexa del problema de Sharpe, el cual se obtiene para un portafolio de varianza mínima con la siguiente restricción:

$$\min_{\{\mathbf{x}\}} \{\mathbf{x}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{x}\} \quad \text{s. a. } \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = 1 \quad (6)$$

Como el problema (6) no requiere satisfacer $\mathbf{x}'\mathbf{1} = 1$, entonces el PT se obtiene al normalizar el vector x para que sus elementos sumen uno, es decir, $\mathbf{w} = \mathbf{x}/\mathbf{x}'$ (Fabozzi *et al.*, 2007). Este problema de optimización también puede representarse como un problema de maximización de la relación *trade-off* entre el retorno esperado del portafolio y su varianza. De acuerdo con Fabozzi *et al.* (2007), esta versión adopta la forma cuadrática de la función de utilidad propuesta por Markowitz (1959), como muestra la ecuación (7).

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w} - \lambda\mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w}\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (7)$$

Donde: λ se define como la medida o coeficiente de aversión al riesgo. La solución óptima de este problema es equivalente a la optimización del coeficiente de Sharpe (ϑ), pero esto requiere considerar un coeficiente de aversión al riesgo determinado por $\lambda = E(R_p) - r_f/\sigma_p^2$. Así, la solución para el PT también viene dada por:

$$\mathbf{w}_{SR} = (\lambda\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}) \quad (8)$$

Donde: $\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}$ representa el vector de retornos en exceso respecto a la tasa libre de riesgo. Esta solución se puede utilizar como base para obtener los retornos esperados de equilibrio en un enfoque subjetivo de portafolio, por ejemplo, en el modelo de Black y Litterman (1992). De esta forma, al despejar de la ecuación (8), se obtiene $\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1} = (\lambda\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{w}_{SR}$, solución que también es consistente con el modelo CAPM, el cual viene determinado por:

$$E(R_i) = r_f + \beta_i[E(R_M) - r_f] \quad (9)$$

Como el modelo de valoración puede reexpresarse como: $\pi_i = \beta_i[E(R_M) - r_f]$, entonces, el vector $\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbf{1}$ se reemplaza por $\boldsymbol{\pi}$. Así, se tiene:

$$\boldsymbol{\pi} = (\lambda\boldsymbol{\Sigma})\mathbf{w}_{SR} \quad (10)$$

Estas formulaciones, si bien llevaron a un desarrollo importante de la TMP y ayudaron a consolidar el modelo CAPM, tienen algunas dificultades como se señaló atrás. En primer lugar, la medida de riesgo del portafolio viene determinada por la varianza (o la desviación estándar) de los retornos bajo el

supuesto de normalidad. Aunque esta medida tiene la ventaja de representar una relación simple y explícita entre el riesgo individual de los activos y el riesgo del portafolio, se ha presentado un amplio debate sobre su validez como medida adecuada del riesgo, ya que refleja las desviaciones de los retornos tanto al alza como a la baja. Sin embargo, para muchos inversionistas el riesgo solo puede asociarse a las pérdidas que puede tener el portafolio de inversión. En este sentido, las medidas de riesgo a la baja o de *downside risk* se vuelven mucho más adecuadas. Ahora bien, cuando se rompe el supuesto de normalidad, la varianza por sí sola no describe completamente las características de la distribución de los retornos⁴.

2. Medidas de *downside risk*

Las medidas de *downside risk* consideran solo una parte de la distribución de los retornos, generalmente, aquella que muestra las pérdidas, es decir, los retornos negativos o retornos que se encuentran por debajo de un cierto umbral. Teniendo en cuenta este umbral, se encuentran medidas de riesgo alternativas como la semivarianza, el VaR o el CVaR, entre otros⁵. Sin embargo, la aplicación de estas medidas es un poco más compleja y, en algunos casos, tiene un costo analítico y computacional mayor como sucede, por ejemplo, con los portafolios óptimos construidos a partir de las medidas del VaR o el CVaR⁶.

Estas medidas alternativas de riesgo tienen su origen, al igual que el modelo MV de Markowitz, en la década de los cincuenta con el trabajo seminal de Roy (1952), quien desarrolló el criterio de seguridad primero. El criterio de Roy se refiere al riesgo de no lograr un determinado retorno mínimo deseable (R_L), y se obtiene al minimizar la probabilidad de que el portafolio tenga un retorno (R_p) inferior a R_L , es decir, $\min \{\Pr(R_p \leq R_L)\}$. Además, según Roy (1952), un inversionista preferirá aquellos portafolios con la menor probabilidad que

4 Para más detalles, ver León y Zapata (2023).

5 El uso de estas medidas de riesgo se impulsó desde la década de los noventa, con el desarrollo del VaR introducido por el banco JP Morgan con la metodología de RiskMetrics, como afirmaron Artzner *et al.* (1999).

6 Además, se deben tener presente las limitaciones de estas medidas como sucede, por ejemplo, con el VaR, ya que se pierde la relación directa entre el riesgo de los activos y el riesgo del portafolio. Para más detalles, ver Artzner *et al.* (1999).

$R_P < R_L$, es decir, aquellos estados en los que se protege o asegura su inversión. El problema de optimización de Roy puede expresarse de forma general como:

$$\min_{\{w\}} \{\Pr(R_P \leq R_L)\} \text{ s. a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (11)$$

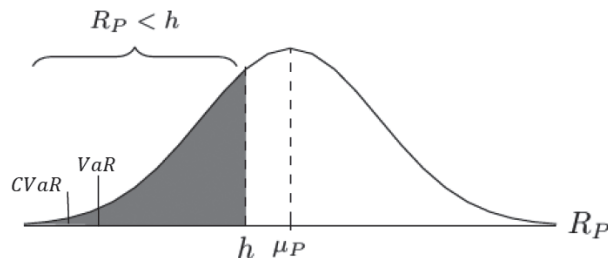
Donde: Pr es la medida de probabilidad. Ahora, si el inversionista no conoce la verdadera función de distribución de los retornos, esta puede aproximarse vía desigualdad de Chebyshev. Como resultado, Roy (1952) formuló el siguiente problema de optimización:

$$\min_{\{w\}} \frac{\sigma_P^2}{\mu_P - R_L} \text{ s. a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (12)$$

Si R_L es igual a la r_f , entonces este problema es equivalente al modelo de Sharpe para la construcción del PT. Esta intuición fue tratada por Sortino y Price (1994) al generalizar la medida de la semivarianza⁷, la cual introduce la noción de un retorno mínimo aceptable como umbral h , desde el cual se obtienen resultados no deseados para el portafolio de inversión, como muestra la figura 1. Siguiendo a Sortino y Price (1994), la medida de semivarianza puede expresarse como:

$$\tilde{\sigma}_P^2 = E[\min(R_P - h; 0)]^2 \quad (13)$$

Figura 1: Distribución de los retornos y medidas de *downside risk*



Fuente: adaptado de Roy (1952) y Sortino y Price (1994).

7 Cabe señalar que la medida de la semivarianza fue introducida por Markowitz en 1959 como una medida alternativa más apropiada para representar el riesgo del portafolio. Sin embargo, Markowitz no alcanzó a desarrollarla con éxito.

La definición de la semivarianza (o de la semidesviación estándar), como medidas alternativas de riesgo, permiten redefinir el ejercicio de selección de portafolio óptimo, como un modelo alternativo a la formulación de Markowitz. Además, Sortino y Price (1994) redefinen la relación del retorno ajustado por riesgo de Sharpe, conocido como medida o coeficiente de Sortino (s), la cual toma como denominador la semidesviación estándar del portafolio, como muestra la ecuación (13).

$$S = \frac{E(R_p) - r_f}{\tilde{\sigma}_p} = \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})' \mathbf{w}}{\sqrt{\mathbf{w}' \tilde{\boldsymbol{\Sigma}} \mathbf{w}}} \quad (14)$$

Donde: $\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}$ denota la matriz de semicovarianzas. La formulación del problema de optimización tomando como función objetivo la medida S permite llegar a un portafolio tangente alternativo a la solución de Sharpe.

Por otra parte, el VaR como una medida de riesgo de mercado representa la máxima pérdida probable que puede sufrir el portafolio en condiciones normales del mercado dado un horizonte temporal como un día o un mes, y para un determinado nivel de confianza, por ejemplo, un 95 o un 99 %. Formalmente, el VaR puede expresarse como:

$$VaR_{\alpha}(R_p) = \min (R \mid \Pr (-R_p \leq R)) \geq \alpha \quad (15)$$

Donde: $1 - \alpha$ define el nivel de confianza. La figura 1 también muestra cómo puede identificarse el VaR en la distribución de los retornos. El VaR, como afirman Rockafellar y Uryasev (2000), representa una medida del riesgo global del portafolio ya que permite resumir en un solo valor la máxima pérdida de la inversión. Además, tiene la ventaja de que no asume necesariamente una distribución específica para los retornos, aunque el supuesto de normalidad facilita su cálculo y tratamiento⁸. Sin embargo, dadas sus limitaciones, Artzner *et al.* (1999) y Rockafellar y Uryasev (2000) recomendaron el CVaR como una

8 Teniendo en cuenta el supuesto probabilístico, se encuentran tres métodos para su estimación: i) el método paramétrico que asume normalidad en los retornos, ii) el método histórico que solo toma en cuenta la distribución empírica de los retornos, iii) el método de simulación apoyado en la técnica de simulación de Monte Carlo, bajo la cual se puede adoptar cualquier supuesto en la distribución de los retornos (Rockafellar y Uryasev, 2000).

medida coherente de riesgo, ya que representa adecuadamente las pérdidas que exceden el VaR del portafolio, de tal forma que provee información adicional sobre la cola de la distribución de los retornos, como muestra la figura 1. Formalmente, el CVaR se define como⁹:

$$CVaR_{\alpha}(R_P) = E(-R_P | -R_P \geq VaR_{\alpha}) \quad (16)$$

Más allá de su uso como medida coherente de riesgo, el CVaR ha tenido una fuerte acogida para la construcción de portafolios óptimos. Los trabajos de Rockefellar y Uryasev (2000, 2002) y Krokmal *et al.* (2002) representan importantes contribuciones en este campo, las cuales llevaron a la consolidación del enfoque conocido como Media-CVaR. Rockefellar y Uryasev (2000) encontraron que dada una función $f(\mathbf{w}, y)$, donde $\Pr(y)$ denota la probabilidad asociada a un retorno para el portafolio, entonces $\Psi(\mathbf{w}, \alpha)$ representa la probabilidad acumulada de que $f(\mathbf{w}, y)$ no exceda cierto umbral α , es decir:

$$\Psi(\mathbf{w}, \alpha) = \int_{f(\mathbf{w}, y) \leq \alpha} \Pr(y) dy \quad (17)$$

De esta forma, los autores redefinen la expresión del CVaR como:

$$CVaR_{\alpha}(\mathbf{w}) = E(f(\mathbf{w}, y)) \geq VaR_{\alpha}(\mathbf{w}) \quad (18)$$

Por tanto, el CVaR puede representarse como función convexa y diferenciable en ξ y, de esta forma, Rockefellar y Uryasev (2002) redefinen el problema de optimización del portafolio como:

$$\min F(\mathbf{w}, \xi) = \xi + \alpha^{-1} \int_{f(\mathbf{w}, y) \geq \xi} [f(\mathbf{w}, y) - \xi] Pr(y) dy \quad (19)$$

Donde el valor mínimo de $F(\mathbf{w}, \xi)$ corresponde al CVaR del portafolio. Así, para un inversionista que define una máxima pérdida esperada para el portafolio

9 El CVaR también se conoce como *expected shortfall* (ES) que, aunque se define de forma diferente en términos estrictos, se ha demostrado que es equivalente a CVaR. Ver Acerbi y Tasche (2002), para más detalles.

como $CVaR_\alpha(\mathbf{w}) = c$, entonces, el problema de optimización puede formularse siguiendo a Krokmal *et al.* (2002), como:

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \{\boldsymbol{\mu}'\mathbf{w}\} \text{ s. a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \text{ y } CVaR_\alpha(\mathbf{w}) \leq c \quad (20)$$

Esta formulación permite construir la frontera eficiente Media-CVaR, como construcción alternativa a la FE de Markowitz. El portafolio tangente de la frontera Media-CVaR se obtiene mediante: $\frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1})' \mathbf{w}}{CVaR_\alpha(\mathbf{w})}$.

A pesar de los desarrollos que representan estos modelos alternativos, estos siguen sufriendo de algunas de las limitaciones del modelo MV. Por ejemplo, el hecho de utilizar solo datos históricos para la estimación de μ o de las medidas de riesgo, no incorpora adecuadamente la incertidumbre futura, lo cual brinda soluciones muy sensibles o ruidosas, como argumentan Michaud (1998), Best y Grauer (1991) y Black y Litterman (1991, 1992). Para superar esta limitación, se presentan diferentes propuestas alternativas que expanden el campo de investigación de la TMP y que comprenden, principalmente, los enfoques robustos.

3. Modelos robustos de portafolio

Se identifican diferentes técnicas que se pueden utilizar para modificar o robustecer las estimaciones históricas de los parámetros del modelo MV. Por ejemplo, se pueden utilizar métodos estadísticos para encontrar estimadores menos sensibles a los errores de estimación, como el enfoque bayesiano de Black y Litterman (1991, 1992)¹⁰ o la formulación robusta del problema de optimización introducida por El Ghaoui y Lebret (1997) y Ben-Tal y Nemirovski (1998). Estos desarrollos, junto con el enfoque de paridad de riesgo, se presentan a continuación.

10 Una formulación alternativa consiste en la técnica de contracción de Ledoit y Wolf (2003, 2004) que tiene como objetivo generar estimaciones robustas de la matriz de covarianzas, basado en la estimación de contracción Bayes-Stein, una técnica formulada por James y Stein en 1961.

3.1. El enfoque Bayesiano de Black y Litterman

El modelo introducido por Black y Litterman (1991, 1992) (BL), toma como base la solución del modelo MV e incorpora información adicional como las creencias, opiniones subjetivas o *views* del inversionista o del gestor del portafolio. Estas *views*, junto con su incertidumbre, representan las expectativas que tiene el inversionista sobre el desempeño futuro del activo. Así, el modelo BL permite generar estimaciones robustas de los retornos esperados a través de un ejercicio de actualización bayesiana. Para ello, Black y Litterman (1991) asumieron que la distribución de los retornos esperados de los activos viene dada por: $E(R) \sim N(\boldsymbol{\pi}, \tau\boldsymbol{\Sigma})$, donde $E(R) \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ corresponde a los retornos esperados que, a diferencia del enfoque MV, se asumen desconocidos.

Además, las *views* del inversionista pueden expresarse como $P E(R) \sim N(\mathbf{q}, \boldsymbol{\Omega})$, donde $P \in \mathbb{R}^{k \times n}$ asocia al activo i involucrado por la k -ésima *view*, $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^k$ describe el retorno esperado de la *view* y $\boldsymbol{\Omega} \in \mathbb{R}^{k \times k}$ es su matriz de covarianzas. Además, la matriz $\boldsymbol{\Omega}$ puede ser estimada, siguiendo a He y Litterman (1999), como:

$$\boldsymbol{\Omega} = \text{diag}(P(\tau\boldsymbol{\Sigma})P') \quad (21)$$

De esta forma, las *views* del inversionista pueden expresarse como sigue:

$$P E(R) = \mathbf{q} + \varepsilon \quad (22)$$

donde, $\varepsilon \in \mathbb{R}^{k \times 1}$ es un vector de los errores con media cero y varianza $\boldsymbol{\Omega}$, tal que $\varepsilon \sim N(0, \boldsymbol{\Omega})$. Si los inversionistas tienen confianza total en sus creencias, entonces cada *view* queda expresada como $P E(R) = \mathbf{q}$, de lo contrario, debe representarse como indica la ecuación 22. Según lo anterior, los retornos esperados en el modelo BL vienen dados por:

$$\boldsymbol{\mu}^{BL} = [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(P'\boldsymbol{\Omega}^{-1}P)]^{-1} [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}\boldsymbol{\pi} + P'\boldsymbol{\Omega}^{-1}\mathbf{q}] \quad (23)$$

con matriz de covarianzas igual a $\boldsymbol{\Sigma}^{BL} = [(\tau\boldsymbol{\Sigma})^{-1}(P'\boldsymbol{\Omega}^{-1}P)]^{-1}$. Además, los pesos óptimos del portafolio BL vienen dados por:

$$\mathbf{w}_{BL} = (\tau\boldsymbol{\Sigma}^{BL})^{-1} \boldsymbol{\mu}^{BL} \quad (24)$$

De esta forma, a partir de la creación un portafolio de equilibrio inicial y, mediante la incorporación de las *views*, se obtiene un portafolio óptimo que

considera no solo la información histórica, sino también las creencias subjetivas del desempeño futuro de los activos. A pesar de estas ventajas, el modelo BL presenta una dificultad metodológica y es que, como señalan Kolm *et al.* (2014), la incertidumbre en las *views* representa el elemento más abstracto y difícil de especificar del modelo BL.

Un enfoque alternativo corresponde a la técnica de contracción de Ledoit y Wolf (2003, 2004), la cual tiene un fundamento diferente: la estimación se forma reduciendo una estimación previa observada de la estimación muestral (o poblacional) hacia un estimador actualizado, que incorpora información adicional a fin de obtener una estimación posterior que proporciona una matriz de covarianzas regularizada. La estimación posterior se obtiene a partir de una ponderación determinada por el factor de contracción, teniendo en cuenta la distribución de los datos observados o información adicional.

3.2. Optimización robusta (OR) de portafolios

La OR comprende un enfoque de optimización de portafolios bajo incertidumbre introducida por El Ghaoui y Lebret (1997) y Ben-Tal y Nemirovski (1998) y representa una forma intuitiva y eficiente de tratar la incertidumbre para μ y Σ a través de conjuntos o *sets* de incertidumbre (Fabozzi *et al.*, 2007; Pachamanova y Fabozzi, 2012; Kim *et al.*, 2018). Al igual que el enfoque bayesiano, la OR asume que μ y Σ son variables aleatorias, sin embargo, la OR ofrece una solución intuitiva que puede implementarse mediante programación convexa, por ejemplo, mediante QP o programación de cono de segundo orden (SOCP, por sus siglas en inglés)¹¹.

Siguiendo a Zapata (2021a), la OR involucra la formulación de problema de tipo máximo-mínimo o mínimo-máximo y se resuelve para todo el conjunto de incertidumbre, incluso si μ toma su peor valor posible. Este enfoque se conoce como el peor de los casos o *worst-case*, dado que la contraparte robusta requiere reformular el problema original de optimización teniendo en cuenta el conjunto de incertidumbre. Los tipos de conjunto de incertidumbre más utilizados son

¹¹ Es importante aclarar que existen múltiples definiciones de robustez, como afirman Tütüncü y Koenig (2004), las cuales dependen del contexto particular de aplicación.

los de tipo intervalo de confianza y de tipo elipsoidal o cuadrático¹². Para llevar a cabo esta implementación se realizan los siguientes pasos:

- i. Formular el problema de optimización definiendo un conjunto de incertidumbre.
- ii. Reformular la contraparte robusta del problema en una forma estándar de programación convexa.
- iii. Utilizar el optimizador para resolver el problema robusto reformulado.

Este procedimiento permite resolver el problema que determina la peor realización posible de los parámetros, antes de resolver el problema original de selección del portafolio. Goldfarb e Iyengar (2003) desarrollaron las primeras formulaciones completas de este método partiendo del modelo MV. Sin embargo, como señala Zapata (2021a), la formulación del modelo robusto depende de la función objetivo que describe el problema y del conjunto de incertidumbre especificado. Por ejemplo, si se parte de la función de utilidad cuadrática del modelo MV, como indica la ecuación 7, y se toma un conjunto de incertidumbre de tipo intervalo, tal que: $\mathcal{U}_\mu = \{\mu \mid |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i\} \forall i = 1, \dots, n$, el problema original de optimización se reformula de la forma máximo-mínimo como sigue:

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \left\{ \min_{\{\mu \mid |\mu_i - \hat{\mu}_i| \leq \delta_i\}} (\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu}) - \lambda \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \right\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (25)$$

Por tanto, la versión robusta del problema viene dada por:

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \left\{ \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} - \delta |\mathbf{w}| \right\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (26)$$

Además, si se asume que los retornos del activo siguen una distribución normal, δ viene dado por $(\mu_i - z_{\alpha/2} \sigma_i / \sqrt{T}; \mu_i + z_{\alpha/2} \sigma_i / \sqrt{T})$. Ahora, si en la misma función objetivo se implementa el conjunto de incertidumbre elipsoidal: $\mathcal{U}_\mu = \{\mu \mid (\mu - \hat{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}_\mu^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \delta^2\}$, se obtiene el siguiente problema de tipo máximo-mínimo:

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \left\{ \min_{\{\mu \mid (\mu - \hat{\mu})' \boldsymbol{\Sigma}_\mu^{-1} (\mu - \hat{\mu}) \leq \delta^2\}} \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}'\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{w} \right\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (27)$$

12 Para más detalles, ver Ben-Tal y Nemirovski (1998), Goldfarb e Iyengar (2003) y Tütüncü y Koenig (2004).

y la versión robusta del problema viene dada por:

$$\max_{\{w\}} \left\{ w' \mu - \lambda w' \Sigma w - \delta \sqrt{w' \Sigma_{\mu} w} \right\} \text{ s.a. } w' \mathbf{1} = 1 \quad (28)$$

Donde: Σ_{μ} representa la matriz diagonal de los errores de estimación de las covarianzas o matriz de incertidumbre. Bajo el supuesto de una distribución normal multivariada, se tiene que $(\mu - \hat{\mu})' \Sigma_{\mu}^{-1} (\mu - \hat{\mu})$ se estima como una distribución χ^2 con n grados de libertad. Dadas las ventajas del conjunto elipsoidal sobre el conjunto de tipo intervalo, como afirman Goldfarb e Iyengar (2003), Fabozzi *et al.* (2007), Georgantas *et al.* (2021) y Zapata (2021a), se recomienda este tipo de formulaciones para la implementación del portafolio robusto.

Goldfarb e Iyengar (2003) encontraron que los portafolios robustos pueden presentar mejores resultados que los portafolios MV al exhibir una mayor estabilidad en su composición a lo largo del tiempo, lo cual puede reducir de forma significativa el rebalanceo del portafolio y, con ello, los costos de transacción. Estos resultados resaltan las ventajas del enfoque de OR respecto al modelo MV. Kim *et al.* (2018) confirmaron los resultados anteriores y encuentran que los portafolios robustos son superiores en el diseño de estrategias de gestión de riesgos. Además, Georgantas *et al.* (2021) y Zapata (2021a) también encontraron que los portafolios robustos presentan resultados superiores a los portafolios MV en materia de desempeño y una mayor estabilidad en el tiempo.

Aunque la implementación de modelos robustos para la optimización de portafolio ha representado grandes desafíos, como afirman Bertsimas *et al.* (2011) y Kim *et al.* (2018), los avances en el campo de la programación matemática y en el uso de herramientas computacionales han impulsado la práctica de este enfoque (Fabozzi *et al.*, 2007; Kim *et al.*, 2018). Ahora bien, la literatura de OR de portafolio aún no ha encontrado soporte de que estos portafolios sean más diversificados que los no robustos, como fue confirmado por Tütüncü y Koenig (2004), Kim *et al.* (2018), Georgantas *et al.* (2021) y Carmona y Gamboa (2021). Por ejemplo, estos autores encontraron que los portafolios robustos también pueden concentrarse en un pequeño número de activos. Esto se presenta, principalmente, porque los portafolios robustos se enfocan en controlar el riesgo al reemplazar en el portafolio aquellos activos que tienden a presentar mayor grado de rebalanceo y no mediante la inclusión de una mayor cantidad de activos. Por tanto, los autores encuentran que es difícil concluir que los portafolios robustos

son más diversificados que los del modelo MV. Algunas de las mejoras del enfoque se pueden encontrar mediante la incorporación de la paridad de riesgo.

3.3. Paridad de riesgo

El enfoque de paridad de riesgo (PR – *risk parity*) introducido por Qian (2005, 2006) y desarrollado formalmente por Maillard *et al.* (2010), surge como una alternativa al modelo MV para construir portafolios “mejor” diversificados, ya que permite considerar la contribución al riesgo (CR) que tiene cada activo en el portafolio de inversión, es decir, consiste en la construcción de un portafolio en el que todos los activos contribuyen en la misma proporción o cantidad al riesgo total. A diferencia del enfoque MV, que busca minimizar la varianza total del portafolio, el enfoque de PR restringe cada activo o clase de activo para que este contribuya de forma equivalente al riesgo total del portafolio¹³.

Como la contribución al riesgo de cada activo (CR) puede representarse mediante $w_i \frac{\partial \sigma}{\partial w_i}$, entonces, la contribución de todos los activos al riesgo del portafolio, medido por σ_p , se obtiene mediante:

$$\sigma_p = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial \sigma_p}{\partial w_i} \quad (29)$$

Es decir, corresponde a la suma de las CR_i de cada activo. Además, la contribución marginal de cada activo viene dada por $\frac{\partial \sigma}{\partial w_i}$, lo que es equivalente a:

$$CMR_i = \frac{\Sigma w}{\sqrt{w' \Sigma w}} \quad (30)$$

En la construcción del portafolio de PR, Qian (2006) propuso la solución de PR *naive* (NRP), también conocida como *pseudo-PR*, ya que representa la forma más simple del enfoque en el que los pesos de los activos se obtienen como proporción de la relación inversa del riesgo de cada activo medido por las desviaciones estándar, como muestra la ecuación (31).

$$\mathbf{w} = \frac{\boldsymbol{\sigma}^{-1}}{\mathbf{1}' \boldsymbol{\sigma}^{-1}} \quad (31)$$

13 Además, como la PR se centra en el componente de riesgo del portafolio, puede verse como un enfoque orientado a la gestión de riesgos, como afirman Qian (2011) y Roncalli (2014).

Así, la NRP consiste en subponderar intuitivamente los activos más riesgosos o de mayor volatilidad, y en sobreponderar los menos riesgosos. Aunque representa una medida simple, el NRP tiene un inconveniente al ignorar las covarianzas de los activos, las cuales son fundamentales para estimar la medida de riesgo total del portafolio. Como alternativa, surge la PR *vanilla* (VRP), también conocida como paridad de fuentes de riesgo (Maillard *et al.*, 2010; Roncalli, 2014). El portafolio VRP se obtiene al resolver las raíces del polinomio descrito en la ecuación (32).

$$w_i(\Sigma \mathbf{w}) = b_i \mathbf{w}' \Sigma \mathbf{w} \quad (32)$$

Con las restricciones $\mathbf{1}'\mathbf{w} = 1$ y $\mathbf{w} \geq 0$, tal que: $\Sigma \mathbf{w} = \mathbf{b}/\mathbf{w}$. De acuerdo con Roncalli (2014), el enfoque de VPR hace parte de los enfoques heurísticos para optimización de portafolios. Además, como la dimensión del componente de retorno esperado está ausente en el ejercicio de construcción del portafolio, la PR permite lidiar en parte con el problema de estimación de parámetros.

Por otra parte, la medida de la relación riesgo-retorno del modelo MV también puede ajustarse para obtener un portafolio de inversión que alcance el mayor grado de diversificación. Choueifaty y Coignard (2008) desarrollaron la medida de máxima diversificación definida de forma análoga a la medida de Sharpe, la cual depende únicamente de la volatilidad del portafolio, como medida riesgo total, bajo la noción de que el retorno del portafolio es directamente proporcional a su volatilidad.

4. Algunos desafíos recientes

Recientemente, algunas preocupaciones de la teoría financiera se han centrado en el papel que cumple el mercado financiero para hacer frente a los desafíos del riesgo de cambio climático y la incorporación de cuestiones ambientales y sociales en los procesos de toma de decisión de inversión y financiación. Por ejemplo, desde el establecimiento de los Principios de Inversión Responsable (PIR) de las Naciones Unidas en 2006, se incorporaron nuevos criterios para la gestión de inversiones que, no solo tienen en cuenta los aspectos puramente financieros como el riesgo o el retorno esperado, sino también criterios

ambientales (A), sociales (S) y de gobierno corporativo (G), o criterios ASG¹⁴. Los ASG, como mencionan Henriksson *et al.* (2019) y Coqueret (2022), les permiten a los inversionistas alcanzar objetivos de inversión que promuevan la sostenibilidad y la igualdad social.

Dadas estas nuevas preocupaciones, interesa identificar formas de incorporar dichas cuestiones en los procesos de construcción de portafolios óptimos. En respuesta, los trabajos de Hirschberger *et al.* (2013), Utz *et al.* (2014), Gasser *et al.* (2017) y Cesarone *et al.* (2022), entre otros, han ampliado el marco de análisis del modelo MV al incorporar un tercer elemento que ahora se integra a la relación riesgo-retorno: riesgo, retorno e indicador ASG. Este nuevo desarrollo, como afirman Zapata (2021b) y Cesarone *et al.* (2022), se conoce como modelo MV-ASG.

Siguiendo a Zapata (2021b) y Cesarone *et al.* (2022), la construcción de un portafolio que alcance un indicador ASG determinado por $\mathcal{E} = \mathbf{w}'\mathbf{e}$, puede realizarse a partir de las siguientes formulaciones.

$$\min_{\{\mathbf{w}\}} \{\mathbf{w}'\Sigma \mathbf{w}\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1; \mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} = \mu_0 \text{ y } \mathbf{w}'\mathbf{e} = \mathcal{E}_0 \quad (33a)$$

$$\max_{\{\mathbf{w}\}} \{\mathbf{w}'\boldsymbol{\mu} - \lambda \mathbf{w}'\Sigma \mathbf{w} - \gamma \mathbf{w}'\mathbf{e}\} \text{ s.a. } \mathbf{w}'\mathbf{1} = 1 \quad (33b)$$

Donde: e es el vector de indicadores ASG de los activos y el parámetro γ representa las preferencias ASG del inversionista. Las ecuaciones (33a-b) muestran los ajustes que se realizan al modelo MV de Markowitz para incorporar las nuevas preferencias, ya sea en las restricciones del problema de optimización (ecuación 33a) o en la función objetivo (ecuación 33b). De esta forma, el modelo MV-ASG permite construir un conjunto completo de portafolios óptimos para cada indicador objetivo ASG que persiga el inversionista. Aunque esta respuesta representa un desarrollo importante, surgen preocupaciones por el desempeño que puede alcanzar el portafolio con criterios ASG respecto a su contraparte MV o por su capacidad de diversificación. Por ejemplo, Gasser *et*

14 Estos criterios ASG se han consolidado aún más con el establecimiento de los acuerdos de París de 2015 y el Pacto Verde Europeo de 2019.

al. (2017) encontraron que los portafolios ASG reducen el conjunto de activos cuando estos persiguen un indicador muy alto y, por tanto, presentan una menor capacidad de diversificación.

Lo anterior genera preocupaciones importantes para los inversionistas y requiere un campo de investigación que permita verificar esas condiciones o generar mejores estrategias, teniendo en cuenta que gran parte de los desarrollos que se han alcanzado en el modelo MV-ASG requiere que los inversionistas sacrifiquen parte de la relación riesgo-retorno a cambio de incrementar la responsabilidad social, ambiental y corporativa de sus portafolios. Por tanto, se identifica aquí un campo de investigación prominente que puede llevar a la construcción de portafolios ASG robustos, así como al diseño de estrategias de inversión indexadas a ciertos índices de referencia, con el objetivo de perseguir un desempeño similar.

Conclusiones

En este trabajo se presentaron los principales desarrollos teóricos de la TMP. Para ello, se introdujeron las bases fundamentales del modelo MV de Markowitz, la formulación y solución de su problema de optimización siguiendo algunos trabajos más recientes, y se resaltaron sus limitaciones y las extensiones teóricas que surgen para hacer frente a estas. Un primer enfoque alternativo involucra las medidas *downside risk* como la semivarianza, el VaR y el CVaR o ES. También se presentaron los desarrollos robustos de portafolio teniendo en cuenta diferentes enfoques como el modelo bayesiano de Black-Litterman, la optimización robusta y la paridad de riesgo.

Desde estos nuevos enfoques se resaltan sus ventajas, las cuales permiten superar algunas de las limitaciones del modelo MV, así como la reformulación del problema de optimización y su solución. También, se incorporaron al análisis algunos desarrollos recientes que extienden las formulaciones originales del modelo de portafolio para tratar nuevos desafíos y problemáticas actuales.

Referencias

- Acerbi, C. y Tasche, D. (2002). On the coherence of expected shortfall. *Journal of Banking and Finance*, 26(7), 1487-1503. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00283-2](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00283-2)
- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J. y Heath, D. (1999). Coherent measures of risk. *Mathematical Finance*, 9(3), 203-228. <https://doi.org/10.1111/1467-9965.00068>

- Bellman, R. (1957). A Markovian decision process. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 679-684.
- Ben-Tal, A. y Nemirovski, A. (1998). Robust convex optimization. *Mathematics of Operations Research*, 23(4), 769-805. <https://doi.org/10.1287/moor.23.4.769>
- Berstein, P. (1992). *Capital Ideas: The Improbable Origins of Modern Wall Street*. The Free Press.
- Best, M. y Grauer, R. (1991). Sensitivity analysis for mean-variance portfolio problems. *Management Science*, 37(8), 980-989. <https://doi.org/10.1287/mnsc.37.8.980>
- Bertsimas, D., Brown, D. y Caramanis, C. (2011). Theory and applications of robust optimization. *SIAM Review*, 53(3), 464-501. <https://doi.org/10.1137/080734510>
- Black, F. y Litterman, R. (1991). *Global Asset Allocation with Equities, Bonds, and Currencies*. Goldman, Sachs & Co Fixed Income Research, 1-44.
- Black, F. y Litterman, R. (1992). Global portfolio optimization. *Financial Analysts Journal*, 48(5), 28-43. <https://doi.org/10.2469/faj.v48.n5.28>
- Carmona, D. y Gamboa, J. (2022). Optimización robusta de portafolio empleando métodos Bayesianos. *ODEON*, 21, 81-104. <https://doi.org/10.18601/17941113.n21.05>
- Cesarone, F., Martino, M. y Carleo, A. (2022). Does ESG impact really enhance portfolio profitability? *Sustainability*, 14(4), 20-50. <https://doi.org/10.3390/su14042050>
- Chopra, V. y Ziemba, W. (1993). The effects of errors in means, variances, and covariances on optimal portfolio choice. *Journal of Portfolio Management*, 19(2), 6-11. https://doi.org/10.1142/9789814417358_0021
- Choueifaty, Y. y Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *The Journal of Portfolio Management*, 35(1), 40-51.
- Constantinides, G. y Malliaris, A. (1995). Portfolio theory. *Handbooks in Operations Research and Management Science*, 9(1), 1-30. [https://doi.org/10.1016/S0927-0507\(05\)80045-3](https://doi.org/10.1016/S0927-0507(05)80045-3)
- Coqueret, G. (2022). *Perspectives in Sustainable Equity Investing*. CRC Press.

- De Finetti, B. (1940). The problem of 'full-risk insurances'. *Journal of Investment Management*, 4(1), 19-43.
- El Ghaoui, L. y Lebret, H. (1997). Robust solutions to least-squares problems with uncertain data. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 18(4), 1035-1064. <https://doi.org/10.1137/S0895479896298130>
- El Ghaoui, L., Oustry, F. y Lebret, H. (1998). Robust solutions to uncertain semidefinite programs. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1), 33-52. <https://doi.org/10.1137/S1052623496305717>
- Elton, E., Gruber, M. y Padberg, M. (1976). Simple criteria for optimal portfolio selection. *Journal of Finance*, 11(5), 1341-1357. <https://doi.org/10.2307/2326684>
- Fisher, I. (1907). *The Rate of Interest: Its nature, determination and relation to economic phenomena*. MacMillan.
- Fabozzi, F., Focardi, S., Kolm, P. y Pachamanova, D. (2007). *Robust portfolio optimization and management*. John Wiley & Sons.
- Gasser, S. M., Rammerstorfer, M. y Weinmayer, K. (2017). Markowitz revisited: Social portfolio engineering. *European Journal of Operational Research*, 258(3), 1181-1190. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.10.043>
- Georgantas, A., Doumpos, M. y Zopounidis, C. (2021). Robust optimization approaches for portfolio selection: A comparative analysis. *Annals of Operations Research*, 1-17. <https://doi.org/10.1007/s10479-021-04177-y>
- Goldfarb, D., Iyengar, G. (2003). Robust portfolio selection problems. *Mathematics of Operations Research*, 28(1), 1-38. <https://doi.org/10.1287/moor.28.1.1.14260>
- He, G. y Litterman, R. (1999). *The intuition behind Black-Litterman model portfolios*. Goldman Sachs - Investment Management Research, Technical report, 1-18.
- Henriksson, R., Livnat, J., Pfeifer, P. y Stumpp, M. (2019). Integrating ESG in portfolio construction. *The Journal of Portfolio Management*, 45(4), 67-81. <https://doi.org/10.3905/jpm.2019.45.4.067>

- Hirschberger, M., Steuer, R., Utz, S., Wimmer, M. y Qi, Y. (2013). Computing the nondominated surface in tri-criterion portfolio selection. *Operations Research*, 61(1), 169-183. <https://doi.org/10.1287/opre.1120.1140>
- James, W., y Stein, C. (1961). Estimation with quadratic loss. *Proceedings Fourth Berkeley Symposium of Math. Statist. Prob.*, 1, 361-380.
- Kim, J. H., Kim, W. C., Kwon, D. G. y Fabozzi, F. J. (2018). Robust equity portfolio performance. *Annals of Operations Research*, 266(1), 293-312. <https://doi.org/10.1007/s10479-017-2739-1>
- Kolm, P., Tütüncü, R., y Fabozzi, F. (2014). 60 years of portfolio optimization: Practical challenges and current trends. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 356-371. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.10.060>
- Krokhmal, P., Palmquist, J. y Uryasev, S. (2002). Portfolio optimization with conditional value-at-risk objective and constraints. *Journal of Risk*, 4(1), 43-68.
- Ledoit, O. y Wolf, M. (2003). Improved estimation of the covariance matrix of stock returns with an application to portfolio selection. *Journal of Empirical Finance*, 10(5), 603-621. [https://doi.org/10.1016/S0927-5398\(03\)00007-0](https://doi.org/10.1016/S0927-5398(03)00007-0)
- Ledoit, O. y Wolf, M. (2004). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2), 365-411. [https://doi.org/10.1016/S0047-259X\(03\)00096-4](https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4)
- León, B. y Zapata, C. (2023). *Gestión moderna de portafolio: una guía cuantitativa con aplicaciones en R y Python*. Colegio de Estudios Superiores de Administración (CESA).
- Lintner, J. (1965). Security prices, risk, and maximal gains from diversification. *The Journal of Finance*, 20(4), 587-615. <https://doi.org/10.2307/2977249>
- Maillard, S., Roncalli, T. y Teiletche, J. (2010). The properties of equally weighted risk contribution portfolios. *Journal of Portfolio Management*, 36(4), 60-70. <https://doi.org/10.3905/jpm.2010.36.4.060>
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), 77-91.

- Markowitz, H. (1959). *Portfolio selection: Efficient diversification of investments*. Yale University Press.
- Marschak, J. (1938). Money and the Theory of Assets. *Econometrica, Journal of the Econometric Society*, 311-325. <https://doi.org/10.2307/1905409>
- Michaud, R. (1989). The Markowitz optimization enigma: Is optimization optimal? *Financial Analysts Journal*, 45(1), 31-42.
- Michaud, R. (1998). *Efficient asset management: A practical guide to stock portfolio optimization and asset allocation*. Oxford University Press.
- Mossin, J. (1966). Equilibrium in a capital asset market. *Econometrica*, 34(4), 768-783. <https://doi.org/10.2307/1910098>
- Pachamanova, D. y Fabozzi, F. (2012). Equity portfolio selection models in practice. *Encyclopedia of Financial Models*, 1(1), 61-87. <https://doi.org/10.1002/9781118182635.efm0046>
- Qian, E. (2005). Risk parity portfolios: Efficient portfolios through true diversification. *Panagora Asset Management*, Technical Report.
- Qian, E. (2006). On the financial interpretation of risk contribution: Risk budgets do add up. *Journal of Investment Management*, 4(4), 1-11.
- Qian, E. (2011). Risk parity and diversification. *The Journal of Investing*, 20(1), 119-127.
- Rockefeller, R. y Uryasev, S. (2000). Optimization of conditional value-at-risk. *Journal of Risk*, 2(3), 21-41. <https://doi.org/10.21314/JOR.2000.038>
- Rockefeller, R. y Uryasev, S. (2002). Conditional value-at-risk for general loss distributions. *Journal of Banking & Finance*, 26(7), 1443-1471. [https://doi.org/10.1016/S0378-4266\(02\)00271-6](https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6)
- Romero, C. (2010). La Teoría Moderna de Portafolio: un ensayo sobre sus formulaciones originales y sus repercusiones contemporáneas. *ODEON*, 5, 103-118.
- Roncalli, T. (2014). *Introduction to Risk Parity and Budgeting*. CRC Press.

- Roy, A. (1952). Safety first and the holding of assets. *Journal of the Econometric Society*, 20(3), 431-449. <https://doi.org/10.2307/1907413>
- Rubinstein, M. (2006). Bruno de Finetti and mean-variance portfolio selection. *Journal of Investment Management*, 4(3),1-19.
- Sharpe, W. (1963). A simplified model for portfolio analysis. *Management science*, 9(2), 277-293. <https://doi.org/10.1287/mnsc.9.2.277>
- Sharpe, W. (1964). Capital Asset Prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk. *Journal of Finance*, 19(3), 425-442. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1964.tb02865.x>
- Sharpe, W. (1971). A linear programming approximation for the general portfolio analysis problem. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 6(5), 1263-1275. <https://doi.org/10.2307/2329860>
- Sortino, F. y Price, L. (1994). Performance measurement in a downside risk framework. *Journal of Investing*, 3(3), 59-64. <https://doi.org/10.3905/joi.3.3.59>
- Tobin, J. (1958). Liquidity preference as behavior towards risk. *Review of Economic Studies*, 25(1), 68-85.
- Treynor, J. (1961). *Toward a theory of market value of risky assets*. Working paper.
- Tütüncü, R. y Koenig, M. (2004). Robust asset allocation. *Annals of Operations Research*, 132(1), 157-187. <https://doi.org/10.1023/B:ANOR.0000045281.41041.ed>
- Uryasev, S. y Rockafellar, R. T. (2001). Conditional value-at-risk: Optimization approach. *Stochastic optimization: Algorithms and Applications*, 411-435. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6594-6_17
- Utz, S., Wimmer, M., Hirschberger, M. y Steuer, R. (2014). Tri-criterion inverse portfolio optimization with application to socially responsible mutual funds. *European Journal of Operational Research*, 234(2), 491-498. <https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.024>
- Von Neumann, J. y Morgenstern, O. (1944). *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Zapata, C. (2021a). Optimización robusta de portafolios: conjuntos de incertidumbre y contrapartes robustas. *ODEON*, 20, 93-121. <https://doi.org/10.18601/17941113.n20.04>

Zapata, C. (2021b). Modelo Media-Varianza y criterios ASG: de Markowitz al portafolio socialmente responsable. *ODEON*, 21, 55-79. <https://doi.org/10.18601/17941113.n21.04>